Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 74–118

УДК 510.22 + 51-71 + 517.983

Я.І. Грушка

(Інститут математики НАН України, Київ)

Кінематичні мінливі множини із заданим універсальним перетворенням координат

grushka@imath.kiev.ua

This work is devoted to the investigation of kinematic changeable sets (“abstract kinematics”), that is the mathematical objects, in which changeable sets are equipped by different geometrical or topological structures, namely metric, topological, linear, Banach, Hilbert and other spaces. Such mathematical objects allow to simulate the evolution of physical systems in a framework of different laws of kinematics. Existence of a few different kinematic theories of tachyon motion may serve as a physical motivation for investigations in this direction. In the paper the main properties of kinematic sets with given universal coordinate transform are investigated and examples of their application to mathematically strict foundation of tachyon kinematics are presented.

Дана робота присвячена дослідженню кінематичних мінливих множин (“абстрактних кінематик”), тобто математичних об’єктів, в яких мінливі множини оснащені різноманітними геометричними та топологічними структурами, а саме, метричними, топологічними, лінійними, банаховими, гільбертовими та іншими просторами. Такі математичні об’єкти дозволяють моделювати еволюцію фізичних систем в рамках різних законів кінематики. Фізичною мотивацією для досліджень в цьому напрямку може служити наявність декількох різних кінематичних теорій тахіонного руху. В роботі досліджені основні властивості кінематичних мінливих множин із заданим універсальним перетворенням координат та наведено приклади їхнього застосування до математично строгого обґрунтування кінематичних теорій тахіонного руху.

1. Вступ.

Тематика побудови теорії надсвітлового руху була започаткована в роботах [1,2] понад 50 років тому назад. Дослідження в цьому напрямку особливо активізувались в останні роки у зв'язку з дослідами проведеними в рамках експерименту OPERA, 2011-2012 [3]. І хоча пізніше перевищення швидкості світла в дослідах OPERA [3] не підтвердилось, дана тематика залишається актуальною. На сьогодні наявність декількох кінематичних теорій тахіонного руху породжує необхідність побудови нових абстрактних математичних структур, які б дозволяли моделювати еволюцію фізичних систем в рамках різних законів кінематики. За умови відсутності експериментальної перевірки висновків теорій тахіонової кінематики, такі математичні структури гарантували б, принаймні, коректність отримання цих висновків із постулатів даних теорій. Дана робота, а також роботи [4,5] присвячені побудові таких математичних структур. Дослідження в цьому напрямку можуть бути цікавими, також, для астрофізики, оскільки існує припущення, що у великих масштабах Всесвіту закони фізики (зокрема, закони кінематики) можуть бути відмінними від тих, які діють в околі нашої сонячної системи.

На фізичному рівні проблема дослідження кінематик з довільними законами перетворення координат в інерційних системах відліку ставилась у роботі [6]. Частинним випадком перетворень координат виду [6] є (тривимірні) класичні перетворення Лоренца, а також узагальнені перетворення Лоренца в сенсі E. Recami [7–9] (для систем відліку, що рухаються зі швидкістю, більшою за швидкість світла). В [10, 11] було дано загальне означення лінійних перетворень координат та узагальнених перетворень Лоренца у випадку, коли простір геометричних змінних є довільним дійсним гільбертовим простором.

Слід зазначити, що математичний апарат робіт [6–11] не базується на теорії мінливих множин, що істотно зменшує його загальність, зокрема дає змогу вивчати лише універсальні перетворення координат (тобто такі перетворення координат, що діють однаковим чином для всіх матеріальних об'єктів). Роботи [4, 5] базуються на загальній теорії мінливих множин, побудованій в роботах [12–15]. Зокрема, в [4, 5] дано означення реального і універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах, а також доведено існування кінематичних мінливих множин, у яких не існує універсального перетворення координат [5]. Такі кінематичні множини можуть бути корисними для математично строгого моделювання еволюції фізичних систем за умов гіпотези про існування частинок з різними “власними” швидкостями світла (на фізичному рівні подібні моделі розглядаються в роботах [16–20]). В той же час більшість фізичних кінематичних теорій (як класичних так і тахіонних) передбачають існування універсального перетворення координат. Саме тому в даній роботі основну увагу приділено дослідженню кінематичних мінливих множин із заданим універсальним перетворенням координат та їхньому застосуванню до математичного обґрунтування кінематичних теорій тахіонного руху.

2. Основні поняття теорії мінливих множин.

Наведемо необхідні поняття та позначення теорії мінливих множин, які містяться в роботі [13] (див., також [4, 12, 14, 15, 21, 22]). Мінливі та базові мінливі множини позначатимемо великими каліграфічними або готичними буквами. Надалі, для довільної базової мінливої множини $\mathcal{B}$ будемо використовувати такі позначення:

$\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ – базова множина, або множина всіх елементарних станів $\mathcal{B}$.
$\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ – множина всіх елементарно-часових станів $\mathcal{B}$.
$\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ – множина моментів часу $\mathcal{B}$.
$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$, де $\leq_{\mathcal{B}}$ – відношення часового порядку $\mathcal{B}$.
$\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$ – напрямне відношення змін $\mathcal{B}$.
$\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ – база елементарних процесів $\mathcal{B}$.

Елементи множин $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ та $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ будемо називати, відповідно, елементарними та елементарно-часовими станами $\mathcal{B}$.

Властивості 1 ([4]). *Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина. Тоді:*

1. $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$ *— рефлексивне бінарне відношення, задане на $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, тобто для довільного $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ справедливе співвідношення $x \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} x$.*

2. $\leq_{\mathcal{B}}$ *— відношення (нестрогого) лінійного порядку, задане на $\mathbf{Tm}(\mathcal{B})$ (тобто $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbf{Tm}(\mathcal{B}), \leq_{\mathcal{B}})$ — лінійно упорядкована множина в сенсі* [23, с. 12]*).*

3. *$\mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ (де $\mathbf{T} \times \mathcal{X} = \{(t,x) \mid t \in \mathbf{T},\, x \in \mathcal{X}\}$ — декартовий добуток множин $\mathbf{T}$ і $\mathcal{X}$).*

4. *$\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$ — рефлексивне бінарне відношення на $\mathbb{Bs}(\mathcal{B})$.*

Зауваження 1. У тому випадку, коли наперед відомо, про яку базову мінливу множину $\mathcal{B}$ йде мова у позначеннях $\leq_{\mathcal{B}}$, $\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}$, символ "$\mathcal{B}$" будемо опускати, застосовуючи позначення $\leq$, $\leftarrow$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\leftarrow}$. Для довільних елементарно-часових станів $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ замість позначення $\omega_2 \overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}} \omega_1$ часто будемо використовувати позначення $\omega_2 \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow} \omega_1$ або $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.

Нехай, $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина і $\mathcal{X}$ — довільна множина. Для довільної пари $\omega = (t,x) \in \mathbf{T} \times \mathcal{X}$ будемо використовувати позначення:

$$\mathsf{bs}\,(\omega) := x, \quad \mathsf{tm}\,(\omega) := t. \tag{1}$$

Властивості 2 ([4, 13]). *Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина. Тоді:*

1. *Якщо $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$, то $\mathsf{bs}\,(\omega_2) \leftarrow \mathsf{bs}\,(\omega_1)$ і $\mathsf{tm}\,(\omega_1) \leq \mathsf{tm}\,(\omega_2)$. Якщо, додатково, $\omega_1 \neq \omega_2$, то $\mathsf{tm}\,(\omega_1) < \mathsf{tm}\,(\omega_2)$.*

2. *$\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) = \{\mathsf{bs}\,(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}$;*

3. *Для довільних $x_1, x_2 \in \mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$ умова $x_2 \leftarrow x_1$ має місце тоді і тільки тоді, коли існують елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ такі, що $\mathsf{bs}\,(\omega_1) = x_1$, $\mathsf{bs}\,(\omega_2) = x_2$ і $\omega_2 \leftarrow \omega_1$.*

4. *Якщо $\mathbb{Tm}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{Tm}\,(\mathcal{B}_2)$, $\mathbb{Bs}\,(\mathcal{B}_1) = \mathbb{Bs}\,(\mathcal{B}_2)$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}_1}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathcal{B}_2}{\leftarrow}}$, то $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.*

Для довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ будемо використовувати такі позначення:

$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ – Множина ***індексів*** мінливої множини $\mathcal{Z}$.

$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ – Множина ***областей сприймання*** $\mathcal{Z}$.

При цьому для довільних областей сприймання $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ використовуються наступні позначення:

$\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l})$ – Індекс області сприймання $\mathfrak{l}$.

$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$**,** $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$**,** $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$**,** $\leq_{\mathfrak{l}}$**,** $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$**,** $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$ — множина всіх елементарних станів $\mathfrak{l}$, множина всіх елементарно-часових станів $\mathfrak{l}$, множина моментів часу $\mathfrak{l}$, відношення часового порядку $\mathfrak{l}$, напрямне відношення змін $\mathfrak{l}$, база елементарних процесів $\mathfrak{l}$ відповідно.

$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = (\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}), \leq_{\mathfrak{l}})$**.**

$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle$ – ***відображення уніфікації*** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.

Зауваження 2. Безпосередньо з означення мінливої множини ([15, означення 3.1], [13, definition 9.6]) випливає, що для довільної області сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ довільної мінливої множини $\mathcal{Z}$ мають місце властивості 1 та властивості 2(1-3) (з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "область сприймання"). При цьому *використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в зауваженні 1.*

Властивості 3 ([4])**.** *Нехай $\mathcal{Z}$ — довільна мінлива множина. Тоді:*

1. *Множини $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ та $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z})$ завжди непорожні, причому $\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \{\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\}$.*

2. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ рівність $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) = \mathtt{ind}\,(\mathfrak{m})$.*

3. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle$ є відображенням з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})}$, де $2^{\mathbf{M}}$ означає множину всіх підмножин множини $\mathbf{M}$.*

Твердження 1 ([4])**.** *Нехай, $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ — мінливі множини, причому $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$ і для довільних областей сприймання $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_1) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}_2)$ справедлива рівність: $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_2 \rangle$. Тоді, $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2$.*

Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання мінливої множини $\mathcal{Z}$. Тоді для довільної підмножини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ через $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\, A$ будемо позначати дію відображення уніфікації $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle$ на множину A. Тобто, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\, A := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\,(A)$. Якщо відомо про яку мінливу множину $\mathcal{Z}$ йде мова, у позначенні $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle$ символ $\mathcal{Z}$ будемо опускати, вживаючи замість нього позначення, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

В роботах [13, 15] доведено, що довільна мінлива множина $\mathcal{Z}$ має такі властивості:

Властивості 4. *1. Довільну область сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ можна подати у вигляді упорядкованої пари, $\mathfrak{l} = (\mathtt{ind}(\mathfrak{l}), \mathfrak{l}^{\hat{}})$, де $\mathfrak{l}^{\hat{}}$ є базовою мінливою множиною. При цьому $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}^{\hat{}})$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}^{\hat{}})$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}^{\hat{}})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}^{\hat{}})$, $\leq_{\mathfrak{l}} = \leq_{\mathfrak{l}^{\hat{}}}$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow} = \underset{\mathfrak{l}^{\hat{}}}{\leftarrow}$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}} = \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}^{\hat{}}}{\leftarrow}}$*

2. *Для довільних $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність, $\langle \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = A$.*

3. *Якщо $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq B \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, то $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \subseteq \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle B$;*

4. *Для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедливе включення:*

$$\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \subseteq \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A.$$

Означення 1 ([4])**.** *Мінливу множину $\mathcal{Z}$ будемо називати* ***чітко видимою****, якщо для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ з умови $A \neq \emptyset$ випливає, що $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \neq \emptyset$.*

Твердження 2 ([13, 14])**.** *Нехай $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання довільної чітко видимої мінливої множини $\mathcal{Z}$. Тоді для довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ існує, причому единий елемент $\omega' =: \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ такий, що $\{\omega'\} = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \{\omega\}$.*

Таким чином, в чітко видимій мінливій множині для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ і $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ виконується рівність:

$$\{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle \omega\} = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \{\omega\}.$$

Відображення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ будемо називати відображеннями ***чіткої уніфікації***. У тих випадках, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є наперед заданою, замість позначення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle$ будемо використовувати позначення $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle$.

Твердження 3 ([13,14])**.** *Нехай, $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, де $\mathcal{Z}$ — чітко видима мінлива множина. Тоді множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{m})$ є рівнопотужними. При цьому відображення: $f(\omega) = \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle \omega$ ($\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$) є бієкцією (взаємно-однозначною відповідністю) між цими множинами.*

Враховуючи властивість 4(2), а також [14, теореми 5.2, 5.1] або [13, theorems 11.2, 11.1], отримуємо наступні властивості відображень чіткої уніфікації.

