Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 155–159

УДК 517.5 + 513.83

***Ю. Б. Зелинский*[1], *Д. С. Доля*[2]**

[1] , [2] *(Институт математики НАН Украины, Киев)*

[1] **zel@imath.kiev.ua**, [2] **dasha.dolja@mail.ru**

Инволюции и двукратные отображения

Досліджена можливість побудови на многовиді неперервної інволюції та зв'язного з нею неперервного відображення, для якого кожна точка образу має не більше двох прообразів.

В работе рассмотрим связь между инволюциями на замкнутом многообразии и отображениями таких многообразий, каждая точка образа которых содержит не более двух прообразов.

We investigate possibility of the building on manifold continuous involution and connected with her continuous mapping for which each point of the image has not more than two preimages.

Определение 1. Функция f называется инволюцией, если $f(f(x)) = x$ для всякого x из области определения функции f.

Естественно, что на произвольном топологическом пространстве, содержащем не менее двух точек, можно задать инволюцию, отличную от тождественной, которая переставляет только выбранную пару точек. Такая инволюция, как правило, не будет непрерывной. В дальнейшем нас интересует непрерывные инволюции.

Пример 1. *Зададим отображение окружности $f\colon S^1 \longrightarrow S^1$ формулой $f(z) = z^2$, где $z = x + \iota y$. Это отображение отождествляет антиподальные точки окружности $f(x,y) = f(-x,-y)$. Ему соответствует инволюция $\iota(x,y) = (-x,-y), \iota(-x,-y) = (x,y)$ без неподвижных точек.*

Пример 2. *Зададим отображение окружности* $f\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ *формулой* $f(x,y) = (x,0)$. *Это отображение отождествляет точки окружности* $f(x,y) = f(x,-y)$. *Ему соответствует инволюция* $\iota(x,y) = (x,-y)$ *с двумя неподвижными точками* $(1,0)$ *и* $(-1,0)$.

Каждая непрерывная инволюция порождает отношение эквивалентности [1] в пространстве $x \sim \iota(x)$ (случай $x = \iota(x)$ не исключен для некоторых точек, такое множество будет множеством неподвижных точек этой инволюции), для которого каждая точка факторпространства содержит не более двух прообразов. Факторное отображение задает непрерывное отображение, каждая точка образа которого содержит не более двух прообразов. Верно и обратное, непрерывное отображение, каждая точка образа которого содержит не более двух прообразов, порождает непрерывную инволюцию. Однако, как видим из примера (1), образ многообразия может быть не вкладываемым в евклидово пространство той же размерности.

Как показано в [2],[3] для каждого замкнутого (ориентированного и неориентируемого) двумерного многообразия существует непрерывное отображение в двумерную плоскость, каждая точка образа которого содержит не более двух прообразов. Из этого и отмеченного выше следует утверждение.

Теорема 1. *На каждом замкнутом двумерном многообразии существует непрерывная инволюция.*

В работах [4], [5] установлено, что для трехмерного вещественного проективного пространства существует отображение в трехмерное евклидово пространство, каждая точка образа которого содержит не более двух прообразов. Как и выше отсюда следует утверждение.

Теорема 2. *На каждом замкнутом трехмерном вещественном проективном пространстве существует непрерывная инволюция.*

Любое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие можно разбить на два подмногообразия с общим краем, каждое из которых гомеоморфно стандартному полному кренделю некоторого фиксированного рода [6]. Такое разбиение называется разбиением Хегора. Если есть такое разбиение Хегора, то на таком многообразии можно задать непрерывную инволюцию. Отсюда следует утверждение.

Теорема 3. *На каждом замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии существует непрерывная инволюция.*

Используя теоремы 1 – 3 и действие инволюции на одном из сомножителей, получим следующий результат.

Теорема 4. *Если многообразие M можно представить как декартово произведение двух многообразий $M \approx L \times N$, где один из сомножителей сфера, замкнутое двумерное многообразие, замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие или трехмерное вещественное проективное пространство, то на нем существует непрерывная инволюция.*

Следствие 1. *Если многообразие M можно представить как локально тривиальное расслоение* [7]*, для которого слой или база представляет собой сферу, замкнутое двумерное многообразие, замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие или трехмерное вещественное проективное пространство, то на нем существует непрерывная инволюция.*

Изучим, когда на замкнутом многообразии, которое можно представить как объединение двух одинаковых многообразий с общей границей, существует непрерывная инволюция.

Дальше мы рассматриваем группы когомологий с коэффициентами в группе целых чисел $\mathbb{Z}$ [8].

Лемма 1. *Пусть D— область в n—мерном многообразии M^n и пусть U_1 и U_2— непересекающиеся области в D такие, что $\partial U_1 = \partial U_2$ и $\overline{U}_1 \bigcup \overline{U}_2 = D$.*

Не существует собственного отображения $f\colon D \longrightarrow D_1$ $(f(U_1) \subset \subset N^n)$ такого, что выполнены одновременно условия:

1) $f(U_1) = f(U_2)$;
2) $f(\partial U_1 \bigcap f(U_\iota) = \emptyset, \iota = 1, 2$;
3) $f^*\colon H^{n-1}(f(\partial U_1)) \to H^{n-1}(\partial U_1)$ – эпиморфизм;
4) степень $\gamma(U_\iota, f, y) > 0$ при $\iota = 1, 2$.

