Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 1, 119–140

УДК 512.552.8

В. В. Зембик

(Ін-т математики НАН України, Київ)

Зображувальний тип нодальних алгебр типу E

vaszem@rambler.ru

We define the representation type (finite, tame, wild) of nodal algebras of type E.

Визначено зображувальний тип (скінченний, ручний, дикий) нодальних алгебр типу E.

Ця стаття є продовженням робіт [1, 3]. У роботі [1] були введені нодальні алгебри і встановлено зображувальні типи (скінченний, ручний, дикий) нодальних алгебр типу A, тобто таких, які отримуються роздуттями і склеюваннями з сагайдаків типу A або $\tilde{\mathrm{A}}$. У статті [3] було встановлено зображувальні типи нодальних алгебр типу D, тобто таких, які отримуються роздуттями і склеюваннями з сагайдаків типу D або $\tilde{\mathrm{D}}$, але не є нодальними алгебрами типу A. У цій роботі ми встановимо зображувальні типи нодальних алгебр типу E, які отримуються роздуттями і склеюваннями з сагайдаків типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$.

1. Нодальні алгебри

Ми фіксуємо алгебраїчно замкнене поле $\mathbf{k}$ і розглядаємо скінченновимірні $\mathbf{k}$-алгебри.

Означення 1. Алгебра A називається *нодальною*, якщо існує спадкова алгебра H з $\operatorname{rad} H = J$, $H \supset A \supset J$ і така, що

1) $\operatorname{rad} A = J$;

2) $\mathrm{length}_A(H \otimes_A U) \leqslant 2$ для кожного простого лівого A-модуля U.

Будемо казати, що нодальна алгебра A *пов'язана зі спадковою алгеброю* H.

Нагадаємо, що алгебра A називається *базовою* [4], якщо її факторалгебра $A/\operatorname{rad} A$ ізоморфна прямому добутку тіл. А оскільки ми розглядаємо алгебри над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{k}$, то в даному випадку $A/\operatorname{rad} A \simeq \mathbf{k}^m$ для деякого m. Відомо [4], що алгебра і її базова алгебра мають однаковий зображувальний тип. У статті [1] встановлено, що якщо алгебра A є нодальною й пов'язана зі спадковою алгеброю H, то й її базова алгебра є нодальною й пов'язаною зі спадковою алгеброю, яка є Моріта-еквівалентною до H. Отже, надалі ми обмежимося розглядом лише базових нодальних алгебр.

Відомо [1, 2], що кожна базова нодальна алгебра A ізоморфна алгебрі, яка отримується із базової спадкової алгебри H із сагайдаком Q за допомогою деякої послідовності склеювань і роздуттів вершин цього сагайдака.

Нагадаємо, що склеювання вершин i та j сагайдака Q називають *неістотним*, якщо не існує стрілок, які входять у вершину i (відповідно, виходять із вершини i) та стрілок, які виходять із вершини j (відповідно, входять у вершину j). У статті [1] доведено, що такі склеювання не впливають на зображувальний тип алгебри A.

2. Нодальні алгебри типу E

Тут ми розглядатимемо окремий клас нодальних алгебр, які будемо називати нодальними алгебрами типу E.

Означення 2. Нодальна алгебра A, яка пов'язана зі спадковою алгеброю H, де $H \simeq \mathbf{k}Q$ і Q — сагайдак Динкіна типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$, зветься *нодальною алгеброю типу E*.

Нагадаємо, що до сагайдаків Динкіна типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$ належать графи

$$
\mathrm{E}_6: \quad
\begin{tikzcd}[arrows=-]
 & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}
$$

$$\mathrm{E}_7: \quad \begin{tikzcd}[arrows=dash] & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{E}_8: \quad \begin{tikzcd}[arrows=dash] & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_6: \quad \begin{tikzcd}[arrows=dash] & & 6' \arrow[d, "\theta"] & & \\ & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_7: \quad \begin{tikzcd}[arrows=dash] & & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 7' \arrow[r, "\sigma"] & 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{\mathrm{E}}_8: \quad \begin{tikzcd}[arrows=dash] & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8 \arrow[r, "\mu"] & 8' \end{tikzcd}$$

з довільною орієнтацією ребер. В подальшому ми весь час користуватимемося позначеннями вершин і стрілок, які присутні на цих діаграмах.