Властивості 5. *Нехай, $\mathcal{Z}$ — довільна чітко видима мінлива множина, і $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ — довільні області сприймання $\mathcal{Z}$. Тоді:*

1. $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \ \langle !\, \mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \omega;$
2. $\forall\, A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, A = \{\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega \mid \omega \in A\};$
3. $\forall\, \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})\ \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle\, \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega = \langle !\, \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega.$

3. Мінливі множини і кінематика

3.1. Математичні об'єкти для побудови геометричних оточень мінливих множин.

Даний підрозділ носить суто технічний характер. Тут не вводяться ніякі принципово нові поняття, а лише робиться спроба вкласти найбільш часто вживані математичні простори, які хоч якимось чином пов'язані з геометрією, в одну математичну структуру, зручну для побудови абстрактних кінематик.

Означення 2. *Трійку $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ будемо називати **лінійною структурою** над множиною $\mathfrak{X}$, якщо:*

1. $\mathbb{K} = (\mathbf{K}, +_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}})$ *— поле.*
2. $\oplus : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ *— бінарна операція над $\mathfrak{X}$;*
3. $\otimes : \mathbf{K} \times \mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}$ *— бінарна операція з $\mathbf{K} \times \mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$.*
4. *Трійка $(\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$ є лінійним простором над полем $\mathbb{K}$.*

*Якщо $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то лінійну структуру $\mathbb{L}$ будемо називати **числовою лінійною структурою** над $\mathfrak{X}$.*

Якщо $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ є лінійною структурою над $\mathfrak{X}$, то лінійний простір над полем $\mathbb{K}$, породжений цією структурою будемо позначати через $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$ ($\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L}) = (\mathfrak{X}, \oplus, \otimes)$).

Наступне означення базується на концепції, що більшість найбільш часто вживаних математичних об'єктів (в тому числі функції, відношення, алгебраїчні операції, упорядковані пари або набори) є множинами.

Означення 3. *Шестірку множин* $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \mathbb{L}, \rho, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ *будемо називати* ***координатним простором****, якщо виконуються наступні умови:*

1. $\mathfrak{X} \neq \emptyset$.
2. $\mathcal{T} \cup \mathbb{L} \neq \emptyset$.
3. *Якщо* $\mathcal{T} \neq \emptyset$*, то* $\mathcal{T}$ *— топологія на* $\mathfrak{X}$.
4. *Якщо* $\mathbb{L} \neq \emptyset$*, то* $\mathbb{L}$ *— числова лінійна структура над* $\mathfrak{X}$.
5. *Якщо* $\mathbb{L} \neq \emptyset$ *і* $\mathcal{T} \neq \emptyset$*, то пара* $(\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L}), \mathcal{T})$ *є лінійним топологічним простором.*
6. *Якщо* $\rho \neq \emptyset$*, то:*

   6.1) ρ *— метрика на* $\mathfrak{X}$*;*

   6.2) $\mathcal{T} \neq \emptyset$ *і топологія* $\mathcal{T}$ *породжена метрикою* ρ.
7. *Якщо* $\|\cdot\| \neq \emptyset$*, то:*

   7.1) $\mathbb{L} \neq \emptyset$ *і* $\|\cdot\|$ *— норма на лінійному просторі* $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$*;*

   7.2) $\rho \neq \emptyset$ *і* ρ *— метрика, породжена нормою* $\|\cdot\|$.
8. *Якщо* $(\cdot,\cdot) \neq \emptyset$*, то:*

   8.1) $\|\cdot\| \neq \emptyset$ *(а отже, згідно з* **7.1)***, і* $\mathbb{L} \neq \emptyset$*);*

   8.2) $(\cdot,\cdot)$ *— скалярний добуток на лінійному просторі* $\mathfrak{Lp}(\mathfrak{X}, \mathbb{L})$*;*

   8.3) *норма* $\|\cdot\|$ *породжена скалярним добутком* $(\cdot,\cdot)$.

Зауваження про позначення. Нехай $\mathfrak{Q} = (\mathfrak{X}, \mathcal{T}, \mathbb{L}, \rho, \|\cdot\|, (\cdot,\cdot))$ — координатний простір, де у випадку $\mathbb{L} \neq \emptyset$, $\mathbb{L} = (\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ — числова лінійна структура над $\mathfrak{X}$. Надалі будемо використовувати такі позначення:

1. $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) := \mathfrak{X}$ (множину $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***множиною значень координат*** $\mathfrak{Q}$).
2. $\mathcal{T}p(\mathfrak{Q}) := \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}p(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***топологією*** $\mathfrak{Q}$).

3. $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) := \mathbb{L}$ ($\mathbb{L}s(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***лінійною структурою*** $\mathfrak{Q}$).

4. $\mathfrak{P}\mathfrak{s}(\mathfrak{Q}) := \begin{cases} \mathbb{K}, & \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset \\ \emptyset, & \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) = \emptyset \end{cases}$ ($\mathfrak{P}\mathfrak{s}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***полем скалярів*** $\mathfrak{Q}$).

5. Для елементів $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{P}\mathfrak{s}(\mathfrak{Q})$ $(n \in \mathbb{N})$ будемо вживати позначення, $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}} := \lambda_1 \otimes x_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_n \otimes x_n$.

6. $\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}} := \rho$ ($\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***дистанцією*** на $\mathfrak{Q}$).

7. $\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}} := \|\cdot\|$ ($\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***нормою*** на $\mathfrak{Q}$).

8. $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}} := (\cdot,\cdot)$ ($(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}$ будемо називати ***скалярним добутком*** на $\mathfrak{Q}$).

Елементи $x \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ будемо називати ***координатами*** координатного простору $\mathfrak{Q}$, а у випадку $\mathbb{L}s(\mathfrak{Q}) \neq \emptyset$ ці елементи будемо також називати ***векторами (векторними координатами)*** $\mathfrak{Q}$. У випадку, коли це не викликає непорозумінь у позначеннях $(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)_{\mathfrak{Q}}$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}$ символ $\mathfrak{Q}$ будемо опускати, вживаючи замість них позначення $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$, $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$ відповідно.

3.2. Кінематичні мінливі множини

Означення 4. *1. Пару $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ будемо називати* ***геометричним оточенням*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:*

а) $\mathfrak{Q}$ *— координатний простір;*

б) $k : \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ *— відображення з $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ в $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.*

При цьому пару $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0) = (\mathcal{B}, (\mathfrak{Q}, k))$ будемо називати ***базовою кінематичною мінливою множиною****, або, скорочено —* ***базовою кінематичною*** *множиною.*

2. Нехай, $\mathcal{Z}$ — мінлива множина. Індексовану сім'ю пар виду $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}))$ будемо називати ***геометричним оточенням*** *мінливої множини $\mathcal{Z}$, якщо для довільної області сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ пара $(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}})$ є геометричним оточенням базової мінливої множини $\mathfrak{l}^{\wedge}$, породженої областю сприймання $\mathfrak{l}$,* *тобто якщо пара* $(\mathfrak{l}\,\hat{}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ *є базовою кінематичною множиною для довільної* $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$.

При цьому пару $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$ *будемо називати* ***кінематичною мінливою множиною****, або, скорочено —* ***кінематичною*** *множиною.*

Підкреслимо, що в цій статті розглядаються лише кінематичні множини зі сталою (не змінною в часі) геометрією. Такі кінематичні множини достатні для побудови абстрактних кінематик в інерційних системах відліку. Зробивши певну модифікацію означення 4, визначити кінематичні множини з мінливою геометрією, в принципі, можливо.

3.2.1 Система позначень для базових кінематичних множин

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} = (\mathcal{B}, \mathcal{G}_0)$ де $\mathcal{G}_0 = (\mathfrak{Q}, k)$ — довільна базова кінематична множина. Надалі будемо використовувати наступну систему позначень.

а) Позначення, індуковані з теорії базових мінливих множин:

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}); & \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}); & \\ \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow}} := \overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}}; & \underset{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}{\leftarrow} := \underset{\mathcal{B}}{\leftarrow}; & \\ \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}(\mathcal{B}); & \mathbb{T}\mathbf{m}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}); & \leq_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \leq_{\mathcal{B}}. \end{array}$$

б) Позначення, індуковані з позначень для координатних просторів:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q})\,; & \mathcal{T}p\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{T}p\,(\mathfrak{Q})\,; & \mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbb{L}s\,(\mathfrak{Q})\,; \\ \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Ps}\,(\mathfrak{Q})\,; & \mathbf{di}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \mathbf{di}_{\mathfrak{Q}}; & \|\cdot\|_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{Q}}\,; \\ (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}}\,. & & \end{array}$$

У випадку $\mathbb{L}s\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \neq \emptyset$ для довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ будемо використовувати позначення, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}}$.

в) Власні позначення для базових кінематичних множин:

$$\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathcal{B}; \qquad \mathsf{BG}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathfrak{Q}; \qquad \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x) := k(x) \ \left(x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right).$$

Зауважимо, що функція $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(\cdot)$ ставить у відповідність кожному елементарному стану $x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ його координату $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(x)$.

г) Скорочені варіанти позначень

- Використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в зауваженні 1 (але, з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "базова кінематична множина").

- У тих випадках, коли наперед відомо про яку базову кінематичну множину йде мова, замість позначень $\mathbf{di}_{\mathfrak{C}^{\flat}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{C}^{\flat}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}^{\flat}}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\flat}}(x)$ будемо використовувати позначення $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$, $\mathfrak{q}(x)$ відповідно.

3.2.2 Система позначень для кінематичних множин

Нехай, $\mathfrak{C} = (\mathcal{Z}, \mathcal{G})$, де $\mathcal{G} = ((\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}))$ — кінематична множина.

а) Мінливу множину $\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) := \mathcal{Z}$ будемо називати ***базою еволюції*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$.

б) Множини $\mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) := \mathcal{I}nd(\mathcal{Z}) = \mathcal{I}nd(\mathbb{BE}(\mathfrak{C}))$; $\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) := \mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k(\mathbb{BE}(\mathfrak{C}))$ будемо називати ***множиною індексів*** та ***множиною систем відліку*** кінематичної множини $\mathfrak{C}$ (відповідно). Причому у випадку кінематичних множин, на відміну від абстрактних мінливих множин, буде використовуватись термін "система відліку", а не "область сприймання".

в) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ зберігаються всі позначення, введені для областей сприймання в теорії мінливих множин ($\mathtt{ind}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{Bs}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{Tm}(\mathfrak{l})$, $\leq_{\mathfrak{l}}$).

г) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ індукуються позначення для відображень уніфікації:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C} \rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle .$$

Зокрема, коли мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою, будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$ є ***чітко видимою*** і використовувати позначення:

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle := \langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle .$$

д) За означенням 4, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ пара $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l} = (\mathfrak{l}^{\wedge}, (\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}, k_{\mathfrak{l}}))$ є базовою кінематичною множиною. $\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}$ будемо називати ***образом кінематичної множини*** $\mathfrak{C}$ у системі відліку $\mathfrak{l}$.

е) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ введемо наступні позначення:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; & \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathbb{L}s(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathbb{L}s(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \\
\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathcal{T}p(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathcal{T}p(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; & \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathfrak{Ps}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{Ps}(\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}})\,; \\
\|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = \|\cdot\|_{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}}\,; & \mathbf{di}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\, \mathfrak{C}) := \mathbf{di}_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = \mathbf{di}_{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}}\,; \\
(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}} = (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}}\,; & \mathsf{BE}(\mathfrak{l}) := \mathsf{BE}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^{\hat{}}\,; \\
 & \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_{\mathfrak{l}}.
\end{array}
$$

Також для систем відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ таких, що $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$ і довільних $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathcal{Q}_l}$.

є) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ введемо таке позначення:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\, \mathfrak{C}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}\upharpoonright\mathfrak{l}}(x) = k_{\mathfrak{l}}(x),\ x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})\,.$$

ж) Скорочені варіанти позначень:

- У тих випадках, коли наперед відомо про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова замість позначень $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$, $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}(\cdot;\, \mathfrak{C})$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C})$, $\mathfrak{q}_l(x;\, \mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення, $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle$, $\mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{L}s(\mathfrak{l})$, $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l}}$, $\mathcal{T}p(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{Ps}(\mathfrak{l})$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l}}$, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{q}_l(x)$ відповідно.
- У тих випадках, коли наперед відомо про яку систему відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ йде мова замість позначень $\mathbf{di}_{\mathfrak{l}}$, $\|\cdot\|_{\mathfrak{l}}$, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l}}$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x)$, $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$ будемо використовувати позначення $\mathbf{di}$, $\|\cdot\|$, $(\cdot,\cdot)$, $\mathfrak{q}(x)$, $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ відповідно. Також будемо користуватися скороченими варіантами позначень для областей сприймання мінливих множин, описаними в зауваженні 2.

Твердження 4 ([4])**.** *Нехай, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ — кінематичні множини, причому:*

1. $\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)$.
2. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)$ справедливі рівності, $\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_1) = \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_2)$ і $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x,\, \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x,\, \mathfrak{C}_2)$ $(\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))$.*

3. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)$ *справедлива рівність,* $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \rangle$.

