Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 2, 230–249

УДК 517.956.4

В. А. Літовченко, О. Б. Васько

(Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича, Чернівці)

Граничні значення гладких розв'язків вироджених параболічних систем типу Колмогорова

VladLit4@mail.ru, LeNastasiy@ukr.net

For vector-order degenerate parabolic systems of the Kolmogorov-type, we describe the sets of generalized functions, like Gevrey distributions, that are boundary values on the initial hyperplane of ordinary solutions to the systems, with the solutions belonging to L. Schwartz's and Gelfand and Shilov's spaces.

Для вироджених параболічних систем типу Колмогорова векторного порядку описано сукупності узагальнених функцій типу розподілів Жевре, які є граничними значеннями на початковій гіперплощині звичайних розв'язків систем за умови, що розв'язки належать просторам Л. Шварца та Гельфанда і Шилова.

У [1] означено клас $\mathbb{SE}^t_{\overrightarrow{2b}}$ вироджених $\overrightarrow{2b}$–параболічних систем типу Колмогорова вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}\right)u(t;x) = \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})u(t;x), \qquad (t;x) \in \Pi^n_{(0;T]}, \tag{1}$$

де $u := \mathrm{col}(u_1; \ldots; u_m)$, $m \in \mathbb{N}$, натуральні числа n_1, n_2 і n_3 такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$, $n := n_1 + n_2 + n_3$; просторова змінна $x = (x_1; x_2; x_3)$, $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$, а $\Pi^n_{(0;T]} := \{(t;x) : t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^n\}$. Матричний диференціальний вираз правої частини системи (1) має структуру

$$\mathbb{A}(t;\partial_{x_1}) := \Big(a_{lj}(t; i\partial_{x_1})\Big)_{l,j=1}^{m},$$

де

$$a_{lj}(t; i\partial_{x_1}) :=$$
$$:= a_0^{lj}(t) \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+ = 1} a_{k_1}(i\partial_{x_1})^{k_1} + \sum_{|k_1/\overrightarrow{2b}|_+ < 1} a_{k_1}^{lj}(t)(i\partial_{x_1})^{k_1},$$

у якій

$$|k_1/\overrightarrow{2b}|_+ = \frac{k_{11}}{2b_{11}} + \ldots + \frac{k_{1n_1}}{2b_{1n_1}},$$

а коефіцієнти $a_0^{lj}(\cdot), a_{k_1}^{lj}(\cdot)$ і a_{k_1} – неперервні на $[0;T]$ комплекснозначні функції такі, що відповідний диференціальний вираз $\partial_t - \mathbb{A}(t;\partial_{x_1})$ є $\overrightarrow{2b}$-параболічним на множині $\Pi^{n_1}_{[0;T]}$ [2]. Для таких систем тут побудовано фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші (ФМРЗК) $G(t,x;\tau;\xi)$ та досліджено її основні властивості в рамках просторів типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є [3], зокрема, при $0 \le \tau < t \le T$ і $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$ встановлено оцінки

$$\begin{aligned} \left|\partial_x^q \partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi)\right| \le c A^{|q|_+} q^{q\overrightarrow{\beta}^*} B^{|l|_+} l^{l\overrightarrow{\beta}^*} \times \\ \times (t-\tau)^{-M-M_{lq}} \exp\{-\delta d(t-\tau;x;\xi)\},\ \{q,l\} \subset \mathbb{Z}^n_+, \end{aligned} \tag{2}$$

з додатними оціночними сталими c, A, B і δ, незалежними від

t, τ, x, ξ, q і l. Тут використовуються такі позначення:

$$q^{q\overrightarrow{\gamma}} := q_1^{q_1\gamma_1}\ldots q_n^{q_n\gamma_n},\ q\in\mathbb{Z}_+^n;\quad |\xi|_+ := |\xi_1|+\ldots+|\xi_n|,\ \xi\in\mathbb{R}^n;$$

$$d(t;x;\xi) := \sum_{r=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_r}\left(|X_{rj}(t)-\xi_{rj}|t^{1-r-\frac{1}{2b_j}}\right)^{\alpha_j},$$

$$t>0,\quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n,\quad \alpha_j := \frac{2b_j}{2b_j-1},\quad j\in\mathbb{N}_{n_1} := \{1;\ldots;n_1\};$$

$$X(t) := (X_1(t);X_2(t);X_3(t)) =$$

$$= (x_1; x_2+t\widehat{x}_1; x_3+tx_2'+2^{-1}t^2x_1'), t\geq 0,$$

$$x=(x_1;x_2;x_3)\in\mathbb{R}^n,\quad x_j' := (x_{j1};\ldots;x_{jn_3}),\quad \hat{x}_1 := (x_{11};\ldots;x_{1n_2});$$

$$M := \left|\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right|_+ + \left|\left(\widehat{\overrightarrow{1}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}\right)\right|_+ + \left|\left(\overrightarrow{2}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right)'\right|_+,$$

$$M_{lq} := \left|(l_1+q_1)/\overrightarrow{2b}\right|_+ + \left|\left(\widehat{\overrightarrow{1}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}\right)(l_2+q_2)\right|_+ +$$

$$+\left|\left(\overrightarrow{2}+\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}\right)'(l_3+q_3)\right|_+,\ \{l,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n,\ \overrightarrow{2b} := (2b_1;\ldots;2b_{n_1}),$$

$$\overrightarrow{1} = (1;\ldots;1),\ \overrightarrow{2} = (2;\ldots;2);\ \overrightarrow{\beta}^* := \left(\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}, \widehat{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}}, (\overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b})'\right),$$

при цьому, якщо $\mho$ — деяке відношення, то запис $\overrightarrow{\alpha}\mho\overrightarrow{\beta}$ означатиме, що це відношення виконується для всіх відповідних координат векторів $\overrightarrow{\alpha}$ і $\overrightarrow{\beta}$.

Одержані властивості матриці G дозволили в [4] установити коректну розв'язність задачі Коші для (1) у випадку, коли початкові дані f є узагальненими функціями з простору $(\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*})'$, $\overrightarrow{\alpha}^* := \overrightarrow{1} - \overrightarrow{\beta}^*$ (тут $(\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}})'$ – топологічно спряжений простір з векторним простором $\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}}^{\overrightarrow{\beta}}$ Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є.), при цьому вектор-функція $u(t;x) =< f, G(t,x;0,\cdot) >$, $(t;x)\in\Pi_{(0;T]}^n$, є звичайним нескінченно диференційовним за змінною x розв'язком системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u(t;x)_{|t=0} = f \tag{3}$$

у сенсі слабкої збіжності в просторі $(\mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*})'$.

У даній роботі в рамках простору $(\mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*})'$ описуються класи узагальнених початкових даних, з якими розв'язок відповідної задачі Коші для (1) є елементом простору $\mathbb{S}$ Л.Шварца або того чи іншого простору типу $\mathbb{S}$.

Про мотивації до вивчення вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова та про перші дослідження систем таких рівнянь див., наприклад, у [1, 2].