Наступні теореми описують зображувальні типи нодальних алгебр типу E. При цьому напрям стрілок, не вказаний явно на малюнках, є довільним і не впливає на зображувальний тип.

Теорема 1. *Нехай нодальна алгебра A є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу* E *деякими неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій:*

1) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку* E_6 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

2) склеюванням вершин 1 *і* 5 *у сагайдаку* E_6 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

3) склеюванням вершин 2 *і* 7 *у сагайдаку* E_7 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7
\end{tikzcd}$$

4) склеюванням вершин 3 *і* 7 *у сагайдаку* E_7 *при умові, що якщо у вершину 7 стрілка* π *входить, то з вершини 3 обовязково якісь дві стілки виходять;*

5) склеюванням вершин 3 *і* 8 *у сагайдаку* E_8 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & & & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8
\end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & & & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8
\end{tikzcd}$$

Тоді A має скінченний зображувальний тип.

Теорема 2. *Нехай нодальна алгебра A є ізоморфною або антиізоморфною до алгебри, яка одержана з сагайдака типу E деякими неістотними склеюваннями та однією з наступних операцій:*

1) склеюванням вершин 1 *і* 3 *у сагайдаку* E_7 *вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

2) склеюванням вершин 1 *і* 5 *у сагайдаку* E_7 *вигляду*

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, dash, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

3) склеюванням вершин 2 *і* 4 *у сагайдаку* E_6

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

4) склеюванням вершин 2 *і* 5 *у сагайдаку* E_6

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, dash, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

5) склеюванням вершин 2 *і* 8 *у сагайдаку* E_8 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, dash, "\gamma"'] \arrow[r, dash, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8
\end{tikzcd}$$

6) склеюванням вершин 3 *і* 7 *у сагайдаку* $\tilde{E}_7$ *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & & 4 & & & \\
7' \arrow[r, dash, "\sigma"] & 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7
\end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd}
 & & & 4 & & & \\
7' \arrow[r, dash, "\sigma"] & 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, leftarrow, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, leftarrow, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7
\end{tikzcd}$$

7) склеюванням вершин 3 *і* 8 *у сагайдаку* E_8 *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, leftarrow, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, "\eta"] & 8
\end{tikzcd}$$

8) склеюванням вершин 3 *і* $8'$ *у сагайдаку* $\tilde{E}_8$ *вигляду*

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & & & & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, dash, "\eta"] & 8 \arrow[r, "\mu"] & 8'
\end{tikzcd}$$

або

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 & & & & & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, leftarrow, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, leftarrow, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, dash, "\pi"] & 7 \arrow[r, dash, "\eta"] & 8 \arrow[r, "\mu"] & 8'
\end{tikzcd}$$

Тоді A є ручною, нескінченного зображувального типу.

Теорема 3. *Якщо нодальна алгебра A типу E, не є ані ізоморфною, ані антиізоморфною до алгебри, яка підпадає під випадки, описані в теоремах 1 і 2, то вона є дикою.*

3. Доведення теорем

Будемо доводити теореми 1 – 3 одночасно. Легко бачити, що будь-яке роздуття вершин в довільному сагайдаку типу E або $\tilde{\mathrm{E}}$ дасть дику задачу. Тому в доведенні ми будемо мати справу лише із операцією склеювання вершин сагайдака.

Зауважимо, що тут ми розглянемо лише деякі випадки склеювання. Інші випадки доводяться аналогічним чином, в деякому сенсі навіть простіше.

I. Склеювання вершин 1 і 3.

В залежності від напряму стрілок, які починаються (закінчуються) у вершинах 1 і 3, тут можливі наступні підвипадки:

1)

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 & & \\ 2 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha\beta = 0, \alpha\delta = 0$.