Тоді, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Зауваження 3. Із системи позначень, прийнятої в цьому підрозділі, випливає, що для довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$ зберігаються властивості 3, властивості 4 та твердження 3, а у випадку, коли $\mathfrak{C}$ є чітко видимою, — властивості 5 (з заміною скрізь символу $\mathcal{Z}$ на символ $\mathfrak{C}$ і терміну “область сприймання” на термін “система відліку”).

Зауваження 4. Із зауваження 2 та позначень для кінематичних множин, прийнятих в даному підрозділі випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ довільної кінематичної множини $\mathfrak{C}$ мають місце властивості 1 та властивості 2(1-3) (заміною символу “$\mathcal{B}$ ” на символ “$\mathfrak{l}$” і терміну “базова мінлива множина” на термін “система відліку”). При цьому *використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в зауваженні 1.*

4. Перетворення координат у кінематичних множинах.

Нехай, $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ – базова кінематична множина. Введемо наступні позначення.

1. Множину:

$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) := \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right),$$

будемо називати ***множиною Мінковського*** базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$.

2. Через $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \right\rangle}$ будемо позначати відображення з $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, що задається формулою:

$$\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \right\rangle}(\omega) := \left(\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}}(\mathsf{bs}(\omega))\right), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).$$

Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ значення $\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \right\rangle}(\omega)$ будемо називати ***координатами Мінковського*** ω.

3. Якщо $\mathfrak{C}$ — довільна кінематична множина, то для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ вводимо позначення:

$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}) := \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}).$$

$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) := (\mathsf{tm}(\omega), \mathsf{q}_{\mathfrak{l}}(\mathsf{bs}(\omega))) \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C}), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}). \qquad (2)$$

Множину $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$ будемо називати ***множиною Мінковського*** для системи відліку $\mathfrak{l}$ у кінематичній множині $\mathfrak{C}$. Значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо називати ***координатами Мінковського*** елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ ***у системі відліку*** $\mathfrak{l}$.

Коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначень $\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathfrak{C})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$, $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)$ відповідно.

Означення 5. *Нехай, $\mathfrak{C}$ — чітко видима кінематична множина і $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ — довільні системи відліку $\mathfrak{C}$.*

1. *Відображення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\,\cdot\,;\mathfrak{C}) : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, що задається формулою:*

   $$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle\,\omega), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$$

   *будемо називати **реальним перетворенням координат** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*

   Для елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ значення $\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ можна назвати координатами Мінковського ω у (іншій) системі відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$.

2. *Відображення $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ будемо називати **універсальним перетворенням координат** з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$, якщо:*

   - *$\widetilde{Q}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ та $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$.*
   - *Для довільного елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

     $$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) = \widetilde{Q}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega)\right).$$

3. *Будемо говорити, що системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ **допускають універсальне перетворення координат**, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\widetilde{Q} : \mathbb{M}k(\mathfrak{l}) \mapsto \mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*

   Якщо системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат будемо використовувати позначення:

   $$\mathfrak{l} \underset{\mathfrak{C}}{\rightleftarrows} \mathfrak{m},$$

у випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, будемо використовувати позначення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.

4. *Індексовану сім'ю $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ будемо називати* ***універсальним перетворенням координат для кінематичної множини*** *$\mathfrak{C}$, якщо:*
   - *Для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ $\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{m}$.*
   - *Для довільних $\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ і $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ справедливі рівності:*
   $$\widetilde{Q}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathrm{w}; \qquad \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right) = \widetilde{Q}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}). \tag{3}$$
5. *Будемо говорити, що кінематична множина $\mathfrak{C}$* ***допускає універсальне перетворення координат****, якщо існує хоч одне універсальне перетворення координат $\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ для $\mathfrak{C}$.*

Зауваження 5. У випадку, коли наперед відомо, про яку кінематичну множину $\mathfrak{C}$ йде мова, замість позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega;\mathfrak{C})$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega)$.

Твердження 5 ([4]). *Для довільної чітко видимої кінематичної множини $\mathfrak{C}$ наступні твердження рівносильні:*

1. *$\mathfrak{C}$ допускає універсальне перетворення координат.*
2. *Для довільних систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ має місце співвідношення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$ (тобто довільні дві системи відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ допускають універсальне перетворення координат).*
3. *Існує система відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ така, що для довільної системи відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ виконується співвідношення $\mathfrak{l} \rightleftarrows \mathfrak{m}$.*

В роботі [5] показано, що кінематичні множини, пов'язані із класичною спеціальною теорією відносності в інерційних системах відліку і її узагальненнями в сенсі E. Recami, допускають універсальне перетворення координат, а також наведено приклади кінематичних мінливих множин, у яких не існує універсального перетворення координат, і які можуть бути корисними для математичного моделювання еволюції фізичних систем за умов гіпотези про існування частинок з різними "власними" швидкостями світла (на фізичному рівні подібні моделі розглядались в роботах [16–20]).

5. Універсальні кінематичні множини.

5.1. Означення універсальних кінематичних множин

Означення 6. *Якщо* $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ *є універсальним перетворенням координат для чітко видимої кінематичної множини* $\mathfrak{C}$, *то пару*

$$\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$$

будемо називати ***універсальною кінематичною множиною***, *або, скорочено,* ***універсальною кінематикою***.

5.2. Система позначень для універсальних кінематик

Всюди в даному підрозділі $\mathcal{F} = \left(\mathfrak{C}, \overleftarrow{\mathcal{Q}}\right)$, де $\overleftarrow{\mathcal{Q}} = \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}$ — довільна універсальна кінематика. Надалі будемо вживати наступну систему позначень.

5.2.1 Позначення, індуковані з теорії кінематичних множин

а) Мінливу множину

$$\mathbb{BE}(\mathcal{F}) := \mathbb{BE}(\mathfrak{C})$$

будемо називати ***базою еволюції*** універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

б) Введемо позначення:

$$\mathcal{I}nd(\mathcal{F}) := \mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) = \mathcal{I}nd(\mathbb{BE}(\mathfrak{C})) = \mathcal{I}nd(\mathbb{BE}(\mathcal{F}));$$
$$\mathcal{L}k(\mathcal{F}) := \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathbb{BE}(\mathfrak{C})) = \mathcal{L}k(\mathbb{BE}(\mathcal{F})).$$

Множину $\mathcal{L}k(\mathcal{F})$ будемо називати ***множиною систем відліку*** універсальної кінематики $\mathcal{F}$.

в) Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$:

- зберігаються всі позначення, введені в теорії мінливих множин ($\mathtt{ind}(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{l}^\wedge$, $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$, $\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}$, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$, $\overset{\mathbb{B}\mathfrak{s}}{\underset{\mathfrak{l}}{\leftarrow}}$, $\mathbf{Tm}(\mathfrak{l})$, $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l})$, $\leq_{\mathfrak{l}}$, $\mathsf{BE}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{l}^\wedge$).

- індукуються всі позначення, введені в теорії кінематичних мінливих множин:

$$\begin{array}{ll}\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathbb{L}s(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); \\ \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & \mathbf{di}_{\mathfrak{l}}\,(\cdot;\,\mathcal{F}) := \mathbf{di}_{\mathfrak{l}}\,(\cdot;\,\mathfrak{C})\,; \\ \mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathcal{T}p(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & \|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := \|\cdot\|_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}\,; \\ \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathcal{F}) := \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l};\,\mathfrak{C}); & (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := (\cdot,\cdot)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}\,. \end{array}$$

- Також для систем відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ таких, що $\mathbb{L}s(\mathfrak{l}) \neq \emptyset$ і довільних $a_1,\dots,a_n \in \mathbf{Zk}(\mathfrak{l})$, $\lambda_1,\dots\lambda_n \in \mathfrak{Ps}(\mathfrak{l})$ індукується позначення: $(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathcal{F}} := (\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n)_{\mathfrak{l},\mathfrak{C}}$.

г) Для довільних систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F}) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$ переносяться позначення

$$\begin{array}{ll}\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\,\mathcal{F}\rangle := \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\mathfrak{C}\rangle\,; & \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\mathcal{F}\rangle := \langle !\,\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\mathfrak{C}\rangle\,; \\ \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) := \mathbb{M}k\,(\mathfrak{l};\mathfrak{C}) & \mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l} := \mathfrak{C} \upharpoonright \mathfrak{l}; \\ \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathcal{F}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}); & \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathcal{F}) := \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathfrak{C}) \\ & \qquad\qquad (\text{де} \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})) \\ \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F}) := \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathfrak{C});\ (\text{де} \quad x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})). & \end{array}$$

Зауважмо, що із введених позначень випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ справедлива рівність, $\mathsf{BE}\,(\mathcal{F} \upharpoonright \mathfrak{l}) = \mathsf{BE}(\mathfrak{l})$.

5.2.2 Власні позначення для універсальних кінематик

Для довільних систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{F})$ через $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]$ будемо позначати відображення з $\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) := \mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F})$ в $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$, що діє за формулою:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,\mathrm{w} = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,(\mathrm{w}) := \widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}).$$

При цьому, коли немає нагальної необхідності, круглі дужки у позначенні $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,(\mathrm{w})$ будемо опускати ($[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,(\mathrm{w}) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]\,\mathrm{w}$).

5.2.3 Скорочені варіанти позначень

- У тих випадках, коли наперед відомо про яку універсальну кінематику $\mathcal{F}$ йде мова, замість позначень $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}(\cdot;\mathcal{F})$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\cdot;\mathcal{F})$, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l};\mathcal{F}]$ будемо використовувати позначення $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}(\cdot)$, $\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}\rangle}(\cdot)$, $[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]$ відповідно.

- Також будемо користуватися скороченими варіантами позначень для систем відліку кінематичних множин, описаними пункті **ж**) підрозділу 3.2.2 (при цьому, символ $\mathfrak{C}$ слід замінити на символ $\mathcal{F}$ і термін "кінематична множина" на термін "універсальна кінематика"). Зокрема, залишаються в силі всі скорочені варіанти позначень для областей сприймання мінливих множин, описані в зауваженні 2.

Нехай, $\mathcal{F}$ — універсальна кінематика. Використовуючи прийняті позначення, а також означення 5 (пункти 2,4) для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ отримуємо рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,, \tag{4}$$

тобто, враховуючи означення 5 (пункт 1) рівність:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{m} \rangle}\left(\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle\, \omega\right) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) \quad (\forall \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,. \tag{5}$$

Крім того, за означенням 5 (пункт 4), для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ отримуємо рівності:

$$[\mathfrak{l} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w} = \mathrm{w}; \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,; \tag{6}$$

$$[\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m}]\, [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w} = [\mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l}]\, \mathrm{w} \quad (\forall \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}))\,. \tag{7}$$

Твердження 6. *Нехай, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ — універсальні кінематики, причому:*

1. $\mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$.
2. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$ справедливі рівності:*

$$\begin{aligned} &\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_1) = \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_2)\,; \\ &\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x,\, \mathcal{F}_1) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x,\, \mathcal{F}_2) \ \ (\forall x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}))\,. \end{aligned}$$

3. *Для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F}_1) = \mathcal{L}k(\mathcal{F}_2)$ справедливі рівності:*

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1 \rangle &= \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2 \rangle\,; \\ [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1] &= [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2]\,. \end{aligned}$$

Тоді, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

Доведення. Нехай, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathfrak{Q}_1}\right)$, $\mathcal{F}_2 = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathfrak{Q}_2}\right)$, де $\overleftarrow{\mathfrak{Q}_1} = \left(\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)}$, $\overleftarrow{\mathfrak{Q}_2} = \left(\widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)}$ — універсальні кінематики, що задовольняють умови даного твердження. Тоді, за першою умовою твердження і згідно із системою позначень, прийнятою у підрозділі 5.2.1, отримуємо:

$$\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_2\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right). \tag{8}$$

Далі, використовуючи другу і третю умови твердження, згідно із системою позначень, прийнятою у підрозділі 5.2.1, для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right)$ маємо:

$$\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_1\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathcal{F}_2\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_2\right); \tag{9}$$

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x,\, \mathfrak{C}_1\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x,\, \mathcal{F}_1\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x,\, \mathcal{F}_2\right) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x,\, \mathfrak{C}_2\right) \;\; (\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})); \tag{10}$$

$$\left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \right\rangle = \left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1 \right\rangle = \left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_2 \right\rangle = \left\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_2 \right\rangle. \tag{11}$$

З рівностей (8), (9), (10), (11), за твердженням 4, випливає рівність $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$.