Далі, доведемо таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Для кожного $t \in (0;T]$ існують додатні сталі c, A, D і δ такі, що для всіх $\{k,q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ і $\{x,\sigma\} \subset \mathbb{R}^n$ справджується оцінка*

$$\left|F_{\xi\to\sigma}\left[\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\right](t;x;\sigma)\right| \le$$
$$\le cA^{|k|_+}D^{|q|_+}k^{k\overrightarrow{\beta}^*}q^{q\overrightarrow{\alpha}^*}\mathrm{e}^{-\delta|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}},$$

у якій

$$\mathfrak{L}_t^q(x;\xi) := (x_1-\xi_1)^{q_1}(x_2-\xi_2+t\widehat{\xi_1})^{q_2}\left(x_3-\xi_3+t\xi_2'-\frac{t^2}{2}\xi_1'\right)^{q_3}.$$

Доведення. Безпосередньо з означення перетворення Фур'є та оцінки (2), для довільного $m \in \mathbb{Z}_+^n$ інтегруванням частинами одержуємо

$$\left|F_{\xi\to\sigma}\left[\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\right](t;x;\sigma)\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\sigma^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\partial_\xi^m \mathrm{e}^{i(\xi,\sigma)}\right)\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)d\xi\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{\sigma^m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\mathrm{e}^{i(\xi,\sigma)}\partial_\xi^m\left\{\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\right\}d\xi\right| \le$$
$$\le \frac{1}{|\sigma|^m}\sum_{|l|_+=0}^{|m|_+}C_m^l\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_\xi^l\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\right|\left|\partial_\xi^{m-l}\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\right|d\xi \le$$

$$\leq \frac{c}{|\sigma|^m} A^{|k|_+} k^{k \overrightarrow{\beta}^*} \times$$

$$\times \sum_{|l|_+=0}^{|m|_+} C_m^l B^{|m-l|_+} (m-l)^{(m-l)\overrightarrow{\beta}^*} \varphi_{m-l,k}(t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \partial_\xi^l \mathfrak{L}_t^q(x;\xi) \right| \times$$

$$\times \exp\Big\{ -\delta \Big(\sum_{j=1}^{n_1} \Big(t^{-\frac{1}{2b_j}} |x_{1j} - \xi_{1j}| \Big)^{\alpha_j} + \sum_{j=1}^{n_2} \Big(t^{-1-\frac{1}{2b_j}} |x_{2j} - \xi_{2j} + t\xi_{1j}| \Big)^{\alpha_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n_3} \Big(t^{-2-\frac{1}{2b_j}} \Big| x_{3j} - \xi_{3j} + t\xi_{2j} - \frac{t^2}{2}\xi_{1j} \Big| \Big)^{\alpha_j} \Big) \Big\} d\xi, \tag{4}$$

де

$$\varphi_{m-l,k}(t) := t^{-\left|(m_1 - l_1 + k_1)/\overrightarrow{2b} + \overrightarrow{1}\right|_+ - \left|(\widehat{\overrightarrow{1} + \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b}})(m_2 - l_2 + k_2 + \widehat{\overrightarrow{1}})\right|_+} \times$$

$$\times t^{-\left|(\overrightarrow{2} + \overrightarrow{1}/\overrightarrow{2b})'(m_3 - l_3 + k_3 + \overrightarrow{1}')\right|_+}.$$

Зазначимо, що

$$\left| \partial_\xi^l \mathfrak{L}_t^q(x;\xi) \right| =$$

$$= \left| \partial_{\xi_1}^{l_1} \partial_{\xi_2}^{l_2} \partial_{\xi_3}^{l_3} \Big((x_1 - \xi_1)^{q_1} (x_2 - \xi_2 + t\widehat{\xi_1})^{q_2} (x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1')^{q_3} \Big) \right| =$$

$$= \left| \partial_{\xi_1}^{l_1} \Big((x_1 - \xi_1)^{q_1} \partial_{\xi_2}^{l_2} \Big((x_2 - \xi_2 + t\widehat{\xi_1})^{q_2} \Big(\partial_{\xi_3}^{l_3} \Big(x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1' \Big)^{q_3} \Big) \Big) \Big) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|\widehat{r}_1|_+=0}^{|\widehat{l}_1|_+} C_{\widehat{l}_1}^{\widehat{r}_1} \left| \partial_{\widehat{\xi}_1}^{\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1} \partial_{\xi_1'''}^{l_1'''} \big((x_1 - \xi_1)^{q_1} \big) \right| \left| \partial_{\widehat{\xi}_1}^{\widehat{r}_1} \partial_{\xi_2}^{l_2} \Big((x_2 - \xi_2 + t\widehat{\xi_1})^{q_2} \times \right.$$

$$\left. \times \Big(\partial_{\xi_3}^{l_3} \Big(x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1' \Big)^{q_3} \Big) \Big) \right|,$$

причому

$$\left| \partial_{\widehat{\xi}_1}^{\widehat{r}_1} \partial_{\xi_2}^{l_2} \Big((x_2 - \xi_2 + t\widehat{\xi_1})^{q_2} \Big(\partial_{\xi_3}^{l_3} \Big(x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1' \Big)^{q_3} \Big) \Big) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu_1'=0}^{r_1'} C_{r_1'}^{\nu_1'} \sum_{\nu_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{\nu_2'} \Big| \partial_{\xi_2'}^{l_2'-\nu_2'} \partial_{\xi_2''}^{l_2''} \partial_{\xi_1'}^{r_1'-\nu_1'} \partial_{\xi_1''}^{r_1''} \Big((x_2 - \xi_2 + t\widehat{\xi_1})^{q_2} \Big) \Big| \times$$

$$\times \Big| \partial_{\xi_2'}^{\nu_2'} \partial_{\xi_1'}^{\nu_1'} \partial_{\xi_3}^{l_3} (x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1')^{q_3} \Big| \leq$$

$$\leq \sum_{\nu_1'=0}^{r_1'} C_{r_1'}^{\nu_1'} \sum_{\nu_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{\nu_2'} \Big| \partial_{\xi_2'}^{l_2'-\nu_2'} \partial_{\xi_1'}^{r_1'-\nu_1'} (x_2' - \xi_2' + t\xi_1')^{q_2'} \Big| \times$$

$$\times \Big| \partial_{\xi_2''}^{l_2''} \partial_{\xi_1''}^{r_1''} (x_2'' - \xi_2'' + t\xi_1'')^{q_2''} \Big| \times$$

$$\times \Big| \partial_{\xi_2'}^{\nu_2'} \partial_{\xi_1'}^{\nu_1'} \partial_{\xi_3}^{l_3} \Big(x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1' \Big)^{q_3} \Big| \leq \sum_{\nu_1'=0}^{r_1'} C_{r_1'}^{\nu_1'} \sum_{\nu_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{\nu_2'} \times$$

$$\times \left(\begin{cases} \frac{t^{|r_1'-\nu_1'|_+} q_2'! |x_2'-\xi_2'+t\xi_1'|^{q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')}}{(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))!}, & q_2' \geq l_2' - \nu_2' + r_1' - \nu_1', \\ 0, & q_2' < l_2' - \nu_2' + r_1' - \nu_1' \end{cases} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{cases} \frac{t^{|r_1''|_+} q_2''!}{(q_2''-(l_2''+r_1''))!} |x_2'' - \xi_2'' + t\xi_1''|^{q_2''-(l_2''+r_1'')}, & q_2'' \geq l_2'' + r_1'', \\ 0, & q_2'' < l_2'' + r_1'' \end{cases} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{cases} \frac{t^{2|\nu_1'|_+ + |\nu_2'|_+} q_3! |x_3-\xi_3+t\xi_2'-\frac{t^2}{2}\xi_1'|^{q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2')}}{(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))!}, & q_3 \geq l_3 + \nu_1' + \nu_2', \\ 0, & q_3 < l_3 + \nu_1' + \nu_2' \end{cases} \right)$$