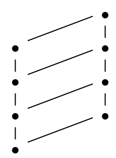
Зведемо $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді рядки і стовпчики матриці β поділяться на 2 частини, причому, із-за умови $\alpha\beta = 0$, останній рядок буде нульовим. Зауважимо також, що при зведенні β нульовий рядок ділиться так же само, як і перший стовпчик. Зведемо β:

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ поділиться на 5 вертикальних частин, з яких 1-ша і 5-та — пов'язані. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cc|cc|cc|cccc} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, матриця δ поділиться на 14 горизонтальних частин, причому, із-за умови $\alpha\delta = 0$, лише перші 8 з них будуть ненульовими. Легко бачити, що додавання ненульових рядків в δ задається частково впорядкованою множиною S вигляду



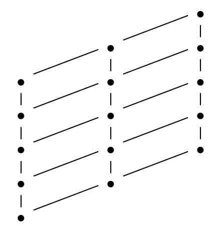
Також δ матиме 2 стовпчики. Згідно [5], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка складається з одного елемента. З робіт [5, 6] випливає, що ця задача має скінченний тип.

Оскільки в цій задачі останньою ми зводили матрицю δ, то неважко зробити висновок, що таке склеювання в сагайдаку E_7 дасть задачу ручного типу, а уже в сагайдаку E_8 — дику.

Важче зробити такий висновок про сагайдак $\tilde{E}_6$. Тут додатково поділяться рядки γ, тобто матриця γ поділиться на 5 вертикальних частин і 2 горизонтальні, і, знову ж таки, вертикальні смуги під номерами 1 і 5 пов'язані. Звівши

$$
\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccccccc|ccc|ccc|ccc|ccccccccc}
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right),
$$

ми бачимо, що матриця δ поділиться на 27 горизонтальних частин, причому, із-за умови $\alpha\delta = 0$, лише перші 15 з них будуть ненульовими. Додавання ненульових рядків в δ задається частково впорядкованою множиною S вигляду



Тут, як і вище, δ також матиме 2 стовпчики. З робіт [5, 6] випливає, що це дика задача.

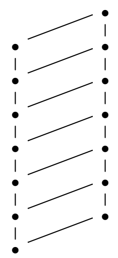
2) (змінили напрям стрілки δ).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 & & \\ 2 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$
зі співвідношенням $\alpha\beta = 0$.

Матриці α, β і γ зводяться так же само, як у випадку 1). Матриця δ поділиться на 14 вертикальних частин, додавання яких задається частково впорядкованою множиною S вигляду



Також δ матиме 2 рядки. Отже, згідно [5], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка складається з одного елемента. З робіт [5, 6] випливає, що ця задача є дикою.

3)(змінили напрям стрілок γ і δ).

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & \\ 2 \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\alpha"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\alpha\beta = 0, \alpha\gamma = 0$.

Ця задача чимось подібна до тієї, яку ми розглядали у випадку 1)(тут також присутні два співвідношення, в які входить α і одне з яких співпадає). Виявляється, що таке склеювання дає аналогічний результат: в E_6 це буде задача скінченного типу, в E_7 — ручного, а в E_8, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ і $\tilde{E}_8$ — вона буде дикою.

4) (змінили напрям стрілки α).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 4 & & \\ 2 \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, dash, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\gamma\alpha = 0, \delta\alpha = 0$.

α, β — "пучок" (Кронекер). Для нього відомо такі нерозкладні зображення:

(1) $\alpha = I$, $\beta = J_\lambda$;

(2) $\alpha = J_0$, $\beta = I$;

(3) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$

$$(4)\ \ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо лише ті зображення, в яких $\alpha = J_0$, $\beta = I$ (довільних розмірів). Якщо матриця $\alpha = J_0$ має розмір $n \times n$, то матриця γ поділиться на n вертикальних частин. Позначимо $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{pmatrix}$, тоді із рівності $\gamma\alpha = 0$ випливає, що $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_{n-1} = 0$, $\gamma_n \neq 0$. Теж саме можна сказати і про δ (зауваживши при цьому, що через ϵ матриця δ ділиться ще за рядками). Виходить, що γ і δ діляться на вертикальні полоси і їх може бути скільки завгодно. При цьому, як відомо, стовпчики, які відповідають клітинам меншого розміру, можна додавати до стовпчиків, які відповідають клітинам більшого розміру. Крім того, після зведення матриці ϵ матриця δ поділиться на дві горизонтальні полоси, одну з яких можна додавати до другої. Отже, ми одержимо задачу про пару частково впорядкованих множин, одна з яких — це $(1, 2)$, а друга — лінійка довільної довжини. Як випливає з [7], це дика задача.