Розглянемо довільні системи відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_2\right)$. Оскільки, за доведеним вище, $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_2$, то, згідно із позначеннями, прийнятими в пункті **г)** підрозділу 5.2.1:

$$\mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_2\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_2\right).$$

Тому, використовуючи третю умову даного твердження, а також позначення, прийняті в підрозділі 5.2.2, для довільного елемента $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathfrak{C}_2\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_1\right) = \mathbb{M}k\left(\mathfrak{l}; \mathcal{F}_2\right)$ отримуємо:

$$\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}; \mathcal{F}_1\right] \mathrm{w} = \left[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}; \mathcal{F}_2\right] \mathrm{w} = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}),$$

тобто $\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} = \widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$. Звідси, враховуючи довільність систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_1\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}_2\right)$ отримуємо, $\overleftarrow{\mathfrak{Q}_1} = \left(\widetilde{Q}^{(1)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)} = \left(\widetilde{Q}^{(2)}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C}_2)} = \overleftarrow{\mathfrak{Q}_2}$. Отже, $\mathcal{F}_1 = \left(\mathfrak{C}_1, \overleftarrow{\mathfrak{Q}_1}\right) = \left(\mathfrak{C}_2, \overleftarrow{\mathfrak{Q}_2}\right) = \mathcal{F}_2$. □

Зауваження 6. Із зауваження 4 та позначень для універсальних кінематик, прийнятих в даному підрозділі випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ довільної універсальної кінематики $\mathcal{F}$ мають місце властивості 1 та властивості 2(1-3) (з заміною символу "$\mathcal{B}$" на символ "$\mathfrak{l}$" і терміну "базова мінлива множина" на термін "система відліку"). При цьому *використовуються всі скорочені варіанти позначень, описані в зауваженні 1.*

6. Теореми про мультиобраз.

У даному розділі буде доведено теорему про мультиобраз для універсальних кінематик, необхідну для побудови математично строгої моделі кінематики спеціальної теорії відносності, а також деяких її узагальнень. Перш ніж доводити теорему про мультиобраз для універсальних кінематик необхідно довести теореми про мультиобраз для мінливих та кінематичних множин. Це буде зроблено у підрозділах 6.2., 6.3.. В наступному підрозділі буде сформульовано теорему про образ для базових мінливих множин, необхідну для формулювання і доведення всіх зазначених теорем про мультиобраз.

6.1. Теорема про образ для базових мінливих множин.

Означення 7. *Упорядковану трійку $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ будемо називати* ***еволюційним проектором*** *для базової мінливої множини $\mathcal{B}$, якщо:*

1. *$\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина;*
2. *$\mathcal{X}$ — довільна множина;*
3. *U — є відображенням виду, $U : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{T} \times \mathcal{X}$.*

Означення 8 ([14])**.** *Будемо говорити, що елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$* ***об'єднані долею*** *в базовій мінливій множині $\mathcal{B}$, якщо виконується хоч одна з умов $\omega_2 \leftarrow \omega_1$ або $\omega_1 \leftarrow \omega_2$.*

Теорема 1 ([15])**.** *Нехай $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ — еволюційний проектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Тоді існує, причому єдина базова мінлива множина $U\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}\right]$, що задовольняє такі умови:*

1. *$\mathbb{T}\mathbf{m}\left(U\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}\right]\right) = \mathbb{T}$;*

2. *$\mathbb{B}\mathfrak{s}(U\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}\right]) = U(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}$;*

3. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(U[\mathcal{B},\mathbb{T}])$ *і* $\mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_2)$*, то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $U[\mathcal{B},\mathbb{T}]$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = U(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U(\omega_2)$.

Зауваження 7. Теорема 3.1 з роботи [15], на перший погляд виглядає менш загальною, ніж теорема 1, оскільки там вимагається, щоб відображення U в еволюційному проекторі $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ було визначене на множині $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, яка, взагалі кажучи є більш широкою, ніж $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$. Проте довільне відображення U, задане лише на множині $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ завжди можна довільним чином продовжити на множину $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$, і при цьому отримати теорему 1, як наслідок з [15, теорема 3.1].

Зауваження 8. У випадку, коли $\mathbb{T} = \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ замість позначення $U[\mathcal{B},\mathbb{T}]$ будемо використовувати позначення $U[\mathcal{B}]$:

$$U[\mathcal{B}] := U[\mathcal{B}, \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})].$$

Зауваження 9. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина і $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})} : \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ — відображення, що задається формулою: $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}(\omega) = \omega \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$. Тоді трійка $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}), \mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right)$, очевидно є еволюційним проектором для $\mathcal{B}$. При цьому, якщо в умови теореми 1 замість $\mathbb{T}$ і $U[\mathcal{B},\mathbb{T}]$ підставити $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B})$ і $\mathcal{B}$ відповідно, то всі ці умови будуть задовольнятись. Отже, для тотожного на $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ відображення $\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ маємо:

$$\mathbb{I}_{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}[\mathcal{B}] = \mathcal{B}.$$

6.2. Теорема про мультиобраз для мінливих множин

Через $\mathfrak{R}(U)$ будемо позначати ***область значень*** (довільного) відображення U.

Означення 9. 1. *Еволюційний проектор* $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ *(де* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$*) для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *будемо називати* ***бієктивним,*** *якщо відображення* U *є бієкцією з* $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *на* $\mathfrak{R}(U) \subseteq \mathbf{T} \times \mathcal{X}$.

2. *Довільну індексовану сім'ю бієктивних еволюційних проекторів для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *виду* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *будемо називати* ***еволюційним мультипроектором*** *для* $\mathcal{B}$.

Теорема 2. *Нехай,* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *— еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Тоді:*

А. *Існує, причому єдина мінлива множина* $\mathcal{Z}$*, що задовольняє такі умови:*

1. $\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.
2. *Для довільних областей сприймання* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *і довільної множини* $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$ *справедлива рівність:*
$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle\, A = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(A)\right) = \left\{U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right) \mid \omega \in A\right\},$$
де $U_\alpha^{[-1]}$ *— відображення,* ***обернене*** *до* U_α*.*

Б. *Мінлива множина* $\mathcal{Z}$*, що задовольняє умови 1, 2 є чітко видимою.*

Зауваження 10. Якщо мінлива множина $\mathcal{Z}$ задовольняє умову 1 теореми 2, то для довільної області сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, згідно з властивістю 4(1), маємо, $\mathtt{ind}\,(\mathfrak{l}) = \alpha$, $\mathfrak{l}^\wedge = U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]$, а отже, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathfrak{l}^\wedge) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha])$. Тому, за теоремою 1, $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$. Таким чином, умова 2 теореми 2 сформульована коректно.

Доведення теореми 2.

А. Для довільного $\alpha \in \mathcal{A}$ трійка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)$, згідно з означенням 9, є (бієктивним) еволюційним проектором для $\mathcal{B}$. Згідно з теоремою 1, покладемо:
$$\mathcal{B}_\alpha := U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha] \quad (\alpha \in \mathcal{A}).$$
Оскільки $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)$ є бієктивним еволюційним проектором, то, за означенням 9, відображення U_α є взаємно-однозначним. Отже, існує обернене відображення $U_\alpha^{[-1]}$ (при всіх $\alpha \in \mathcal{A}$).

Для довільних індексів $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і довільної множини $A \subseteq \mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha)$ (де, за теоремою 1, $\mathbb{B}\mathfrak{s}\,(\mathcal{B}_\alpha) = U_\alpha\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))$) покладемо:
$$\mathfrak{U}_{\beta,\alpha} A := U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(A)\right). \tag{12}$$
Тоді $\mathfrak{U}_{\beta,\alpha}$ є відображенням з $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\alpha)}$ в $2^{\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}_\beta)} = 2^{U_\beta(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))}$.

Легко бачити, що індексована сім'я відображень $(\mathfrak{U}_{\beta,\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})$ має такі властивості:

1. $\mathfrak{U}_{\alpha,\alpha} A = A$ $(\alpha \in \mathcal{A},\ A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha))$;

2. Якщо $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq B \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$, то $\mathfrak{U}_{\beta,\alpha} A \subseteq \mathfrak{U}_{\beta,\alpha} B$.

3. Якщо $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ і $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathcal{B}_\alpha)$, то
$$\mathfrak{U}_{\gamma,\beta} \mathfrak{U}_{\beta,\alpha} A = \mathfrak{U}_{\gamma,\alpha} A. \tag{13}$$

Отже, згідно з [13, definition 9.6] або [15, означення 3.1], трійка:

$$\mathcal{Z} = \left(\mathcal{A}, \overleftarrow{\mathcal{B}}, \overleftarrow{\mathfrak{U}}\right), \text{ де } \quad \overleftarrow{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A})\,; \ \overleftarrow{\mathfrak{U}} = (\mathfrak{U}_{\beta,\alpha} \mid \alpha, \beta \in \mathcal{A})\,.$$

є мінливою множиною. При цьому, згідно із системою позначень для теорії мінливих множин, прийнятою в з [13], [15]:

$$\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, \mathcal{B}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\} = \{(\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}\,, \tag{14}$$

і для довільних областей сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ (де $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$) і довільної множини $A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathbb{Bs}(U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) = U_\alpha(\mathbb{Bs}(\mathcal{B}))$, згідно (12) отримуємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\ \mathcal{Z} \rangle A = \mathfrak{U}_{\beta,\alpha} A = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(A)\right). \tag{15}$$

З (14) і (15) випливає, що мінлива множина $\mathcal{Z}$ задовольняє умови 1,2 теореми 2.

Якщо мінлива множина $\mathcal{Z}_1$ також задовольняє умови 1,2 теореми 2, то, за умовою 1, $\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k(\mathcal{Z}_1)$, а, згідно з умовою 2, довільних областей сприймання $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k(\mathcal{Z}_1)$ справедлива рівність: $\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z}_1 \rangle$. Отже, згідно з твердженням 1, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$. Таким чином, мінлива множина, що задовольняє умови 1,2 теореми 2 — єдина.

Б. Використовуючи рівності (15) та (13), для довільних $\mathfrak{l}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$ $(\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]),\ \mathfrak{m} = (\beta, U_\beta[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]),\ \mathfrak{p} = (\gamma, U_\gamma[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\gamma])$ (де $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$)) отримуємо:

$$\langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{m} \rangle \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A = \mathfrak{U}_{\gamma,\beta} \mathfrak{U}_{\beta,\alpha} A = \mathfrak{U}_{\gamma,\alpha} A = \langle \mathfrak{p} \leftarrow \mathfrak{l} \rangle A \quad (A \subseteq \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}))\,.$$

Отже, згідно [14, теорема 5.1] або [13, theorem 11.1], мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою. $\square$

Означення 10. *Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$. Мінливу множину $\mathcal{Z}$, що задовольняє умови 1,2 теореми 2 будемо називати* ***(еволюційним) мультиобразом*** *базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно еволюційного мультипроектора $\mathfrak{P}$, і будемо позначати її через $\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$:*

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}] := \mathcal{Z}.$$

Безпосередньо з теорем 2 та 1, враховуючи властивість 2(2) та зауваження 2, випливають наступні властивості мультиобразу базової мінливої множини.

Властивості 6. *Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ — еволюційний мультипроектор для базової мінливої множини $\mathcal{B}$ і $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\,[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$. Тоді:*

1. *$\mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.*
2. *$\mathcal{I}nd\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{A}$.*
3. *Для довільної області сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$ справедливі рівності:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= U_\alpha\,(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})) = \{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}\,;\\
\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) &= \{\mathsf{bs}\,(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\}\,;\\
\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{T}_\alpha; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha.
\end{aligned}$$

4. *Нехай, $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, де $\alpha \in \mathcal{A}$. Якщо $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ і $\mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}\,(\widetilde{\omega}_2)$, то $\widetilde{\omega}_1$ і $\widetilde{\omega}_2$ є об'єднані долею в $\mathfrak{l}$ тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в $\mathcal{B}$ елементарно-часові стани $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ такі, що $\widetilde{\omega}_1 = U_\alpha\,(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U_\alpha\,(\omega_2)$.*

Нехай, $\mathcal{B}$ — довільна базова мінлива множина, X — довільна множина, що містить $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ ($\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq X$). Нагадаємо [15, приклад 3.2], [13, example 10.2] що довільна множина бієкцій $\mathbb{U}$, заданих на $\mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$:

$$U : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X \quad (U \in \mathbb{U}) \tag{16}$$

називається ***трансформуючою множиною бієкцій*** відносно базової мінливої множини $\mathcal{B}$ на X.

Нехай, $\mathbb{U}$ — трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на X. Тоді, за означенням 7, кожне відображення $U \in \mathbb{U}$ породжує еволюційний проектор, $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right)$, де $U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ — звуження відображення U на множину $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times X$ (надалі, коли не виникає непорозумінь, будемо відображення $U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}$ ототожнювати з відображенням U при такому ототожнення можна вважати, що $\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U_{\restriction \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})}\right) = (\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U))$. Отже, множина

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}\left[\mathbb{U}\right] = \left\{ (\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), X, U) \mid U \in \mathbb{U} \right\}$$

є еволюційним мультипроектором для $\mathcal{B}$. У цьому частинному випадку отримуємо мінливу множину:

$$\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}_{\mathcal{B}}\left[\mathbb{U}\right], \mathcal{B}\right],$$

тобто багатоликий образ базової мінливої множини $\mathcal{B}$ відносно трансформуючої множини бієкцій $\mathbb{U}$ в сенсі [13, 15].