і

$$\Big| \partial_{\widehat{\xi}_1}^{\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1} \partial_{\xi_1'''}^{l_1'''} \Big((x_1 - \xi_1)^{q_1} \Big) \Big| = \Big| \partial_{\widehat{\xi}_1}^{\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1} (\widehat{x}_1 - \widehat{\xi}_1)^{\widehat{q}_1} \partial_{\xi_1'''}^{l_1'''} (x_1''' - \xi_1''')^{q_1'''} \Big| =$$

$$= \left(\begin{cases} \frac{\widehat{q}_1!}{(\widehat{q}_1-(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1))!} |\widehat{x_1} - \widehat{\xi}_1|^{\widehat{q}_1-(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)}, & \widehat{q}_1 \geq \widehat{l}_1 - \widehat{r}_1, \\ 0, & \widehat{q}_1 < \widehat{l}_1 - \widehat{r}_1 \end{cases} \right) \times$$

$$\times \left(\begin{cases} \frac{q_1'''!}{(q_1'''-l_1'''))!} |x_1''' - \xi_1'''|^{q_1'''-l_1'''}, & q_1''' \geq l_1''', \\ 0, & q_1''' < l_1''' \end{cases} \right).$$

Звідси, урахувавши, що

$$\frac{a!}{(a-b)!} = C_a^b \cdot b! \le 2^{a+b} \cdot b!,\ \{a,b\} \subset \mathbb{Z}_+,\ a \ge b,$$

приходимо до такої оцінки:

$$\left|\partial_\xi^l \mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\right| \le \sum_{|\widehat{r}_1|_+=0}^{|\widehat{l}_1|_+} C_{\widehat{l}_1}^{\widehat{r}_1} \sum_{\nu_1'=0}^{r_1'} C_{r_1'}^{\nu_1'} \sum_{\nu_2'=0}^{l_2'} C_{l_2'}^{\nu_2'} 2^{|q|_+} t^{|\widehat{r}_1|_+ + |\nu_1'|_+ + |\nu_2'|_+} \times$$

$$\times (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1)! l_1'''! (l_1' - \nu_2' + r_1' - \nu_1')! (l_2'' + r_1'')! (l_3 + \nu_1' + \nu_2')! \times$$

$$\times |\widehat{x}_1 - \widehat{\xi}_1|^{\widehat{q}_1 - (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1)} |x_1''' - \xi_1'''|^{q_1''' - l_1'''} |x_2' - \xi_2' + t\xi_1'|^{q_2' - (l_2' - \nu_2' + r_1' - \nu_1')} \times$$

$$\times |x_2'' - \xi_2'' + t\xi_1''|^{q_2'' - (l_2'' + r_1'')} \left| x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1' \right|^{q_3 - (l_3 + \nu_1' + \nu_2')}, \quad (5)$$

при $\widehat{q}_1 \ge \widehat{l}_1 - \widehat{r}_1,\ q_1''' \ge l_1''',\ q_1' \ge l_2' - \nu_2' + r_1' - \nu_1',\ q_2'' \ge l_2'' + r_1''$ та $q_3 \ge l_3 + \nu_1' + \nu_2'$.

Далі, згідно з рівністю

$$\sup_{\rho \ge 0} \{\rho^p \mathrm{e}^{-\delta\rho^\alpha}\} = \left(\frac{p}{\delta\alpha\mathrm{e}}\right)^{\frac{p}{\alpha}},$$

маємо:

$$|\widehat{x}_1 - \widehat{\xi}_1|^{\widehat{q}_1 - (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1)} \mathrm{e}^{-\delta_0 \sum\limits_{j=1}^{n_2} \left(t^{-\frac{1}{2b_j}} |x_{1j} - \xi_{1j}|\right)^{\alpha_j}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n_2} |x_{1j} - \xi_{1j}|^{q_{1j} - (l_{1j} - r_{1j})} \mathrm{e}^{-\left(\delta_0 t^{-\frac{1}{2b_j - 1}}\right) |x_{1j} - \xi_{1j}|^{\alpha_j}} \le$$

$$\le t^{|\overrightarrow{\widehat{\beta^*}}(\widehat{q}_1 - (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1))|_+} (\delta_0 \mathrm{e})^{-|\overrightarrow{\widehat{\alpha^*}}(\widehat{q}_1 - (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1))|_+} \left(\overrightarrow{\widehat{\alpha^*}}(\widehat{q}_1 - (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1))\right)^{\overrightarrow{\widehat{\alpha^*}}(\widehat{q}_1 - (\widehat{l}_1 - \widehat{r}_1))};$$

$$|x_1''' - \xi_1'''|^{q_1''' - l_1'''} \mathrm{e}^{-\delta_0 \sum\limits_{j=n_2+1}^{n_1} \left(t^{-\frac{1}{2b_j}} |x_{1j} - \xi_{1j}|\right)^{\alpha_j}} =$$

$$= \prod_{j=n_2+1}^{n_1} |x_{1j} - \xi_{1j}|^{q_{1j}-l_{1j}} \mathrm{e}^{-\delta_0 t^{-\frac{1}{(2b_j-1)}} |x_{1j}-\xi_{1j}|^{\alpha_j}} \leq$$

$$\leq t^{|\overrightarrow{\beta^*}'''(q_1'''-l_1''')|_+} (\delta_0 \mathrm{e})^{-|\overrightarrow{\alpha^*}'''(q_1'''-l_1''')|_+} (\overrightarrow{\alpha^*}'''(q_1'''-l_1'''))^{\overrightarrow{\alpha^*}'''(q_1'''-l_1''')}; \quad (6)$$

$$|x_2' - \xi_2' + t\xi_1'|^{q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')} \mathrm{e}^{-\delta_0 \sum\limits_{j=1}^{n_3} \left(t^{-1-\frac{1}{2b_j}} |x_{2j}-\xi_{2j}+t\xi_{1j}|\right)^{\alpha_j}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n_3} |x_{2j} - \xi_{2j} + t\xi_{1j}|^{q_{2j}-(l_{2j}-\nu_{2j}+r_{1j}-\nu_{1j})} \mathrm{e}^{-\delta_0 t^{-\frac{2b_j+1}{2b_j-1}} |x_{2j}-\xi_{2j}+t\xi_{1j}|^{\alpha_j}} \leq$$

$$\leq t^{|(\overrightarrow{1}'+\overrightarrow{\beta^*}')(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))|_+} (\delta_0 \mathrm{e})^{-|\overrightarrow{\alpha^*}'(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))|_+} \times$$

$$\times \left(\overrightarrow{\alpha^*}'(q_2' - (l_2' - \nu_2' + r_1' - \nu_1'))\right)^{\overrightarrow{\alpha^*}'(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))};$$