II. Склеювання вершин 2 і 5.

Зауважимо, що напрям стрілки γ ролі не грає, а напрями стрілок α і β можна вибрати довільними. В зележності від напряму стрілок δ і ϵ, тут можливі наступні підвипадки:

1) (δ входить у вершину 5, а ϵ із неї виходить).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[r, bend left, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[l, bend left, "\delta"] \end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\epsilon\alpha = 0, \beta\delta = 0$.

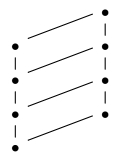
Зведемо $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді стовпчики матриці ϵ поділяться на 2 частини, причому, із-за умови $\epsilon\alpha = 0$, перший стовпчик буде нульовим. Після зведення $\epsilon \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, рядки матриці δ поділяться на 3 частини. Зведемо δ:

$$\delta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Відповідно, матриця γ поділиться на 4 вертикальні частини. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, матриця β поділиться на 8 горизонтальних частин. Легко бачити, що додавання рядків в δ задається частково впорядкованою множиною S вигляду



Також β матиме 9 стовпчиків, причому, враховуючи умову $\beta\delta = 0$, лише 3 із них будуть ненульовими. Додавання цих стовчиків задається лінійно впорядкованою множиною. Згідно [5], наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка є лінійно впорядкованою і має 2 елементи. З робіт [5, 6] випливає, що ця задача ручна (нескінченного типу).

Неважко зробити висновок, що вже у сагайдаку E_7 таке склеювання дасть дику задачу (при появі нової стрілки, яка не входить у співвідношення, додатково поділяться рядки і стовпчики в δ і, відповідно, більше рядків і ненульових стовпчиків стане в β, яку ми зводили останньою).

Розглянемо ще випадок склеювання вершин 2 і 5 в сагайдаку $\tilde{E}_6$:

$$\begin{tikzcd}
& & 6' & & \\
& & 4 \arrow[u, "\theta"] & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6
\end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
& 6 & & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 5 \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & 3 \arrow[l, bend right, "\delta"'] \arrow[r, "\gamma"] & 4 \arrow[r, "\theta"] & 6'
\end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\beta\delta = 0, \epsilon\alpha = 0.$

Ця задача також дика (див. склеювання вершин 2 і 4 у сагайдаку $\tilde{E}_6$ — якщо перепозначити деякі стрілки, то наша задача ідентична вищевказаній).

2) (δ і ϵ входять у вершину 5).

$$\begin{tikzcd}
& & 4 & & \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 & 6 \arrow[l, "\epsilon"']
\end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
& 6 \arrow[d, "\epsilon"'] & 4 \\
1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, bend left, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[l, bend left, "\delta"]
\end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\beta\epsilon = 0, \beta\delta = 0.$

Зведемо $\alpha \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді рядки матриці ϵ поділяться на 2 частини. Зведемо ϵ:

$$\epsilon \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

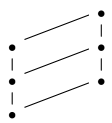
Відповідно, стовпчики матриці ϵ поділяться на 4 частини, причому, із-за умови $\beta\epsilon = 0$, перший і третій стовпчики будуть нульовими. Зведемо β:

$$\beta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

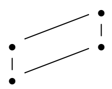
А значить, матриця γ поділиться на 3 вертикальні частини. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отже, матриця δ поділиться на 6 вертикальних частин. Неважко бачити, що додавання стовпчиків в δ задається частково впорядкованою множиною S_1 вигляду



Також δ матиме 8 рядків, причому, враховуючи умову $\beta\delta = 0$, лише 4 із них будуть ненульовими. Додавання цих рядків задається частково впорядкованою множиною S_2 вигляду



Отже, наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S_1 та S_2. Як відомо, ця задача — дика.

3) (δ і ϵ виходять з вершини 5).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[u, "\epsilon"'] \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\epsilon\alpha = 0, \delta\alpha = 0$.

А це є дикий сагайдак (тут немає співвідношень на стрілки β, δ і ϵ між собою). А отже, наша задача — дика.

4) (δ виходить з вершини 5, а ϵ входить в неї).