З пункту Б теореми 2 випливає, що мінливі множини типу $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right]$ та $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}\right)$ є чітко видимими. Отже, отримуємо наступний наслідок з теореми 2:

Наслідок 1. *Якщо* $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}, \mathcal{B}\right]$, *де* $\mathfrak{P} = \left((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$, *то для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta\left[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta\right]) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{Z}\right)$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *справедлива рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{Z} \rangle\, \omega = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right) \quad \left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})\right)\right).$$

6.3. Теорема про мультиобраз для кінематичних множин

Означення 11.

1. *Упорядковану п'ятірку* $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, k)$ *будемо називати бієктивним* ***кінематичним проектором*** *для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$, *якщо:*

   1.1. $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ *бієктивним еволюційним проектором для* $\mathcal{B}$.

   1.2. $\mathfrak{Q}$ *— координатний простір.*

   1.3. k *— відображення з* $\mathcal{X}$ *в* $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

2. *Довільну індексовану сім'ю* $\mathfrak{P} = \left((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}\right)$ *бієктивних кінематичних проекторів для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *будемо називати* ***кінематичним мультипроектором*** *для* $\mathcal{B}$.

Зауваження 11. Враховуючи, що надалі розглядатимуться лише бієктивні кінематичні проектори, замість терміну "бієктивний кінематичний проектор" будемо використовувати термін "кінематичний проектор".

Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — довільний кінематичний мультипроектор для $\mathcal{B}$. Покладемо:

$$\mathfrak{P}^{[e]} := ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}).$$

За означеннями 11 та 9, $\mathfrak{P}^{[e]}$ є еволюційним мультипроектором для $\mathcal{B}$.

Теорема 3. *Нехай,* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *— кінематичний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$. *Тоді:*
А) *Існує, причому єдина, кінематична множина* $\mathfrak{C}$, *що задовольняє такі умови:*

1. $\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right]$.
2. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, *де* $\alpha \in \mathcal{A}$ *виконуються рівності:*

$$\textbf{2.1)}\ \mathsf{BG}(\mathfrak{l}) = \mathfrak{Q}_\alpha; \qquad \textbf{2.2)}\ \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})).$$

Б) *Кінематична множина* $\mathfrak{C}$, *що задовольняє умови 1,2 є чітко видимою.*

Доведення. Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ — кінематичний мультипроектор для $\mathcal{B}$.
А) Покладемо:

$$\mathcal{Z} := \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right].$$

Тоді, за теоремою 2:

$$\mathcal{L}k(\mathcal{Z}) = \{(\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Зафіксуємо довільну область сприймання $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{Z})$, де $\alpha \in \mathcal{A}$. Покладемо:

$$\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})} := \mathfrak{Q}_\alpha.$$

П'ятірка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha)$ є кінематичним проектором, а отже, за означенням 11, трійка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) = ((\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha), \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)$ є еволюційним проектором для $\mathcal{B}$. Тому, за означенням еволюційного проектора (означення 7), U_α є відображенням виду $U_\alpha : \mathbb{Bs}(\mathcal{B}) \mapsto \mathbf{T}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$. Отже, за властивістю 6(3), отримуємо:

$$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}\,(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\} \subseteq \mathcal{X}_\alpha.$$

Для довільного $x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ покладемо:

$$k^{(\mathfrak{l})}(x) := k_\alpha(x).$$

За означенням кінематичного проектора (означення 11) k_α є відображенням з $\mathcal{X}_\alpha$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\alpha) = \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})}\right)$. Отже, $k^{(\mathfrak{l})}$ — відображення з $\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$ в $\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})}\right)$.

Враховуючи довільність області сприймання $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})$, за означенням 4 (пункт 2), отримуємо, що пара

$$\mathfrak{C} = \left(\mathcal{Z},\ \left(\left(\mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})},\ k^{(\mathfrak{l})}\right) \mid \mathfrak{l} \in \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z})\right)\right) \tag{17}$$

є кінематичною множиною. При цьому, враховуючи систему позначень, прийняту в підрозділі 3.2.2, отримуємо:

$$\mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z} = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathcal{B}\right],$$

і для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha\,[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$, де $\alpha \in \mathcal{A}$ маємо:

$$\begin{aligned} \mathsf{BG}(\mathfrak{l}) &= \mathfrak{Q}^{(\mathfrak{l})} = \mathfrak{Q}_\alpha; \\ \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x) &= k^{(\mathfrak{l})}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})). \end{aligned}$$

Отже, кінематична множина $\mathfrak{C}$ задовольняє умови 1,2 пункту **A)** теореми 3.

Доведемо, що кінематична множина $\mathfrak{C}$, що задовольняє умови 1,2 пункту **A)** теореми 3 єдина. Припустимо, що кінематична множина $\mathfrak{C}_1$ також задовольняє умови 1,2 пункту **A)** теореми 3. Тоді, за умовою 1, $\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z} = \mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}_1)$. Отже,

$$\mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k\,(\mathcal{Z}) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1)\,,$$

причому, для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C}_1)$ маємо:

$$\langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C} \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{Z} \rangle = \langle \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathfrak{C}_1 \rangle\,.$$

Далі, за умовою 2, для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \mathcal{L}k(\mathfrak{C}_1)$ отримуємо:

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}) = \mathfrak{Q}_\alpha = \mathsf{BG}(\mathfrak{l};\, \mathfrak{C}_1)\,;$$
$$\mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x,\, \mathfrak{C}) = k_\alpha(x) = \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x,\, \mathfrak{C}_1) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))\,.$$

Звідси, за твердженням 4, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1$.

Б) Оскільки мінлива множина $\mathcal{Z}$ є чітко видимою, то кінематична множина $\mathfrak{C}$, що задається формулою (17) також, за пунктом г) підрозділу 3.2.2, є чітко видимою. □

Означення 12. *Нехай,* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *— кінематичний мультипроектор для базової мінливої множини* $\mathcal{B}$*. Кінематичну множину* $\mathfrak{C}$*, що задовольняє умови 1,2 теореми 3 будемо називати* ***кінематичним мультиобразом*** *базової мінливої множини* $\mathcal{B}$ *відносно кінематичного мультипроектора* $\mathfrak{P}$*, і будемо позначати її через* $\mathfrak{Kim}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$*:*

$$\mathfrak{Kim}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}] := \mathfrak{C}.$$

Використовуючи властивості 6, наслідок 1 та теорему 3, отримуємо наступні властивості кінематичного мультиобразу базової мінливої множини.

Властивості 7. *Нехай* $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, k_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$*, де* $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ *— кінематичний мультипроектор для* $\mathcal{B}$ *і* $\mathfrak{C} = \mathfrak{Kim}[\mathfrak{P}, \mathcal{B}]$*. Тоді:*

1. $\mathcal{L}k(\mathfrak{C}) = \{(\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.
2. $\mathcal{I}nd(\mathfrak{C}) = \mathcal{A}$.
3. *Для довільної системи відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ *справедливі рівності:*

$$\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{Bs}(\mathcal{B})) = \{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}\,;$$
$$\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) = \{\mathsf{bs}(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}\,;$$
$$\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) = \mathbb{T}_\alpha; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha;$$
$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathfrak{l})) = \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha)\,;$$
$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l}) = \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha)\,;$$
$$\mathfrak{q}_\mathfrak{l}(x) = k_\alpha(x) \quad (x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}));$$
$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega) = (\mathsf{tm}(\omega), \mathfrak{q}_\mathfrak{l}(\mathsf{bs}(\omega))) = (\mathsf{tm}(\omega), k_\alpha(\mathsf{bs}(\omega))) \quad (\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}))\,.$$

4. *Нехай,* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, *де* $\alpha \in \mathcal{A}$. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_2)$, *то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = U_\alpha(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U_\alpha(\omega_2)$.

5. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathfrak{C})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *справедлива рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathfrak{C} \rangle\, \omega = U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right) \quad (\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}))).$$

6.4. Теорема про мультиобраз для універсальних кінематик

Означення 13. *1. Упорядковану п'ятірку* $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U, \mathfrak{Q}, \mathcal{K})$, *де* $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ *— лінійно упорядкована множина, будемо називати* ***універсальним кінематичним проектором*** *для базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$, *якщо:*

1.1) $(\mathbb{T}, \mathcal{X}, U)$ *є еволюційним проектором для* $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$.

1.2) $\mathfrak{Q}$ *— координатний простір.*

1.3) $\mathcal{K}$ *— бієкція з* $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ *на* $\mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ $\left(\mathcal{K} : \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right) \leftrightarrow \mathbf{T} \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})\right)$.

1.4) *Для довільних* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ *з умови* $\mathsf{bs}(U(\omega_1)) = \mathsf{bs}(U(\omega_2))$ *випливає рівність* $\mathsf{bs}\left(\mathcal{K}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \rangle}(\omega_1)\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \rangle}(\omega_2)\right)\right)$.

1.5) *Для довільного* $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ *справедлива рівність:*

$$\mathsf{tm}(U(\omega)) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}\left(\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \rangle}(\omega)\right)\right).$$

2. *Довільну індексовану сім'ю* $((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ *(де* $\mathcal{A} \neq \emptyset$*) універсальних кінематичних проекторів для базової кінематичної множини* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ *будемо називати* ***універсальним кінематичним мультипроектором*** *для* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$.

Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Тоді, за означенням 13, індексована сім'я:

$$\mathfrak{P}^{[e]} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$$

є еволюційним мультипроектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$.

Теорема 4. *Для довільного універсального кінематичного мультипроектора $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ існує, причому єдина, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ така, що:*

1. $\mathbb{BE}(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right)$.

2. *Для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ і для будь-якого елементарно-часового стану $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ справедливі рівності:*

$$\begin{aligned}\mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) &= \mathfrak{Q}_\alpha;\\ \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l} \rangle}(\omega, \mathcal{F}) &= \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}} \right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right).\end{aligned}$$

3. *Для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ і для довільного елемента $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ справедлива рівність:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\, \mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right).$$

Доведення. Нехай, $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A}$ — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Зафіксуємо довільний індекс $\alpha \in \mathcal{A}$. За означенням 13, трійка $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha)$ є еволюційним проектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$. Отже, за означенням еволюційного проектора (означення 7), U_α є відображенням з множини $\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в множину $\mathbf{T}_\alpha \times \mathcal{X}_\alpha$. Покладемо:

$$\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha := \left\{\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right) \mid \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\}.$$

Тоді:

$$\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha \subseteq \mathcal{X}_\alpha.$$

Для довільного $x = \mathsf{bs}\,(U_\alpha(\omega)) \in \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$, де $\omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ покладемо:

$$\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha(x) := \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\rangle}(\omega)\right)\right).$$

З умови 1.4) означення 13 випливає, що відображення $\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha$ визначено коректно.

Оскільки, за означенням 13, $\mathcal{K}_\alpha$ є відображенням з $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ в $\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\alpha)$, то $\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha$ є відображенням з $\widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$ в $\mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\alpha)$. Продовжимо довільним чином відображення $\widetilde{\mathbf{k}}_\alpha$ до відображення $\mathbf{k}_\alpha : \mathcal{X}_\alpha \mapsto \mathbf{Zk}\,(\mathfrak{Q}_\alpha)$. Враховуючи довільність індексу $\alpha \in \mathcal{A}$, отримуємо індексовану сім'ю:

$$\mathfrak{P}^{[k]} := ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathbf{k}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A}).$$

За означенням 11, $\mathfrak{P}^{[k]}$ є кінематичним мультипроектором для базової мінливої множини $\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$. Покладемо:

$$\mathfrak{C} := \mathfrak{Kim}\left[\mathfrak{P}^{[k]},\, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right].$$

Оскільки $\left(\mathfrak{P}^{[k]}\right)^{[e]} = \mathfrak{P}^{[e]}$, то, за теоремою 3:

$$\mathbb{BE}\,(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right]. \tag{18}$$

Розглянемо довільну систему відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\,(\mathfrak{C})$. За теоремою 3:

$$\mathsf{BG}\,(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}) = \mathfrak{Q}_\alpha. \tag{19}$$

За теоремою 1,

$$\begin{aligned}\mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = \mathbb{Bs}\left(U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) = U_\alpha\left(\mathbb{Bs}\left(\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right)\right) = \\ = U_\alpha\left(\mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \left\{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Отже, згідно з властивістю 2(2) та зауваженням 4:

$$\begin{aligned}\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) &= \{\mathsf{bs}\,(\widetilde{\omega}) \mid \widetilde{\omega} \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})\} = \\ &= \left\{\mathsf{bs}\,(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right\} = \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha.\end{aligned}$$

Звідси, за теоремою 3, для довільного елементарного стану $x = \mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right) \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = \widetilde{\mathcal{X}}_\alpha$, де $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$, отримуємо, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x, \mathfrak{C}\right) = \mathbf{k}_\alpha(x) = \widetilde{\mathbf{k}}_\alpha(x) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)\right)\right)$, тобто:

$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right), \mathfrak{C}\right) = \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)\right)\right) \quad \left(\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right). \tag{20}$$

Оскільки, за означенням 13, пункт 2, $(\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha)$ є універсальним кінематичним проектором для $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$, то, за означенням 13, пункт 1.5):

$$\mathsf{tm}\left(U_\alpha(\omega)\right) = \mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)\right)\right), \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right).$$

Отже, з рівності (20) для $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(U_\alpha(\omega), \mathfrak{C}\right) = \left(\mathsf{tm}\left(U_\alpha(\omega)\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(U_\alpha(\omega)\right), \mathfrak{C}\right)\right) = \\ &= \left(\mathsf{tm}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)\right)\right), \mathsf{bs}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)\right)\right)\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}(\omega)\right). \end{aligned}$$

Звідси:

$$\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right), \ \omega \in U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}). \tag{21}$$

Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$, згідно властивостями 7, мамо:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{T}_\alpha; \\ \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) &= \mathbf{T}_\alpha; \\ \mathbf{Zk}(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}) &= \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right); \\ \mathbb{M}k(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}) &= \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right). \end{aligned} \tag{22}$$

Для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ покладемо:

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) := \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right), \quad \mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right). \tag{23}$$

Оскільки, за означенням 13, пункт 1.3), $\mathcal{K}_\alpha$ є бієкцією між $\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)$ і $\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$, то відображення $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є бієкцією між $\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ і $\mathbb{M}k(\mathfrak{m})$ (для довільних систем відліку $\mathfrak{l}, \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$. Доведемо, що сім'я бієкцій $\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mid \mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right)$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$.