$$|x_2'' - \xi_2'' + t\xi_1''|^{q_2''-(l_2''+r_1'')} \mathrm{e}^{-\delta_0 \sum\limits_{j=n_3+1}^{n_2} \left(t^{-1-\frac{1}{2b_j}} |x_{2j}-\xi_{2j}+t\xi_{1j}|\right)^{\alpha_j}} =$$

$$= \prod_{j=n_3+1}^{n_2} |x_{2j} - \xi_{2j} + t\xi_{1j}|^{q_{2j}-(l_{2j}+r_{1j})} \mathrm{e}^{-\delta_0 t^{-\frac{2b_j+1}{2b_j-1}} |x_{2j}-\xi_{2j}+t\xi_{1j}|^{\alpha_j}} \leq$$

$$\leq t^{|(\overrightarrow{1}''+\overrightarrow{\beta^*}'')(q_2''-(l_2''+r_1''))|_+} (\delta_0 \mathrm{e})^{-|\overrightarrow{\alpha^*}''(q_2''-(l_2''+r_1''))|_+} \times$$

$$\times \left(\overrightarrow{\alpha^*}''(q_2'' - (l_2'' + r_1''))\right)^{\overrightarrow{\alpha^*}''(q_2''-(l_2''+r_1''))};$$

$$\left|x_3 - \xi_3 + t\xi_2' - \frac{t^2}{2}\xi_1'\right|^{q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2')} \times$$

$$\times \mathrm{e}^{-\delta_0 \sum\limits_{j=1}^{n_3} \left(t^{-2-\frac{1}{2b_j}} \left|x_{3j}-\xi_{3j}+t\xi_{2j}-\frac{t^2}{2}\xi_{1j}\right|\right)^{\alpha_j}} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n_3} \left|x_{3j} - \xi_{3j} + t\xi_{2j} - \frac{t^2}{2}\xi_{1j}\right|^{q_{3j}-(l_{3j}+\nu_{1j}+\nu_{2j})} \times$$

$$\times \mathrm{e}^{-\delta_0 t^{-\frac{4b_j+1}{2b_j-1}} \left|x_{3j}-\xi_{3j}+t\xi_{2j}-\frac{t^2}{2}\xi_{1j}\right|^{\alpha_j}} \leq$$

$$\leq t^{|(\overrightarrow{2}'+\overrightarrow{\beta^*}')(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))|_+}(\delta_0 \mathrm{e})^{-|\overrightarrow{\alpha^*}'(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))|_+}\times$$

$$\times\Big(\overrightarrow{\alpha^*}'(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))\Big)^{\overrightarrow{\alpha^*}'(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))}.$$

Зваживши на оцінки (5) і (6), із (4) отримуємо, що

$$\Big|F_{\xi\to\sigma}\Big[\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\Big](t;x,\sigma)\Big| \leq$$

$$\leq cL_t A^{|k|_+}2^{|q|_+}(\overrightarrow{\alpha}^*)^{\overrightarrow{\alpha}^*(q-l)}\times$$

$$\times(\delta_0\mathrm{e})^{-|\overrightarrow{\alpha}_1^*(q_1-l_1)|_+-|\widehat{\overrightarrow{\alpha}^*}(q_2-l_2)|_+-|\overrightarrow{\alpha^*}'(q_3-l_3)|_+}\times$$

$$\times T^{2|l_1|_++|l_2'|_++|\overrightarrow{\beta_1^*}\cdot q_1|_++|(\overrightarrow{1}+\overrightarrow{\beta^*})\cdot q_2|_++|(\overrightarrow{2}'+\overrightarrow{\beta^*}')\cdot q_3|_+}k^{k\overrightarrow{\beta^*}}|\sigma|^{-m}\times$$

$$\times\sum_{|l|_+=0}^{|m|_+}C_m^l B^{|m-l|_+}(m-l)^{(m-l)\overrightarrow{\beta}^*}\varphi_{m-l,k}(t)\sum_{|\widehat{r}_1|_+=0}^{|\widehat{l}_1|_+}C_{\widehat{l}_1}^{\widehat{r}_1}\sum_{|\nu_1'|_+=0}^{|r_1'|_+}C_{r_1'}^{\nu_1'}\times$$

$$\times\sum_{|\nu_2'|_+=0}^{|l_2'|_+}C_{l_2'}^{\nu_2'}\bigg((\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)!\Big(\widehat{q}_1-(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)\Big)^{\widehat{\overrightarrow{\alpha^*}}(\widehat{q}_1-(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1))}\bigg)\times$$

$$\times\bigg(l_1'''!\cdot(q_1'''-l_1''')^{\overrightarrow{\alpha^*}'''(q_1'''-l_1''')}\bigg)\times$$

$$\times\bigg((l_2-\nu_2'+r_1'-\nu_1')!(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))^{\overrightarrow{\alpha^*}'(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))}\bigg)\times$$

$$\times\bigg((l_2''+r_1'')!\cdot(q_2''-(l_2''+r_1''))^{\overrightarrow{\alpha^*}''(q_2''-(l_2''+r_1''))}\bigg)\times$$

$$\times\bigg((l_3+\nu_1'+\nu_2')!\cdot(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))^{\overrightarrow{\alpha^*}'(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))}\bigg),$$

$$t\in(0;T],\ \{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n,\ |\sigma|\neq 0,$$

при $\delta_0\in(0;\delta)$ такому, що $\delta_0\cdot\mathrm{e}<1$. Тут

$$L_t := \int\limits_{\mathbb{R}^n}\exp\bigg\{-(\delta-\delta_0)\bigg(\sum_{j=1}^{n_1}\Big(t^{-\frac{1}{2b_j}}|x_{1j}-\xi_{1j}|\Big)^{\alpha_j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_2}\Big(t^{-1-\frac{1}{2b_j}}|x_{2j}-\xi_{2j}+t\xi_{1j}|\Big)^{\alpha_j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{n_3}\Big(t^{-2-\frac{1}{2b_j}}\Big|x_{3j}-\xi_{3j}+t\xi_{2j}-\frac{t^2}{2}\xi_{1j}\Big|\Big)^{\alpha_j}\Big)\Big\}d\xi.$$

Здійснивши у останньому інтегралі заміну змінних інтегрування згідно з правилом

$$\begin{cases} x_1-\xi_1=y_1,\\ x_2-\xi_2+t\xi_1''=y_2,\\ x_3-\xi_3+t\xi_2'-\frac{t^2}{2}\xi_1'=y_3,\end{cases}$$

одержимо незалежність виразу L_t від змінної x.