Доказательство. Предположим, что такое отображение существует. Рассмотрим коммутативную диаграмму отображений

$$\begin{array}{ccc} \partial U_1 & \longrightarrow & \overline{U}_1 \\ {\scriptstyle f_i^*}\big\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\big\downarrow \\ \partial f(U_1) & \longrightarrow & f(\overline{U}_1) \end{array}$$

Ей соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий с точными строками:

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(\partial f(U_1)) & \longrightarrow & H^n(f(\overline{U}_1), \partial f(U_1)) & & \\ {\scriptstyle f^*}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f_\iota^*}\Big\downarrow & & \\ H^{n-1}(\partial U_1) & \xrightarrow{\delta} & H^n(\overline{U}_1, \partial U_1) & \longrightarrow & H^n(\overline{U}_1). \end{array}$$

Группа $H^n(\overline{U}_1) = 0$, так как $\overline{U}_1 \neq D$.

Из точности нижней строки диаграммы следует, что δ — эпиморфизм, тогда δf^* — эпиморфизм и из коммутативности диаграммы f_1^* — эпиморфизм. Группа $H^n(\overline{U}_1, \partial U_1) = \mathbb{Z}$ как группа открытой области, но тогда $H^n(f(\overline{U}_1), \partial f(U_1)) = \mathbb{Z}$ (она может быть нулевой или $\mathbb{Z}$, как $n-$мерная группа связного подмножества; нетривиальность ее следует из нетривиальности f_ι^*) и f_ι^* — изоморфизм. Отсюда следует, что отображение

$$f_1^* \oplus f_2^* \colon H^n(f(\overline{U}_1), \partial f(U_1)) \longrightarrow H^n(\overline{U}_1, \partial U_1) \oplus H^n(\overline{U}_2, \partial U_2)$$

является мономорфизмом.

Если существует отображение, удовлетворяющее условиям леммы, то согласно предыдущему отображения f_ι^* — изоморфизмы. Рассмотрим коммутативную диаграмму отображений:

Ей соответствует коммутативная диаграмма групп когомологий с точными строками:

$$\begin{array}{ccc} \partial U_1 & \longrightarrow & D = \overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 \\ {\scriptstyle f_\iota^*}\Big\downarrow & & {\scriptstyle f^*}\Big\downarrow \\ \partial f(U_1) & \longrightarrow & f(D) = f(\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2). \end{array}$$

Гомоморфизм ι^* имеет нетривиальное ядро $\operatorname{Ker} \iota^* \supset \{a, a\}, a \neq 0$. В силу точности нижней строки $\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Ker} \iota^*$. Тогда $\operatorname{Im} \delta h^* = \operatorname{Ker} \iota^*$.

Из коммутативности диаграммы следует, что $\operatorname{Im} f_1^* \oplus f_2^* \supset \operatorname{Im}\delta h^* \supset$ $\supset \{a, -a\}$. В силу условия (4) леммы 1 это возможно только при $a = 0$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Следствие 2. *Пусть D — область в $n-$мерном многообразии M^n и пусть U_1 и U_2 — непересекающиеся области в D такие, что*

$\partial U_1 = \partial U_2$ и $\overline{U}_1 \cup \overline{U}_2 = D$. Для существования инволюции с множеством неподвижных точек $\overline{U}_1$ необходимо, чтобы существовал гомеоморфизм

$$f\colon \overline{U}_1 \longrightarrow \overline{U}_2$$

такой, что $\gamma(U_1, f, y) < 0$.

Открытые вопросы.

1. Можно ли на каждом $n-$мерном многообразии задать непрерывную инволюцию?

2. Можно ли на каждом $n-$мерном многообразии M задать непрерывное отображение, каждая точка образа которого содержит не более двух прообразов, а образ $f(M)$ допускает вложение в $n-$мерное евклидово пространство?

Список литературы

[1] *Энгелькинг Р. Общая топология.* — М.: Мир, 1986. — 752 с.

[2] *Зелинский Ю.Б.* Об отображении областей на многообразиях // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 1. — С. 149 –152.

[3] *Zelinskii Yu.* Continuous mappings between domains // Bulletin de la societ*é* des sci. et letters de L*ó*d*ź*. — 2010. — Vol. 60, No. 2 — P. 10 – 14.

[4] *Зелинский Ю.Б.* Об отображении проективного пространства в сферу // Укр. матем. журн. — Київ. — 2010. — **62**, № 7. — С. 1037 – 1044.

[5] *Зелинский Ю.Б.* Открытые вопросы отображения областей на многообразиях // Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 2. — С. 242–248.

[6] *Кузаконь В.М., Кириченко В.Ф., Пришляк О.О.* Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти // Праці Інституту математики НАН України. — 2013. — **97**. — 500 с.

[7] *Хьюзмоллер Д.* Расслоенные пространства. — М.: Мир, 1970. — 444 с.

[8] *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971. — 680 с.