Використовуючи властивість 7(5) і формулу (21), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і довільного $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathfrak{C}\right) &= \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(\langle!\,\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathfrak{C}\rangle\,\omega;\,\mathfrak{C}\right) = \mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{m}\rangle}\left(U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) = \\
&= \mathcal{K}_\beta\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\beta^{[-1]}\left(U_\beta\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right)\right)\right) = \\
&= \mathcal{K}_\beta\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) = \\
&= \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}\left(\mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right)\right)\right) = \\
&= \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathfrak{C}\right)\right)\right) = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\left(\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathfrak{C}\right)\right).
\end{aligned}$$

Отже, за означенням 5, пункт 2, $\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}$ є універсальним перетворенням координат з системи відліку $\mathfrak{l}$ в систему відліку $\mathfrak{m}$ (для довільних систем відліку $\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$). З формули (23) випливає, що для будь-яких $\mathfrak{l},\mathfrak{m},\mathfrak{p}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)$ і $\mathrm{w}\in\mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ виконуються рівності:

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{l},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathrm{w} \quad \text{і} \quad \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{m}}\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w})\right) = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{p},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}).$$

Тому, за означенням 5, пункт 4, сім'я відображень $\left(\widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}} \mid \mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right)\right)$ є універсальним перетворенням координат для кінематичної множини $\mathfrak{C}$. Покладемо:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\mathcal{Q}} &:= \left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}; \\
\mathcal{F} &:= \left(\mathfrak{C},\overleftarrow{\mathcal{Q}}\right) = \left(\mathfrak{C},\,\left(\widetilde{Q}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}\right)_{\mathfrak{l},\mathfrak{m}\in\mathcal{L}k(\mathfrak{C})}\right).
\end{aligned}$$

За означенням 6, $\mathcal{F}$ є універсальною кінематикою. Згідно із системою позначень, введеною в підрозділі 5.2. і формулою (18):

$$\begin{aligned}
&\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathbb{BE}(\mathfrak{C}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left[\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right]; \\
&\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathfrak{C}\right).
\end{aligned}$$

При цьому, використовуючи формули (19), (21), (22), (23), для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right)$ отримуємо:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathcal{F}\right) = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l}, \mathfrak{C}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha\,;\\
&\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathcal{F}\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega, \mathfrak{C}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right)\\
&\qquad\qquad\left(\forall\,\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l}) = U_\alpha\left(\mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right)\right);\\
&\left[\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathcal{F}\right]\mathrm{w} = \widetilde{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{m},\mathfrak{l}}(\mathrm{w}) = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right)\\
&\qquad\qquad\left(\forall\,\mathrm{w}\in\mathbb{M}k(\mathfrak{l},\mathcal{F}) = \mathbb{M}k(\mathfrak{l},\mathfrak{C}) = \mathbf{T}_\alpha\times\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{Q}_\alpha\right)\right).
\end{aligned}
$$

Отже, універсальна кінематика $\mathcal{F}$ задовольняє умови 1–3 даної теореми.

Доведемо, що кінематика $\mathcal{F}$, яка задовольняє умови 1–3 даної теореми — єдина. Припустимо, що універсальна кінематика $\mathcal{F}_1$ також задовольняє умови 1–3 даної теореми. Тоді, в силу першої умови, $\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right) = \mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right)$. Отже, в силу системи позначень, прийнятої у підрозділі 5.2.1 отримуємо:

$$
\mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right)\right) = \mathcal{L}k\left(\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right)\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right); \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}\right\rangle &= \left\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}\right)\right\rangle =\\
&= \left\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\,\mathbb{BE}\left(\mathcal{F}_1\right)\right\rangle = \left\langle\mathfrak{m}\leftarrow\mathfrak{l},\mathcal{F}_1\right\rangle.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Далі, використовуючи другу умову даної теореми для будь-якої системи відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}\right) = \mathcal{L}k\left(\mathcal{F}_1\right)$ $(\alpha\in\mathcal{A})$ і для будь-якого елементарно-часового стану $\omega\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ маємо:

$$
\mathsf{BG}\left(\mathfrak{l},\mathcal{F}\right) = \mathfrak{Q}_\alpha = \mathsf{BG}\left(\mathfrak{l},\mathcal{F}_1\right); \tag{26}
$$

$$
\mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathcal{F}\right) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega,\mathcal{F}_1\right). \tag{27}
$$

Розглянемо довільний елементарний стан $x\in\mathfrak{Bs}(\mathfrak{l})$. Згідно з зауваженням 6 та з властивістю 2(2), існує елементарно-часовий стан $\omega_x\in\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathfrak{l})$ такий, що $x = \mathsf{bs}\left(\omega_x\right)$. Використовуючи рівності (2) і (27), отримуємо:

$$
\begin{aligned}
\left(\mathsf{tm}\left(\omega_x\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F})\right) &= \left(\mathsf{tm}\left(\omega_x\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(\mathsf{bs}\left(\omega_x\right);\mathcal{F}\right)\right) = \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_x;\mathcal{F}\right) =\\
&= \mathbf{Q}^{\langle \mathfrak{l}\rangle}\left(\omega_x;\mathcal{F}_1\right) = \left(\mathsf{tm}\left(\omega_x\right), \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}\left(x;\mathcal{F}_1\right)\right).
\end{aligned}
$$

Отже:
$$\mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F}) = \mathfrak{q}_{\mathfrak{l}}(x;\mathcal{F}_1) \quad (\forall x \in \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}))\,. \tag{28}$$

Використовуючи третю умову даної теореми для довільних систем відліку $\mathfrak{l} = \left(\alpha, U_\alpha\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\alpha\right]\right) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = \left(\beta, U_\beta\left[\mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right), \mathbb{T}_\beta\right]\right) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\alpha,\beta \in \mathcal{A})$ і для довільного елемента $\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l})$ отримуємо:

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}]\,\mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta\left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w})\right) = [\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}_1]\,\mathrm{w}. \tag{29}$$

Із співвідношень (24), (26), (28), (25), (29), згідно з твердженням 6, отримуємо рівність, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$. □

Означення 14. *Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$ — універсальний кінематичний мультипроектор для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$. Універсальну кінематику $\mathcal{F}$, що задовольняє умови 1,2,3 теореми 4 будемо називати* ***універсальним кінематичним мультиобразом*** *$\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ відносно мультипроектора $\mathfrak{P}$, і будемо її позначати через $\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$:*

$$\mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right] := \mathcal{F}.$$

Властивості 8. *Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ — універсальний кінематичний мультипроектор для $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ і $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$. Тоді:*

1. *$\mathcal{L}k(\mathcal{F}) = \{(\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$.*
2. *$\mathcal{I}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$.*
3. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ справедливі рівності:*
$$\begin{aligned} \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) &= U_\alpha(\mathbb{Bs}(\mathcal{B})) = \{U_\alpha(\omega) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}\,; \\ \mathfrak{Bs}(\mathfrak{l}) &= \{\mathsf{bs}(U_\alpha(\omega)) \mid \omega \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})\}\,; \\ \mathbb{T}\mathbf{m}(\mathfrak{l}) &= \mathbb{T}_\alpha; \quad \mathbf{Tm}(\mathfrak{l}) = \mathbf{T}_\alpha; \end{aligned}$$
4. *Для довільної системи відліку $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha[\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ справедливі рівності:*
$$\mathbf{Zk}(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha)\,; \tag{30}$$
$$\mathbb{M}k(\mathfrak{l};\mathcal{F}) = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}_\alpha)\,; \tag{31}$$
$$\mathbf{Q}^{\langle\mathfrak{l}\rangle}(\omega;\mathcal{F}) = \mathcal{K}_\alpha\left(\mathbf{Q}^{\left\langle\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right\rangle}\left(U_\alpha^{[-1]}(\omega)\right)\right) \qquad (\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}))\,. \tag{32}$$

5. *Нехай,* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, *де* $\alpha \in \mathcal{A}$. *Якщо* $\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2 \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l})$ *і* $\mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_1) \neq \mathsf{tm}(\widetilde{\omega}_2)$, *то* $\widetilde{\omega}_1$ *і* $\widetilde{\omega}_2$ *є об'єднані долею в* $\mathfrak{l}$ *тоді і тільки тоді, коли існують об'єднані долею в* $\mathcal{B}$ *елементарно-часові стани* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{Bs}(\mathcal{B})$ *такі, що* $\widetilde{\omega}_1 = U_\alpha(\omega_1)$, $\widetilde{\omega}_2 = U_\alpha(\omega_2)$.

6. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *справедлива рівність:*

$$\langle !\, \mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F} \rangle\, \omega = U_\beta \left(U_\alpha^{[-1]}(\omega) \right) \quad (\omega \in \mathbb{Bs}(\mathfrak{l}) = U_\alpha(\mathbb{Bs}(\mathcal{B})))\,;$$

7. *Для довільних систем відліку* $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, $\mathfrak{m} = (\beta, U_\beta [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\beta]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{A})$ *справедлива рівність:*

$$[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l},\, \mathcal{F}]\, \mathrm{w} = \mathcal{K}_\beta \left(\mathcal{K}_\alpha^{[-1]}(\mathrm{w}) \right) \quad (\mathrm{w} \in \mathbb{M}k(\mathfrak{l}; \mathcal{F}))\,.$$

Доведення. Нехай $\mathfrak{P} = ((\mathbb{T}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha, U_\alpha, \mathfrak{Q}_\alpha, \mathcal{K}_\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{A})$, де $\mathbb{T}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha, \leq_\alpha)$ $(\alpha \in \mathcal{A})$ — універсальний кінематичний мультипроектор для $\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}$ і $\mathcal{F} = \mathfrak{Ku}\left[\mathfrak{P}, \mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right]$.

1,2,3,5,6: Згідно з теоремою 4 (пункт 1),

$$\mathbb{BE}(\mathcal{F}) = \mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right).$$

Отже, згідно із прийнятою системою позначень для універсальних кінематик, значення всіх компонент мінливої множини $\mathcal{Z}\mathsf{im}\left(\mathfrak{P}^{[e]}, \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{\mathfrak{b}}\right)\right)$ збігаються із значеннями відповідних компонент універсальної кінематики $\mathcal{F}$. Тому, властивості 8(1,2,3,5,6) випливають з властивостей 6(1-4) та наслідка 1.

4: Нехай, $\mathfrak{l} = (\alpha, U_\alpha [\mathcal{B}, \mathbb{T}_\alpha]) \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$, де $\alpha \in \mathcal{A}$. Згідно з теоремою 4 (пункт 2),

$$\mathsf{BG}(\mathfrak{l}, \mathcal{F}) = \mathfrak{Q}_\alpha. \tag{33}$$

Із прийнятої системи позначень випливає, що для довільної системи відліку $\mathfrak{k} \in \mathcal{L}k(\mathcal{Y})$ довільної кінематичної множини або універсальної кінематики $\mathcal{Y}$ справедлива рівність: $\mathbf{Zk}(\mathfrak{k}, \mathcal{Y}) = \mathbf{Zk}(\mathsf{BG}(\mathfrak{k}, \mathcal{Y}))$. З останньої рівності, враховуючи рівність (33), отримуємо рівність (30). Рівність (31) випливає з рівності (30), властивості 8(3) і означення множини Мінковського. Рівність (32) випливає з теореми 4 (пункт 2).