При подальшому оцінюванні користуватимемося таким фактом. Нехай $\alpha>0$ і $\{l,p,q\}\subset\mathbb{Z}_+$, причому $q\ge l$, тоді правильною є нерівність

$$l!(q-l)^{(q-l)\alpha}\le q^{q\alpha}l^{l(1-\alpha)}. \tag{7}$$

Дійсно,

$$l!(q-l)^{(q-l)\alpha}\le l^l(q-l)^{(q-l)\alpha}\le l^l q^{(q-l)\alpha}=$$

$$=q^{q\alpha}l^l q^{-l\alpha}\le q^{q\alpha}l^l l^{-l\alpha}=q^{q\alpha}l^{l(1-\alpha)}.$$

Згідно з (7) одержуємо, що

$$(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)!\Big(\widehat{q}_1-(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)\Big)^{\widehat{\overrightarrow{\alpha^*}}(\widehat{q}_1-(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1))}\le \widehat{q}_1^{\widehat{q}_1\widehat{\overrightarrow{\alpha^*}}}(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)^{(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)\widehat{\overrightarrow{\beta^*}}},$$

$$l_1'''!(q_1'''-l_1''')^{\overrightarrow{\alpha^*}'''(q_1'''-l_1''')}\le q_1'''^{q_1'''\overrightarrow{\alpha^*}'''}l_1'''^{l_1'''\overrightarrow{\beta^*}'''},$$

$$(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')!(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))^{\overrightarrow{\alpha^*}(q_2'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))}\le$$

$$\le({q'}_2)^{{q'}_2\overrightarrow{\alpha^*}'}(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')^{(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')\overrightarrow{\beta^*}'},$$

$$(l_2''+r_1'')!\Big(q_2''-(l_2''+r_1'')\Big)^{\overrightarrow{\alpha^*}''(l_2''+r_1'')}\le (q_2'')^{q_2''\overrightarrow{\alpha^*}''}(l_2''+r_1'')^{(l_2''+r_1'')\overrightarrow{\beta^*}''},$$

$$(l_3+\nu_1'+\nu_2')!(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))^{\overrightarrow{\alpha^*}'(q_3-(l_3+\nu_1'+\nu_2'))}\le$$
$$\le q_3^{q_3\overrightarrow{\alpha^*}'}(l_3+\nu_1'+\nu_2')^{(l_3+\nu_1'+\nu_2')\overrightarrow{\beta^*}'}$$

(тут ураховано, що $\overrightarrow{\beta^*}=\overrightarrow{1}-\overrightarrow{\alpha^*}$).

Далі, скориставшись відомою формулою Стірлінга

$$l!\sim\sqrt{2\pi l}\left(\frac{l}{\mathrm{e}}\right)^l,$$

а також, зваживши на те, що

$$(r+k)!=\frac{(r+k)!}{r!k!}r!k!\le 2^{r+k}r!k! \quad (\forall\{r,k\}\subset\mathbb{Z}_+)\,,$$

приходимо до існування такої додатної сталої A_0, що

$$(r+k)^{(r+k)}\le A_0^{r+k}r!k! \quad (\forall\{r,k\}\subset\mathbb{Z}_+)\,.$$

Отже, для вище зазначених величин $\{l,r,\nu\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ маємо:

$$(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)^{(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)}(l_3+\nu_1'+\nu_2')^{(l_3+\nu_1'+\nu_2')}\times$$
$$\times(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')^{(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')}(l_2''+r_1'')^{(l_2''+r_1'')}=$$
$$=(l_3+l_2'+r_1'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))^{(l_3+l_2'+r_1'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))}\times$$
$$\times(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)^{(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)}(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')^{(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')}(l_2''+r_1'')^{(l_2''+r_1'')}\le$$
$$\le(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)^{(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)}(l_3+l_2'+r_1')^{(l_3+l_2'+r_1'-(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1'))}\times$$
$$\times(l_3+l_2'+r_1')^{(l_2'-\nu_2'+r_1'-\nu_1')}(l_2''+r_1'')^{(l_2''+r_1'')}=$$
$$=(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)^{(\widehat{l}_1-\widehat{r}_1)}(l_3+l_2'+r_1')^{(l_3+l_2'+r_1')}(l_2''+r_1'')^{(l_2''+r_1'')}=$$
$$=(l_1'-r_1')^{(l_1'-r_1')}(l_3+l_2'+l_1'-(l_1'-r_1'))^{(l_3+l_2'+l_1'-(l_1'-r_1'))}\times$$
$$\times(l_2''+l_1''-(l_1''-r_1''))^{(l_2''+l_1''-(l_1''-r_1''))}$$

$$\times(l_1''-r_1'')^{(l_1''-r_1'')}\leq$$

$$\leq(l_3+l_2'+l_1')^{(l_1'-r_1')}(l_3+l_2'+l_1')^{(l_3+l_2'+l_1'-(l_1'-r_1'))}\times$$

$$\times(l_2''+l_1'')^{(l_1''-r_1'')}(l_2''+l_1'')^{(l_2''+l_1''-(l_1''-r_1''))}=$$

$$=(l_3+l_2'+l_1')^{(l_3+l_2'+l_1')}(l_2''+l_1'')^{(l_2''+l_1'')}\leq$$

$$\leq A_0^{|l_3+l_2'+l_1'|_++|l_2''+l_1''|_+}l_3!(l_2'+l_1')!\cdot l_2''!\cdot l_1''!\leq$$

$$\leq A_0^{|l_3|_++2|l_2'+l_1'|_++|l_2''+l_1''|_+}l_3!\cdot l_2!\cdot \widehat{l}_1!.$$

Звідси вже приходимо до існування для кожного $t\in(0;T]$ додатних сталих c_1,A_1,B_1 і D_1, з якими для всіх $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $|\sigma|\neq 0$, виконується оцінка

$$\left|F_{\xi\to\sigma}\Big[\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\Big](t;x,\sigma)\right|\leq$$

$$\leq c_1A_1^{|k|_+}B_1^{|m|_+}D_1^{|q|_+}q^{q\overrightarrow{\alpha}^*}k^{k\overrightarrow{\beta}^*}|\sigma|^{-m}\sum_{|l|_+=0}^{|m|_+}C_m^l(m-l)^{(m-l)\overrightarrow{\beta}^*}\times$$

$$\times(l!)^{\overrightarrow{\beta}^*}\left(\sum_{|\widehat{r}_1|_+=0}^{|\widehat{l}_1|_+}C_{\widehat{l}_1}^{\widehat{r}_1}\sum_{|\nu_1'|_+=0}^{|r_1'|_+}C_{r_1'}^{\nu_1'}\sum_{|\nu_2'|_+=0}^{|l_2'|_+}C_{l_2'}^{\nu_2'}\right)\quad\Big(\forall m\in\mathbb{Z}_+^n\Big),$$

яка, з огляду на те, що

$$(m-l)^{(m-l)}\cdot l!\leq m^m$$

і

$$\sum_{|l|_+=0}^{|m|_+}C_m^l\sum_{|\widehat{r}_1|_+=0}^{|\widehat{l}_1|_+}C_{\widehat{l}_1}^{\widehat{r}_1}\sum_{|\nu_1'|_+=0}^{|r_1'|_+}C_{r_1'}^{\nu_1'}\sum_{|\nu_2'|_+=0}^{|l_2'|_+}C_{l_2'}^{\nu_2'}\leq 4^{|m|_+},$$

може бути записана ще і так:

$$\left|F_{\xi\to\sigma}\Big[\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\Big](t;x,\sigma)\right|\leq$$

$$\leq c_1 A_1^{|k|_+} (4B_1)^{|m|_+} D_1^{|q|_+} q^{q\overrightarrow{\alpha}^*} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} m^{m\overrightarrow{\beta}^*} |\sigma|^{-m} \quad (\forall m \in \mathbb{Z}_+^n).$$

Далі, зазначимо, що попередня оцінка виконується для всіх $m \in \mathbb{Z}_+^n$, причому її ліва частина не залежить від m, тоді

$$\left| F_{\xi\to\sigma}\Big[\mathfrak{L}_t^q(x;\xi)\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\Big](t;x,\sigma)\right| \leq$$

$$\leq c_1 A_1^{|k|_+} D_1^{|q|_+} q^{q\overrightarrow{\alpha}^*} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} \left(\prod_{j=1}^{n}\left(\inf_{m_j\in\mathbb{Z}_+}\left\{\left(4B_1\frac{m_j^{\beta_j}}{|\sigma_j|}\right)^{m_j}\right\}\right)\right).$$

Звідси вже, врахувавши, що

$$\inf_{m\geq 0}\Big\{(am^\beta)^m\Big\} = \exp\Big\{-\frac{\beta}{\mathrm{e}a^{1/\beta}}\Big\},$$

приходимо до твердження вихідної леми.