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] & 5 \arrow[l, "\delta"'] & 6 \arrow[l, "\epsilon"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & 6 \arrow[d, "\epsilon"'] & 4 \\ 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[r, bend left, "\beta"] \arrow[r, bend right, "\delta"'] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\delta\alpha = 0, \beta\epsilon = 0$.

А це є дикий сагайдак (тут немає співвідношень на стрілки β, δ і γ між собою). А отже, наша задача — дика.

III. Склеювання вершин 3 і 6 у сагайдаку E_7.

Очевидно, що якщо стрілки δ і ϵ одночасно входять у вершину 5 (або виходять із неї), то ми автоматично отримаємо дикий сагайдак. Тому ми можемо зафіксувати напрям цих стрілок, вважаючи, наприклад, що δ входить у вершину 5, а ϵ із неї виходить. В залежності від напряму інших стрілок, які починаються(закінчуються) у вершинах 3 і 6 (β, γ і π), тут можливі наступні підвипадки:

1)

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 & 7 \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd}
 & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\
1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 6 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\
 & & 7 \arrow[u, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

зі співвідношеннями $\begin{array}{l} \delta\epsilon = 0, \delta\pi = 0, \\ \beta\pi = 0, \beta\epsilon = 0. \end{array}$

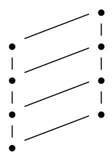
Зведемо $\epsilon \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, тоді рядки і стовпчики матриці δ поділяться на 2 частини, причому, із-за умови $\delta\epsilon = 0$, перший стовпчик буде нульовим. Зауважимо також, що при зведенні δ нульовий стовчик поділиться так же само, як і другий рядок. Зведемо δ:

$$\delta \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

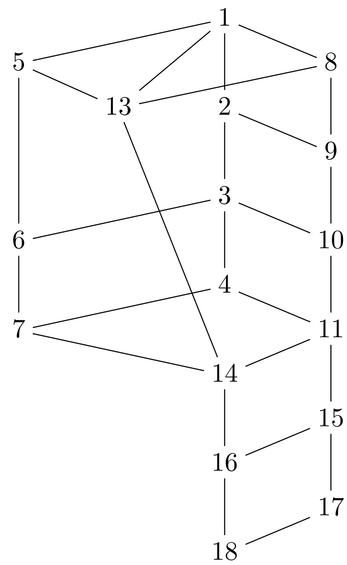
Відповідно, матриця γ поділиться на 5 горизонтальних частин, причому 1-ша і 5-та частини пов'язані. Зведемо γ:

$$\gamma \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Тоді матриця π також поділиться на 14 горизонтальних частин, причому внаслідок умови $\delta\pi = 0$ останні 6 рядків будуть нульовими. Зауважимо також, що в цій матриці 4 перші і 4 останні рядки пов'язані. Додавання ненульових рядків тут задається частково впорядкованою множиною вигляду:



При зведенні матриці π, вона поділиться на 44 горизонтальні частини. Отже, в кінцевому рахунку матриця β буде мати 2 горизонтальні частини і 44 вертикальних. Враховуючи умови $\beta\pi = 0$ і $\beta\epsilon = 0$, лише 18 стовпчиків у β будуть ненульовими. Пронумерувавши їх справа наліво від 1 до 18, неважко зробити висновок, що додавання цих стовпчиків задається частково впорядкованою множиною S вигляду:



З [5] випливає, що наша задача рівносильна задачі про зображення частково впорядкованої множини, яка є кардинальною сумою S та множини, яка складається з одного елемента. З робіт [5, 6] випливає, що ця задача дика.

2)

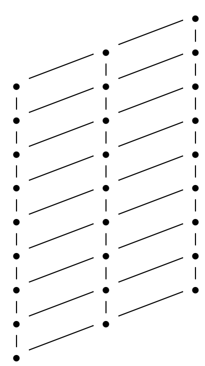
$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 & 7 \arrow[l, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & & 4 & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 6 \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\ & & 7 \arrow[u, "\pi"] & \end{tikzcd}$$

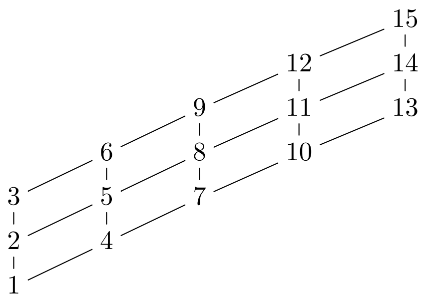
зі співвідношеннями
$$\delta\epsilon = 0, \delta\pi = 0,$$
$$\gamma\pi = 0, \gamma\epsilon = 0.$$