7: Властивість 8(7) випливає з теореми 4 (пункт 3). □

7. Універсальні кінематики, породжені спеціальною теорією відносності та деякими її узагальненнями

Нехай, $\mathfrak{Q}$ — координатний простір. Довільна базова мінлива множина $\mathcal{B}$ така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ ([1]) породжує базову кінематичну множину:

$$\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})} = \left(\mathcal{B}, \left(\mathfrak{Q}, \mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}\right)\right),$$

де $\mathbb{I}_{\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})}$ — тотожне відображення на $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B})$. Тоді:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) &= \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q});\\
\mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) &= \mathbf{Tm}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) \times \mathbf{Zk}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}); \qquad (34)\\
\mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}}(x) &= x, \quad x \in \mathfrak{Bs}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathfrak{Bs}(\mathcal{B});\\
\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}(\omega) &= \left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,, \mathfrak{q}_{\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}}\left(\mathsf{bs}\,(\omega)\right)\right) =\\
&= \left(\mathsf{tm}\,(\omega)\,, \mathsf{bs}\,(\omega)\right) = \omega, \quad \omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) = \mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}). \qquad (35)
\end{aligned}$$

Нехай, $\mathbb{U}$ — довільна трансформуюча множина бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$.

Твердження 7. *Для довільного відображення* $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$ *упорядкована п'ятірка:*

$$(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbf{U})$$

є універсальним кінематичним проектором для $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}$.

Доведення. Нехай $\mathbf{U} \in \mathbb{U}$. Згідно (16), $\mathbf{U}$ є бієкцією типу, $\mathbf{U} : \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$, де $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Отже, трійка $(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U})$ є еволюційним проектором для базової мінливої множини $\mathcal{B} = \mathsf{BE}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$. При цьому, згідно з (34), $\mathbf{U}$ є бієкцією типу, $\mathbf{U} : \mathbb{M}k\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right) \longleftrightarrow \mathbf{Tm}(\mathcal{B}) \times \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Отже, умови 1.1)–1.3) означення 13 виконані. Перевіримо виконання

[1] Для того, щоб побудувати базову мінливу множину $\mathcal{B}$, що задовольняє умову $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$ достатньо покласти $\mathcal{B} := \mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})$, де $\mathbb{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — довільна лінійно упорядкована множина, $\mathcal{R}$ — система абстрактних траєкторій з $\mathbf{T}$ в $\mathbf{M}$ де $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q})$. Означення базової мінливої множини типу $\mathcal{A}t\,(\mathbb{T}, \mathcal{R})$ можна знайти в [13, 21, 22].

умов 1.4), 1.5). Використовуючи (35) для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$ таких, що $\mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_1\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_2\right)\right)$ і довільного $\omega \in \mathbb{B}\mathfrak{s}\left(\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right)$ отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}\left(\omega_1\right)\right)\right) &= \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_1\right)\right) = \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\omega_2\right)\right) = \\ &= \mathsf{bs}\left(\mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}\left(\omega_2\right)\right)\right); \\ \mathsf{tm}\left(\mathbf{U}(\omega)\right) &= \mathsf{tm}\left(\mathbf{U}\left(\mathbf{Q}^{\left\langle \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right\rangle}\left(\omega\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Отже, умови 1.4), 1.5) означення 13 також виконуються. Твердження доведено. $\square$

Покладемо:

$$\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}} := \left(\left(\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}), \mathbf{Zk}(\mathfrak{Q}), \mathbf{U}, \mathfrak{Q}, \mathbf{U}\right) \mid \mathbf{U} \in \mathbb{U}\right).$$

Згідно з твердженням 7 і означенням 13, $\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}$ є універсальним кінематичним мультипроектором для базової кінематичної множини $\mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}$.

Покладемо:

$$\mathfrak{Ku}\left(\mathbb{U}, \mathcal{B}, \mathfrak{Q}\right) := \mathfrak{Ku}\left[\widehat{\mathbb{U}}_{\mathsf{UK}}, \mathfrak{C}^{(\mathcal{B},\mathfrak{Q})}\right].$$

Нехай, $(\mathfrak{H}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — гільбертовий простір над полем дійсних чисел і $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ — простір лінійних (однорідних) неперервних операторів над $\mathfrak{H}$. Позначимо через $\mathcal{L}^{\times}(\mathfrak{H})$ — простір всіх лінійних неперервних операторів над $\mathfrak{H}$, включаючи неоднорідні, тобто $\mathcal{L}^{\times}(\mathfrak{H}) = \left\{\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]} \mid \mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}), \mathbf{a} \in \mathfrak{H}\right\}$, де $\mathbf{A}_{[\mathbf{a}]}x = \mathbf{A}x + \mathbf{a}$, $x \in \mathfrak{H}$. Гільбертовий простір $\mathfrak{H}$ породжує координатний простір $\widehat{\mathfrak{H}} = (\mathfrak{H}, \mathcal{T}_{\mathfrak{H}}, \mathbb{L}_{\mathfrak{H}}, \rho_{\mathfrak{H}}, \|\cdot\|, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, де $\rho_{\mathfrak{H}}$ та $\mathcal{T}_{\mathfrak{H}}$ — метрика та топологія, породжені нормою $\|\cdot\|$ на просторі $\mathfrak{H}$, а $\mathbb{L}_{\mathfrak{H}}$ — природна лінійна структура простору $\mathfrak{H}$. Простором ***Мінковського*** над $\mathfrak{H}$ називається гільбертовий простір $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}, x \in \mathfrak{H}\}$, оснащений скалярним добутком та нормою: $\langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle = \langle \mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \rangle_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = t_1 t_2 + \langle x_1, x_2 \rangle$, $\|\mathrm{w}_1\| = \|\mathrm{w}_1\|_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})} = \left(t_1^2 + \|x_1\|^2\right)^{1/2}$ $(\mathrm{w}_i = (t_i, x_i) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}), i \in \{1, 2\})$ ([10,11]). В просторі $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ виділимо такі підпростори:

$$\mathfrak{H}_0 := \{(t, \mathbf{0}) \mid t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{H}_1 := \{(0, x) \mid x \in \mathfrak{H}\},$$

де $\mathbf{0}$ — нульовий вектор. Тоді, $\mathcal{M}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1$, де $\oplus$ означає ортогональну суму підпросторів. Покладемо: $\mathbf{e}_0 := (1, \mathbf{0}) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Введемо ортопроектори на підпростори $\mathfrak{H}_1$ та $\mathfrak{H}_0$:

$$\mathbf{X}\mathrm{w} = (0,x) \in \mathfrak{H}_1; \quad \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} = (t,\mathbf{0}) = \mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{e}_0 \in \mathfrak{H}_0, \qquad \text{де } \mathcal{T}(\mathrm{w}) = t \quad (\mathrm{w} = (t,x) \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})) . \tag{36}$$

Довільний вектор $V \in \mathfrak{H}_1$ породжує наступні підпростори в просторі $\mathfrak{H}_1$.

$$\mathfrak{H}_1[V] = \mathbf{span}\,\{V\}; \quad \mathfrak{H}_{1\perp}[V] = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_1[V] = \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \langle x, V\rangle = 0\},$$

де $\mathbf{span}\,M$ означає лінійну оболонку множини $M \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Позначимо через $\mathbf{X}_1[V]$ та $\mathbf{X}_1^{\perp}[V]$ ортопроектори в $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ на підпростори $\mathfrak{H}_1[V]$ та $\mathfrak{H}_{1\perp}[V]$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_1[V]\,\mathrm{w} := \begin{cases} \langle V, \mathrm{w}\rangle \left\|V\right\|^{-2} V, & V \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & V = \mathbf{0} \end{cases}, \ \mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H}); \\ &\mathbf{X}_1^{\perp}[V] := \mathbf{X} - \mathbf{X}_1[V] . \end{aligned} \tag{37}$$

Тоді для довільного $V \in \mathfrak{H}_1$ отримуємо рівність:

$$\widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X} = \widehat{\mathbf{T}} + \mathbf{X}_1[V] + \mathbf{X}_1^{\perp}[V] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}, \tag{38}$$

де $\mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$ — тотожний (одиничний) оператор на $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$.

Позначимо через $\mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ множину операторів $\mathbf{S} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$, що мають неперервний обернений оператор $\mathbf{S}^{-1} \in \mathcal{L}^{\times}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. Оператори $\mathbf{S} \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ будемо називати ***операторами перетворення координат***. Нехай, $\mathcal{B}$ — базова мінлива множина така, що $\mathfrak{Bs}(\mathcal{B}) \subseteq \mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$ і $\mathbb{T}\mathbf{m}(\mathcal{B}) = (\mathbb{R}, \leq)$, де $\leq$ — стандартний порядок на полі дійсних чисел $\mathbb{R}$. Тоді $\mathbb{B}\mathfrak{s}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R} \times \mathfrak{H} = \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Довільна множина $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{Pk}(\mathfrak{H})$ є трансформуючою множиною бієкцій відносно $\mathcal{B}$ на $\mathfrak{H} = \mathbf{Zk}\left(\widehat{\mathfrak{H}}\right)$. Покладемо:

$$\mathfrak{Ku}(\mathbb{S}, \mathcal{B}; \mathfrak{H}) := \mathfrak{Ku}\left(\mathbb{S}, \mathcal{B}, \widehat{\mathfrak{H}}\right).$$

Нагадаємо, що оператор $U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ називається ***унітарним*** на $\mathfrak{H}$, якщо існує неперервний обернений оператор $U^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ і $\forall x \in \mathfrak{H}$ $\|Ux\| = \|x\|$. Покладемо:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1) &:= \{U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H}_1) \mid U - \text{унітарний на } \mathfrak{H}_1\}; \\ \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1) &:= \{x \in \mathfrak{H}_1 \mid \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Зафіксуємо будь-які $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, і $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Для довільного вектора $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ покладемо:

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathrm{w} :=$$

$$\begin{cases} \dfrac{\left(s\mathcal{T}(\mathrm{w}) - \frac{\lambda}{c^2}\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle\right)}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{e}_0 + J\left(\dfrac{\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{\sqrt{\left|1-\frac{\lambda^2}{c^2}\right|}}\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda < \infty,\ c < \infty; \\ -\frac{\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle}{c}\mathbf{e}_0 + J\left(c\mathcal{T}(\mathrm{w})\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda = \infty,\ c < \infty; \\ s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + J\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle \mathbf{n}, \mathrm{w}\rangle)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right), & \lambda < \infty,\ c = \infty. \end{cases}$$

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}]\mathrm{w} := \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J](\mathrm{w} + \mathbf{a}). \tag{39}$$

У випадку $c < \infty$ оператори виду $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$ являють собою узагальнені перетворення Лоренца, введені в [10] (а також в роботах [7–9], для випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$). При накладанні додаткових умов $\lambda < c < \infty$, $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $s = 1$ формула (39) еквівалентна формулі (2.28б) з [25, ст. 37], тобто дає класичні перетворення Лоренца для інерційних систем відліку в найбільш загальній формі запису, з довільною орієнтацією осей координат. Крім того, у випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $c < \infty$ клас операторів $\mathfrak{O}_+(\mathfrak{H}, c) = \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J] \mid s = 1,\ \lambda < c\}$ збігається з повною групою Лоренца в сенсі [24] (більш детально про це див. [15]). Оператори виду $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]$ $(\lambda < \infty)$ являють собою перетворення Галілея (неважко довести, що $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] = \lim_{c\to\infty} \mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$, де границя існує у рівномірній операторній топології).

Твердження 8. *Для довільних* $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$, *і* $\mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$ *маємо:*

$$\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}] \in \mathbf{Pk}(\mathfrak{H}).$$

Доведення. Очевидно, що досить довести, що при $c \in (0, \infty]$, $\lambda \in [0, \infty] \setminus \{c\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$ ***оператор*** $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]$ ***має неперервний обернений*** $\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. При $c < \infty$ виділене твердження було доведено в роботі [10].