Лема доведена.

Далі, розглянемо клас $\widehat{S}'$ усіх узагальнених функцій f з $\left(S_{\overrightarrow{\alpha}^*}^{\overrightarrow{\beta}^*}\right)'$ такий, що

$$F[\widehat{S}'] = \Big\{\widetilde{f}(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) |\ \forall k \in \mathbb{Z}_+^n\ \exists \gamma_k \geq 0\ \exists c_k > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\partial_\sigma^k \widetilde{f}(\sigma)| \leq c_k (1 + \|\sigma\|)^{\gamma_k}\Big\}$$

(тут величини γ_k і c_k можуть залежати від функції $\widetilde{f}(\cdot) := F[f](\cdot)$).

Через $\widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha}}$ позначимо клас $\widehat{S}'$ у випадку, коли існує такий вектор $\overrightarrow{\alpha} > \overrightarrow{0}$, що кожна оціночна величина c_k має вигляд

$$c_k = cB^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\alpha}}$$

з відповідними додатними сталими c і B, незалежними від k, і при цьому також не залежить від k величина $\gamma_k \equiv \gamma_0$.

Також символами $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$ і $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'$, $\overrightarrow{\alpha} > \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{\beta} > \overrightarrow{0}$ позначимо відповідно сукупності усіх тих елементів f із $\left(S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}\right)'$ таких, що

$$F\left[\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'\right] = \Bigg\{ \widetilde{f}(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) |\ \forall \delta > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}^n_+\ \exists c_{k,\delta} > 0\ \forall \sigma \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\partial^k_\sigma \widetilde{f}(\sigma)| \leq c_{k,\delta} \mathrm{e}^{\delta |\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}}} \Bigg\}$$

і

$$F\left[\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'\right] =$$

$$= \Bigg\{ \widetilde{f}(\cdot) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) |\ \forall \delta > 0\ \exists c_\delta > 0\ \exists A_\delta > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}^n_+\ \forall \sigma \in \mathbb{R}^n :$$

$$|\partial^k_\sigma \widetilde{f}(\sigma)| \leq c_\delta A_\delta^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\alpha}} \mathrm{e}^{\delta |\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}}} \Bigg\}.$$

Очевидно, що для всіх векторів $\overrightarrow{\alpha_1}$, $\overrightarrow{\alpha_2}$, $\overrightarrow{\beta_1}$ і $\overrightarrow{\beta_2}$ з додатними координатами таких, що $\overrightarrow{\alpha_1} \leq \overrightarrow{\alpha_2}$ і $\overrightarrow{\beta_1} \geq \overrightarrow{\beta_2}$ виконуються наступні співвідношення:

$$\widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha_1}} \subset \widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha_2}} \subset \widehat{S}';\ \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta_1}}\right)' \subset \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta_2}}\right)';\ \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta_1}}_{\overrightarrow{\alpha_1}}\right)' \subset \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta_2}}_{\overrightarrow{\alpha_2}}\right)' \subset \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta_2}}\right)'.$$

Більше того, нехай Φ' — один із класів $\widehat{S}'$ чи $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$, а Ψ' — відповідно $\widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha}}$ або $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'$, тоді

$$S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}} \subset \left\{ \begin{array}{c} S^{\overrightarrow{\beta}} \\ S_{\overrightarrow{\alpha}} \end{array} \right\} \subset S \subset \Phi',\ S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}} \subset S_{\overrightarrow{\alpha}} \subset \Psi'$$

(тут $S_{\overrightarrow{\alpha}}$, $S^{\overrightarrow{\beta}}$ і $S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}$ – простори типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. [3]).

Векторний аналог класів $\widehat{S}', \widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha}}, \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'$ і $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$ позначатимемо відповідно через $\widehat{\mathbb{S}}', \widehat{\mathbb{S}}'_{\overrightarrow{\alpha}}, \left(\widehat{\mathbb{S}}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'$ та $\left(\widehat{\mathbb{S}}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$.

Лема 2. *Кожен елемент класу* $\widehat{S}'$ *є згортувачем у просторі* S. *Якщо ж* f *є елементом класу* $\widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha}}$ *чи* $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$ *або* $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'$ *при* $\overrightarrow{\alpha} > \overrightarrow{0}$ *і* $\overrightarrow{\beta} > \overrightarrow{0}$, *то* f *— згортувач відповідно у просторі* $S_{\overrightarrow{\alpha}}$, $S^{\overrightarrow{\beta}}$ *чи* $S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}$.

Доведення. Згідно з відомим результатом В.М. Борок [5], елемент $f \in \left(S^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}\right)'$ буде згортувачем у просторі S чи одному із просторів типу S, якщо його перетворення Фур'є $F[f]$ є регулярним функціоналом типу функції $\widetilde{f}(\cdot)$, яка є мультиплікатором у просторі $F[S] = S$ чи, відповідно, у $F[S_{\overrightarrow{\alpha}}] = S^{\overrightarrow{\alpha}}$, $F[S^{\overrightarrow{\beta}}] = S_{\overrightarrow{\beta}}$ або $F[S^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}] = S^{\overrightarrow{\alpha}}_{\overrightarrow{\beta}}$.

Отже, необхідно переконатися лише у тому, що $\widetilde{f}(\cdot)$ — мультиплікатор у відповідному двоїстому стосовно перетворення Фур'є просторі $\Phi \in \left\{S, S^{\overrightarrow{\alpha}}, S_{\overrightarrow{\beta}}, S^{\overrightarrow{\alpha}}_{\overrightarrow{\beta}}\right\}$. Проте, як зазначено в [3, 6], умови з означення класів $\widehat{S}', \widehat{S}'_{\overrightarrow{\alpha}}, \left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}\right)'$ і $\left(\widehat{S}^{\overrightarrow{\beta}}_{\overrightarrow{\alpha}}\right)'$, які накладаються на функцію $\widetilde{f}(\cdot)$ і є достатніми для того, щоб $\widetilde{f}(\cdot)$ був мультиплікатором у відповідному просторі Φ.

Лему доведено.