Аналогічно до попереднього випадку, спочатку зведемо матриці ϵ і δ. Після цього матриця β поділиться на 5 горизонтальних частин (1-ша і 5-та з них пов'язані) та 2 вертикальні. Після зведення кожен з рядків в β поділиться на 3, причому пов'язані (1-й і 5-й рядки) ще додатково поділяться, тобто в кінцевому рахунку β матиме 27 рядків, додавання яких задається частково впорядкованою множиною вигляду:



Тоді матриця γ розіб'ється на 27 стовпчиків із такими ж додаваннями. Враховуючи умову $\gamma\epsilon = 0$, перші 12 стовпчиків в γ будуть нульовими.

Тобто, залишається 15 ненульових стовпчиків. Пронумеруємо їх зліва направо від 1 до 15. Зазаначимо, що додавання цих стовпчиків керується частково впорядкованою множиною вигляду:



Розглянемо зображення, в яких γ має наступний вигляд (де ненульові смуги — лише $6, 9, 11$ і 13):

$$\gamma = \left(\begin{array}{c|c|cc|cc} I & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & I & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & I \end{array} \right).$$

Тоді, з умови $\gamma\pi = 0$ випливає, що π має вигляд

$$\pi = \left(\begin{array}{c} -A_1 \\ \hline -A_1 - A_2 \\ \hline A_2 \\ B \\ \hline A_1 \\ -B \end{array} \right),$$

де матриці (A_1, A_2) утворюють пучок і ніяких додавань між A_1, A_2 та B немає. А це є відома дика задача — зображення сагайдака:

$$\begin{tikzcd} \cdot & \cdot \arrow[l, bend right, "a_1"'] \arrow[l, bend left, "a_2"] \arrow[r, "b"] & \cdot \end{tikzcd}$$

3)

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 3 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & & 4 \arrow[d, "\gamma"] & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 & 6 \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, bend left, "\delta"] \arrow[d, "\pi"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\ & & 7 & \end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\delta\epsilon = 0, \beta\epsilon = 0, \pi\gamma = 0.$

4)

$$\begin{tikzcd} & & 4 & & & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\delta"] & 5 \arrow[r, "\epsilon"] & 6 \arrow[r, "\pi"] & 7 \end{tikzcd}$$

В результаті отримаємо сагайдак вигляду

$$\begin{tikzcd} & & 4 & \\ 1 \arrow[r, dash, "\alpha"] & 2 \arrow[r, "\beta"] & 6 \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, bend left, "\delta"] \arrow[d, "\pi"] & 5 \arrow[l, bend left, "\epsilon"] \\ & & 7 & \end{tikzcd}$$ зі співвідношеннями $\delta\epsilon = 0, \gamma\epsilon = 0, \pi\beta = 0.$

Ми не будемо приводити доведення для останніх двох підвипадків, лише зазначимо, що воно подібне доведенню для підвипадків 1 і 2. Враховуючи, що тут на одне співвідношення менше, задача не може бути «кращою» за дві вищерозглянуті, а тому вона також дика.

Цим завершується доведення теорем 1–3.

Література

[1] *Drozd Y. A., Zembyk V. V.* Representations of nodal algebras of type A // Algebra Discrete Math. – 2013. – 15, № 2. – P. 179–200.

[2] *Зембик В. В.* Будова скінченновимірних нодальних алгебр // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, № 3. – С. 415–419.

[3] *Дрозд Ю. А., Зембик В. В.* Зображувальний тип нодальних алгебр типу D // Укр. мат. журн. – 2014. – 66, № 7. – С. 930–938.

[4] *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры. – К.: Вища школа, 1980.

[5] *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Записки науч. семин. ЛОМИ. – 1972. – 28. – С. 32–41.

[6] *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1975. – 39. – С. 963–991.

[7] *Kleiner M. M.* Pairs of partially ordered sets of tame representation type // Linear Algebra Appl. – 1988. – 104. – P. 103–115.