Отже залишилось розглянути випадок $c = \infty$. Нехай $\lambda \in [0, \infty)$, $s \in \{-1, 1\}$, $J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1)$ і $\mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1)$. Легко перевірити, що $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. Доведемо рівність:

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s, \mathbf{n}, J]\,\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s, J\mathbf{n}, J^{-1}\right] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}. \tag{40}$$

Нехай $\mathrm{w} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Тоді, згідно (39):

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,J\mathbf{n},J^{-1}\right]\mathrm{w} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]\,\widetilde{\mathrm{w}}, \qquad \text{де} \tag{41}$$
$$\widetilde{\mathrm{w}} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,J\mathbf{n},J^{-1}\right]\mathrm{w} = s\mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \\ + J^{-1}\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle)\,J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right).$$

Використовуючи (36) та (37) та враховуючи унітарність оператора J на підпросторі $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathcal{M}(\mathfrak{H})$, маємо:

$$\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) = s\mathcal{T}(\mathrm{w});$$
$$\langle\mathbf{n},\widetilde{\mathrm{w}}\rangle = (\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle)\langle\mathbf{n},\mathbf{n}\rangle + \left\langle\mathbf{n}, J^{-1}\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\rangle = \\ = (\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle) + \left\langle J\mathbf{n},\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right\rangle = (\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle);$$
$$\mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathrm{w}} = (\mathbf{X} - \mathbf{X}_1[\mathbf{n}])\,\widetilde{\mathrm{w}} = \\ = J^{-1}\left((\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle)\,J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) - \langle\mathbf{n},\widetilde{\mathrm{w}}\rangle\,\mathbf{n} = \\ = J^{-1}\left(\langle\mathbf{n},\widetilde{\mathrm{w}}\rangle\,J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) - \langle\mathbf{n},\widetilde{\mathrm{w}}\rangle\,\mathbf{n} = J^{-1}\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}.$$

Звідси, використовуючи (41), (39) та (38) отримуємо:

$$\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]\,\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,J\mathbf{n},J^{-1}\right]\mathrm{w} = \\ = s\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}})\mathbf{e}_0 + J\left((\lambda\mathcal{T}(\widetilde{\mathrm{w}}) - s\langle\mathbf{n},\widetilde{\mathrm{w}}\rangle)\,\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[\mathbf{n}]\,\widetilde{\mathrm{w}}\right) = s\,(s\mathcal{T}(\mathrm{w}))\,\mathbf{e}_0 + \\ + J\left((\lambda\,(s\mathcal{T}(\mathrm{w})) - s\,(\lambda\mathcal{T}(\mathrm{w}) - s\langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle))\,\mathbf{n} + J^{-1}\mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w}\right) = \\ = \mathcal{T}(\mathrm{w})\mathbf{e}_0 + \langle J\mathbf{n},\mathrm{w}\rangle\,J\mathbf{n} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \\ = \widehat{\mathbf{T}}\mathrm{w} + \mathbf{X}_1[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w} + \mathbf{X}_1^{\perp}[J\mathbf{n}]\,\mathrm{w} = \mathrm{w}.$$

Рівність (40) доведено. Застосовуючи рівність (40) до оператора $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,J\mathbf{n},J^{-1}\right]$, отримуємо рівність $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,J\mathbf{n},J^{-1}\right]\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J] = \mathbb{I}_{\mathcal{M}(\mathfrak{H})}$. Отже, $\mathbf{W}_{\lambda,\infty}[s,\mathbf{n},J]^{-1} = \mathbf{W}_{\lambda,\infty}\left[s,J\mathbf{n},J^{-1}\right] \in \mathcal{L}(\mathcal{M}(\mathfrak{H}))$. □

Для $0 < c \leq \infty$ введемо наступні класи лінійних (неоднорідних) операторів:

$$\mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) := \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \mid s \in \{-1,1\},\ \lambda \in [0,\infty]\setminus\{c\}, \\ \mathbf{n} \in \mathbf{B}_1(\mathfrak{H}_1),\ J \in \mathfrak{U}(\mathfrak{H}_1),\ \mathbf{a} \in \mathcal{M}(\mathfrak{H})\};$$
$$\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H},c) := \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid s = 1\};$$
$$\mathfrak{P}(\mathfrak{H},c) := \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s,\mathbf{n},J;\mathbf{a}] \in \mathfrak{PT}(\mathfrak{H},c) \mid \lambda < c\};$$

$$\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c) := \{\mathbf{W}_{\lambda,c}[s, \mathbf{n}, J; \mathbf{a}] \in \mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c) \mid s = 1\}$$

(очевидно, що $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, \infty) = \mathfrak{P}(\mathfrak{H}, \infty)$, $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, \infty) = \mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, \infty)$). Використовуючи введені класи операторів, можна визначити наступні універсальні кінематики:

$$\begin{aligned} \mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H}); \\ \mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Ku}\left(\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H}\right); \\ \mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H}); \\ \mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c) &:= \mathfrak{Ku}(\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c), \mathcal{B}; \mathfrak{H}). \end{aligned}$$

У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $c < \infty$ універсальна кінематика $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ являє собою математично строгу модель кінематики спеціальної теорії відносності в інерційних системах відліку. Універсальна кінематика $\mathfrak{UP}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ побудована на основі загальної групи Лоренца-Пуанкаре, і містить крім звичайних систем відліку "з додатним напрямком часу", які мають зрозумілу фізичну інтерпретацію, також системи відліку з "від'ємним напрямком часу". Універсальні кінематики $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ і $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ містять крім стандартних ("тардіонних") систем відліку також і "тахіонні" системи відліку, які рухаються відносно "тардіонних" систем відліку зі швидкістю більшою за швидкість світла c. У випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$, $c = \infty$ універсальна кінематика $\mathfrak{UP}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \infty) = \mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, \infty)$ являє собою математично строгу модель класичної кінематики Галілея в інерційних системах відліку.

Зауваження 12. З результатів робіт [10,15] випливає, що множини операторів $\mathfrak{P}(\mathfrak{H}, c)$ та $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c)$ утворюють групи операторів над простором $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$ (зокрема у випадку $\dim(\mathfrak{H}) = 3$) група операторів $\mathfrak{P}_+(\mathfrak{H}, c)$ співпадає з класичною групою Пуанкаре в чотиривимірному просторі Мінковського. В той же час, в роботі [11] доведено, що при $c < \infty$ класи операторів $\mathfrak{PT}(\mathfrak{H}, c)$ та $\mathfrak{PT}_+(\mathfrak{H}, c)$ не утворюють групи операторів над $\mathcal{M}(\mathfrak{H})$. Це означає, що побудовані на основі цих класів операторів кінематики типу $\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ та $\mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)$ не задовольняють умовам принципу відносності, оскільки, як легко перевірити, для кінематики $\mathcal{F} \in \{\mathfrak{UPT}_0(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c), \mathfrak{UPT}(\mathfrak{H}, \mathcal{B}, c)\}$ множина універсальних перетворень координат:

$$\mathbb{UP}(\mathfrak{l}) = \{[\mathfrak{m} \leftarrow \mathfrak{l}, \mathcal{F}] \mid \mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})\},$$

що забезпечують перехід від системи відліку $\mathfrak{l} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ до всіх інших систем відліку $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}k(\mathcal{F})$ буде різною для різних систем відліку $\mathfrak{l}$. В той же час, принцип відносності в цих кінематиках порушується лише на надсвітловому діапазоні, оскільки кінематичні множини $\mathfrak{UPT}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ та $\mathfrak{UPT}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ побудовані шляхом "додавання" нових, надсвітлових, систем відліку до кінематичних множин $\mathfrak{UP}_0\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$ та $\mathfrak{UP}\left(\mathfrak{H},\mathcal{B},c\right)$, які задовольняють умовам принципу відносності. Слід зазначити, що принцип відносності є лише одним із експериментально встановлених фактів. Тому, цілком можливо, що цей принцип не виконується при виході за межі світлового бар'єру. Філософським підґрунтям принципу відносності є припущення, що у всьому безмежному Всесвіті діють однакові закони фізики, яке виглядає недостатньо обґрунтованим. Якщо відмовитись від цього припущення, то область Всесвіту, в якій з певною, наперед заданою точністю діють такі ж самі закони, як і в околі нашої сонячної системи може служити цілком природною основою "абсолютної" системи відліку для "наших" законів фізики. Можливість перегляду принципу відносності зараз обговорюється в фізичній літературі (див., наприклад, [6, 26–31]).

Література

[1] *O.-M. P. Bilaniuk, V. K. Deshpande, E. C. G. Sudarshan.* "Meta" Relativity. // American Journal of Physics. **30** (10), (1962), 718.

[2] *O.-M. P. Bilaniuk, E. C. G. Sudarshan.* Particles beyond the Light Barrier. // Physics Today. **22**, (5), (1969), 43–51.

[3] *T. Adam et al., [OPERA Collaboration].* Measurement of the neutrino velocity with the OPERA detector in the CNGS beam. // Preprint: arXiv:1109.4897v2 [hep-ex], (Sep 2011).

[4] *Грушка Я.І.* Критерій існування універсального перетворення координат у кінематичних мінливих множинах. // Буковинський математичний журнал. **2**, (2-3), (2014), 59-71.

[5] *Грушка Я.І.* Перетворення координат у кінематичних мінливих множинах. // Доповіді НАН України. (03), (2015).

[6] *Valentina Baccetti, Kyle Tate, Matt Visser.* Inertial frames without the relativity principle. // Journal of High Energy Physics. **2012**, (5), (2012).

[7] *E. Recami.* Classical Tachyons and Possible Applications. // Riv. Nuovo Cim. **9**, (s. 3, N 6), (1986), 1-178.

[8] *Ricardo S. Vieira.* An Introduction to the Theory of Tachyons. // Preprint: arXiv:1112.4187v2, (2012).

[9] *James M. Hill, Barry J. Cox.* Einstein's special relativity beyond the speed of light. // Proc. of the Royal Society. **468**, (2148), (December 2012), 4174-4192.

[10] *Grushka Ya.I.* Tachyon Generalization for Lorentz Transforms. // Methods of Functional Analysis and Topology. **20**, (2), (2013), P. 127-145.

[11] *Грушка Я.І.* Алгебраїчні властивості тахіонних перетворень Лоренца // Збірник праць Ін-ту математики НАНУ. **10** (2), (2013), 138-169.

[12] *Грушка Я.І.* Мінливі множини та їх властивості. // Доповіді НАНУ. (5), (2012), 12-18.

[13] *Ya.I. Grushka.* Abstract concept of changeable set. // Preprint arXiv:1207.3751v1, (2012).

[14] *Я.І. Грушка.* Видимість у мінливих множинах. // Праці Ін-ту математики НАНУ. – **9**, (2), (2012), 122-145.

[15] *Я.І. Грушка.* Мінливі множини та їх застосування для побудови кінематики тахіонів. // Праці Ін-ту математики НАНУ. **11**, (1), (2014), 192-227.

[16] *S. R. Coleman, S. L. Glashow.* Cosmic ray and neutrino tests of special relativity. // Physics Letters B, **405**, (1997), 249-252. (arXiv: hep-ph/9703240).

[17] *S. R. Coleman, S. L. Glashow.* High-energy tests of Lorentz invariance. // Physical Review D. **59**, (116008), (1999), 249-252. (arXiv: hep-ph/9703240).

[18] *Alessandro Drago, Isabella Masina, Giuseppe Pagliara, and Raffaele Tripiccione.* The Hypothesis of Superluminal Neutrinos: comparing OPERA with other Data. // Europhysics Letters. **97**, (2), (2012) (arXiv:1109.5917 [hep-ph]).

[19] *Helene Gertov.* Lorentz Violations. // Published by University of Southern Denmark. (August, 2012).

[20] *G. Ter-Kazarian.* Extended Lorentz code of a superluminal particle. // Preprint: arXiv:1202.0469 [physics.gen-ph], (2012).

[21] *Я. І. Грушка.* Базові мінливі множини та математичне моделювання еволюції систем. // Укр. мат. журн. **65**, (9), (2013), 1190-1210.

[22] *Я.І. Грушка.* Еволюційні розширення та аналоги операції об'єднання для базових мінливих множин. // Праці Ін-ту математики НАНУ. **11**, (2), (2014).

[23] *Г. Биркгоф*, Теория Решёток. // Москва, "Наука", (1984), 567 с.

[24] *М.А. Наймарк.* Линейные представления группы Лоренца. // УМН. **IX**, (Вып. 4 (62)), (1954), 19-93.

[25] *К. Мёлер.* Теория Относительности. // М.:Атомиздат, (1975), 400 с.

[26] *Valentina Baccetti, Kyle Tate, and Matt Visser.* Lorentz violating kinematics: Threshold theorems. // Journal of High Energy Physics. **2012**, (3), (March 2012).

[27] *Valentina Baccetti, Kyle Tate, and Matt Visser.* Inertial frames without the relativity principle: breaking Lorentz symmetry. // Preprint: arXiv:1302.5989, (2013).

[28] *Eolo Di Casola.* Sieving the Landscape of Gravity Theories. // Thesis submitted for the degree of Ph.D. SISSA, (2014).

[29] *S. Liberati.* Tests of Lorentz invariance: a 2013 update. // Class. Quant. Grav. **30**, (13), (2013), 133001 (arXiv: 1304.5795 [gr-qc]).

[30] *Gao shan.* How to realize quantum superluminal communication. // Preprint: arXiv:quant-ph/9906116v2, (8 Jul 1999).

[31] *A. L. Kholmetskii, Oleg V. Missevitch, Roman Smirnov Rueda, T. Yarman.* The special relativity principle and superluminal velocities. // Physics essays. **25**, (4), (2012), 621-626.