Основний результат цього пункту сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай початкова вектор-функція* $f \in \left(\mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta}^*}_{\overrightarrow{\alpha}^*}\right)'$, *а* u *— відповідний розв'язок задачі Коші* (1), (3). *Тоді якщо:*

а) $f \in \widehat{\mathbb{S}}'$, *то* $u(t;\cdot) \in \mathbb{S}$ *при кожному* $t \in (0;T]$;

б) $f \in \widehat{\mathbb{S}}'_{\overrightarrow{\alpha_0}}$, $\overrightarrow{\alpha_0} \geq \overrightarrow{\alpha^*}$, *то* $u(t;\cdot) \in \mathbb{S}_{\overrightarrow{\alpha_0}}$ *при* $t \in (0;T]$;

в) $f \in \left(\widehat{\mathbb{S}}^{\overrightarrow{\beta_0}}\right)'$, $\overrightarrow{\beta_0} \geq \overrightarrow{\beta}^*$, *то* $u(t;\cdot) \in \mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta}^*}$ *при* $t \in (0;T]$;

г) $f \in \left(\widehat{\mathbb{S}}^{\overrightarrow{\beta_0}}_{\overrightarrow{\alpha_0}}\right)'$, $\overrightarrow{\alpha_0} \geq \overrightarrow{\alpha^*}$, $\overrightarrow{\beta_0} \geq \overrightarrow{\beta^*}$, *то* $u(t;\cdot) \in \mathbb{S}^{\overrightarrow{\beta^*}}_{\overrightarrow{\alpha_0}}$ *при* $t \in (0;T]$.

Доведення. Доведення теореми полягає у встановленні необхідних оцінок виразу $x^q\partial_x^k u(t;x)$ для всіх $x\in\mathbb{R}^n$ і $\{q,k\}\subset\mathbb{Z}_+^n$ при кожному фіксованому $t\in(0;T]$.

Безпосередньо із структури розв'язку u задачі Коші (1), (3), означення перетворення Фур'є узагальненої функції та регулярності функціонала $\widetilde{f}(\cdot)$, одержуємо

$$x^q\partial_x^k u(t;x)=\langle f, x^q\partial_x^k G(t,x;0,\cdot)\rangle=$$

$$=(2\pi)^n\langle\widetilde{f}(\sigma),F_{\xi\to\sigma}\Big[x^q\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\Big](t;x,\sigma)\rangle=$$

$$=(2\pi)^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widetilde{f}(\sigma)F_{\xi\to\sigma}\Big[x^q\partial_x^k G(t,x;0,\xi)\Big](t;x,\sigma)d\sigma.$$

Зазначимо, що

$$x^q=x_1^{q_1}x_2^{q_2}x_3^{q_3}=$$

$$=\Big((x_1-\xi_1)+\xi_1\Big)^{q_1}\Big((x_2-\xi_2+t\widehat{\xi_1})+(\xi_2-t\widehat{\xi_1})\Big)^{q_2}\times$$

$$\times\Big(\Big(x_3-\xi_3+t\widehat{\xi_2}-\frac{t^2}{2}\xi_1''\Big)+\Big(\xi_3-t\xi_2'+\frac{t^2}{2}\xi_1'\Big)\Big)^{q_3}=\sum_{|l_1|_+=0}^{|q_1|_+}C_{q_1}^{l_1}\times$$

$$\times\sum_{|l_2|_+=0}^{|q_2|_+}C_{q_2}^{l_2}\sum_{|l_3|_+=0}^{|q_3|_+}C_{q_3}^{l_3}\xi_1^{l_1}(\xi_2-t\widehat{\xi_1})^{l_2}\Big(\xi_3-t\xi_2'+\frac{t^2}{2}\xi_1'\Big)^{l_3}\mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi)=$$

$$=\sum_{|l_1|_+=0}^{|q_1|_+}C_{q_1}^{l_1}\sum_{|l_2|_+=0}^{|q_2|_+}C_{q_2}^{l_2}\sum_{|l_3|_+=0}^{|q_3|_+}C_{q_3}^{l_3}\sum_{|r_2|_+=0}^{|l_2|_+}C_{l_2}^{r_2}\sum_{|r_3|_+=0}^{|l_3|_+}C_{l_3}^{r_3}(-1)^{|l_2-r_2|_+}\times$$

$$\times 2^{-|l_3-r_3|_+}t^{|l_2-r_2|_++2|l_3-r_3|_+}\times$$

$$\times(\xi_1')^{l_1'+l_2'-r_2'+l_3-r_3}(\xi_1'')^{l_1''+l_2''-r_2''}(\xi_1''')^{l_1'''}(\xi_2)^{r_2}\times$$

$$\times(\xi_3-t\xi_2')^{r_3}\mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi)=\sum_{|l_1|_+=0}^{|q_1|_+}C_{q_1}^{l_1}\sum_{|l_2|_+=0}^{|q_2|_+}C_{q_2}^{l_2}\sum_{|l_3|_+=0}^{|q_3|_+}C_{q_3}^{l_3}\sum_{|r_2|_+=0}^{|l_2|_+}C_{l_2}^{r_2}\times$$

$$\times \sum_{|r_3|_+=0}^{|l_3|_+} C_{l_3}^{r_3} \sum_{|\nu_3|_+=0}^{|r_3|_+} C_{r_3}^{\nu_3} (-1)^{|l_2-r_2|_+ + |r_3-\nu_3|_+} \times$$

$$\times t^{|l_2-r_2|_+ + 2|l_3-r_3|_+ + |r_3-\nu_3|_+} \times$$

$$\times 2^{-|l_3-r_3|_+} (\xi_1')^{l_1'+l_2'-r_2'+l_3-r_3} \times$$

$$\times (\xi_1'')^{l_1''+l_2''-r_2''} (\xi_1''')^{l_1'''} (\xi_2')^{r_2'+r_3-\nu_3} (\xi_2'')^{r_2''} (\xi_3)^{\nu_3} \mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi) \equiv$$

$$\equiv \widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu) (\xi_1')^{l_1'+l_2'-r_2'+l_3-r_3} (\xi_1'')^{l_1''+l_2''-r_2''} (\xi_1''')^{l_1'''} \times$$

$$\times (\xi_2')^{r_2'+r_3-\nu_3} (\xi_2'')^{r_2''} (\xi_3)^{\nu_3} \mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi).$$

Тоді

$$x^q \partial_x^k u(t;x) = (2\pi)^n \widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\sigma) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{i(\xi,\sigma)} \times$$

$$\times (\xi_1')^{l_1'+l_2'-r_2'+l_3-r_3} (\xi_1'')^{l_1''+l_2''-r_2''} (\xi_1''')^{l_1'''} (\xi_2')^{r_2'+r_3-\nu_3} \times$$

$$\times (\xi_2'')^{r_2''} (\xi_3)^{\nu_3} \mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi) \times$$

$$\times \partial_x^k G(t,x;0,\xi) d\xi d\sigma = (2\pi)^n \widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu) (-i)^{|l|_+ + |r_3|_+} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widetilde{f}(\sigma) \widetilde{\partial}_\sigma^{l,r} \left(F_{\xi\to\sigma} \Big[\mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi) \partial_x^k G(t,x;0,\xi) \Big] (t;x,\sigma) \right) d\sigma,$$

де

$$\widetilde{\partial}_\sigma^{l,r,\nu} \cdot := \partial_{\sigma_1'}^{l_1'+l_2'-r_2'+l_3-r_3} \left(\partial_{\sigma_1''}^{l_1''+l_2''-r_2''} \left(\partial_{\sigma_1'''}^{l_1'''} \left(\partial_{\sigma_2'}^{r_2'+r_3-\nu_3} \left(\partial_{\sigma_2''}^{r_2''} (\partial_{\sigma_3}^{\nu_3} \cdot) \right) \right) \right) \right).$$

Звідси, зінтегрувавши частинами останній інтеграл та зваживши на твердження леми 1, приходимо до наступної оцінки:

$$|x^q \partial_x^k u(t;x)| \leq (2\pi)^n \widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu) \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{\partial}_\sigma^{l,r,\nu} \widetilde{f}(\sigma)| \times$$

$$\times \left| F_{\xi\to\sigma} \Big[\mathfrak{L}_t^{q-l}(x;\xi) \partial_x^k G(t,x;0,\xi) \Big] (t;x,\sigma) \right| d\sigma \leq (2\pi)^n c A^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} \times$$

$$\times\widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu)D^{|q-l|_+}(q-l)^{(q-l)\overrightarrow{\alpha}^*}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\widetilde{\partial}_\sigma^{l,r,\nu}\widetilde{f}(\sigma)|\mathrm{e}^{-\delta|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}}d\sigma,$$

яка виконується для всіх $t\in(0;T]$, $x\in\mathbb{R}^n$ і $\{q,k\}\subset\mathbb{Z}_+^n$.

Нехай тепер $f\in\widehat{\mathbb{S}}'$, тоді

$$|x^q\partial_x^k u(t;x)|\leq(2\pi)^n cA^{|k|_+}k^{k\overrightarrow{\beta}^*}\widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu)c_{l,r}D^{|q-l|_+}(q-l)^{(q-l)\overrightarrow{\alpha}^*}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+\|\sigma\|)^{\gamma_k}\mathrm{e}^{-\delta|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}}d\sigma<+\infty,\ t\in(0;T],\ x\in\mathbb{R}^n,\ \{q,k\}\subset\mathbb{Z}_+^n,$$

і, таким чином, виконання твердження а) встановлено.

Якщо $f\in\widehat{\mathbb{S}}'_{\overrightarrow{\alpha_0}}$, $\overrightarrow{\alpha_0}\geq\overrightarrow{\alpha}^*$, то

$$|x^q\partial_x^k u(t;x)|\leq(2\pi)^n cA^{|k|_+}k^{k\overrightarrow{\beta}^*}\widetilde{\Sigma}_t(q,l;r,\nu)D^{|q-l|_+}B^{|l|_+}(q-l)^{(q-l)\overrightarrow{\alpha}^*}\times$$

$$\times l^{l\overrightarrow{\alpha_0}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+\|\sigma\|)^{\gamma_0}\mathrm{e}^{-\delta|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}}d\sigma\leq c_kB_1^{|q|_+}q^{q\overrightarrow{\alpha_0}}\widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu),$$

$$t\in(0;T],\ x\in\mathbb{R}^n,\ \{q,k\}\subset\mathbb{Z}_+^n,$$

де

$$B_1:=\max\{D,B\},\ c_k:=(2\pi)^n cA^{|k|_+}k^{k\overrightarrow{\beta}^*}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(1+\|\sigma\|)^{\gamma_0}\mathrm{e}^{-\delta|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}^*}}d\sigma.$$

Звідси вже, урахувавши, що

$$\widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu)\leq T_0^{2|q|_+}\sum_{|l_1|_+=0}^{|q_1|_+}C_{q_1}^{l_1}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{|l_2|_+=0}^{|q_2|_+}C_{q_2}^{l_2}\sum_{|r_2|_+=0}^{|l_2|_+}C_{l_2}^{r_2}\Bigg)\Bigg(\sum_{|l_3|_+=0}^{|q_3|_+}C_{q_3}^{l_3}\sum_{|r_3|_+=0}^{|l_3|_+}C_{l_3}^{r_3}\sum_{|\nu_3|_+=0}^{|r_3|_+}C_{r_3}^{\nu_3}\Bigg)=$$

$$=T_0^{2|q|_+}2^{|q_1|_+}3^{|q_2|_+}4^{|q_3|_+},\ T_0:=\max\{1,T\},$$

приходимо до твердження б).

У випадку, коли $f \in \left(\widehat{\mathbb{S}}^{\overrightarrow{\beta_0}}\right)'$, $\overrightarrow{\beta_0} \geq \overrightarrow{\beta}^*$, для $\{q, k\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ маємо

$$|x^q \partial_x^k u(t;x)| \leq (2\pi)^n c A^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} \widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu) D^{|q-l|_+} (q-l)^{(q-l)\overrightarrow{\alpha}^*} \times$$

$$\times c_{l,\delta/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2}|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}_0}} d\sigma \equiv c(q,t) A^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\beta}^*}, \ t \in (0;T], \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, твердження в) також виконується.

На завершення, переконаємося у правильності твердження г) цієї теореми. Нехай $f \in \left(\widehat{\mathbb{S}}^{\overrightarrow{\beta_0}}_{\overrightarrow{\alpha_0}}\right)$, $\overrightarrow{\alpha_0} \geq \overrightarrow{\alpha}^*$, $\overrightarrow{\beta_0} \geq \overrightarrow{\beta}^*$, тоді для всіх $t \in (0;T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, і $\{q, k\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ маємо

$$|x^q \partial_x^k u(t;x)| \leq$$

$$\leq (2\pi)^n c c_{\delta/2} A^{|k|_+} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} \widetilde{\Sigma}_t(q,l,r,\nu) D^{|q-l|_+} A_{\delta/2}^{|l|_+} (q-l)^{(q-l)\overrightarrow{\alpha}^*} \times$$

$$\times l^{l\overrightarrow{\alpha}_0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2}|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}_0}} d\sigma \leq$$

$$\leq (2\pi)^n c c_{\delta/2} \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2}|\sigma|_+^{\overrightarrow{1}/\overrightarrow{\beta}_0}} d\sigma \Bigr) A^{|k|_+} \times$$

$$\times \Bigl((\max\{D, A_{\delta/2}\})(2T_0)^2 \Bigr)^{|q|_+} k^{k\overrightarrow{\beta}^*} q^{q\overrightarrow{\alpha}_0}.$$

Що і потрібно було довести.

Теорему доведено.

Література

[1] *Литовченко В.А., Настасий Е.Б.* Вырожденные параболические системы уравнений типа Колмогорова векторного порядка // Сиб. мат. журн. – 2012. – **53**, № 1. – С. 148–164.

[2] *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analitic methods in the theory of differential and pseudodifferential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2004. – 390 p.

[3] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – Москва: Физматгиз, 1958. – 307 с.

[4] *Литовченко В.А., Васько Е.Б.* Задача Коши для вырожденных параболических систем уравнений типа Колмогорова векторного порядка с обобщенными начальными данными // Дифференц. уравнения. – 2014. – **50**, № 12. – С.1598–1606.

[5] *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949–952.

[6] *Литовченко В. А.* Задача Коши для $\{\overrightarrow{p}; \overrightarrow{h}\}$-параболических уравнений с постоянными коэффициентами, зависящими от времени // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 3. – С. 395–411.