Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 243–250

УДК 513.83; 517.5

М. В. Ткачук [1]***, Т. М. Осипчук*** [2]

(Институт математики НАН Украины, Киев)

[1]**mvtkachuk@mail.ru,** [2] **otm82@mail.ru**

Задача о тени для эллипсоида вращения

It is proposed a new proof of the problem about shadow for the center of a sphere in the three-dimensional space which is generated by the minimal number of closed (open) non-overlapping balls with radiuses being less then radius of the sphere and with centers on it. It is considered generalization of the problem to spheroids also.

В роботі запропоновано нове доведення задачі про тінь для центру сфери в тривимірному просторі, яка створюється мінімальною кількістю замкнених (відкритих) куль, що попарно не перетинаються, з радіусами меншими за радіус сфери та з центрами на ній. А також розглянуто узагальнення цієї задачі на еліпсоїди обертання.

В работе предложено новое доказательство задачи о тени для центра сферы в трехмерном пространстве, создаваемую минимальным количеством попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров с радиусами меньше радиуса сферы и с центрами на ней. А также рассмотрено обобщение этой задачи на эллипсоиды вращения.

В 1982 г. Г. Худайбергановым была поставлена задача о тени [4]: *найти минимальное число попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *с центрами на сфере* S^{n-1}*, радиуса меньшего радиуса сферы и таких, что любая прямая, проходящая через центр сферы, пересекала хотя бы один из этих шаров.* Кратко эту задачу (и аналогичные ей задачи) будем формулировать таким образом: *какое минимальное количество таких шаров создает тень для центра сферы?*

Эта задача была решена Г. Худайбергановым для случая $n = 2$: было показано, что для окружности на плоскости достаточно двух шаров. Там же было сделано предположение о том, что и для случая $n > 2$ минимальное число таких шаров в точности равно n. Значимость этой задачи и гипотезы ее решения приведены в работах Ю. Зелинского [1, 2]. Она интересна также с точки зрения выпуклого анализа тем, что является частным случаем задачи о принадлежности точки 1-оболочке объединения некоторого набора шаров. В [3] Ю. Зелинский с учениками доказал, что для $n = 3$ трех шаров не достаточно, а уже четыре шара создают тень для центра сферы. Там же легко доказывается, что для общего случая минимальным количеством является $n+1$ шар. Таким образом, предположение Г. Худайберганова оказалось не верным. В [3], также, предложено оригинальное аналитически-геометрическое решение задачи для $n = 2$.

В данной работе мы приводим свое аналитически-геометрическое решение задачи для трехмерного случая.

Итак, пусть три шара создают тень для центра сферы. Обозначим их B_1, B_2, B_3, а двуполостные конусы, касательные к шарам и с общей вершиной в центре сферы — K_1, K_2, K_3, соответственно. Очевидно, что шары создают тень для прямых, которые лежат внутри этих конусов. Далее, не уменьшая общности, разместим центр единичной сферы в начале координат O, центр первого шара $B_1(A, r_1)$ с радиусом r_1 в точке $A = (0, 0, 1)$, $a = \overrightarrow{OA}$, и центр второго шара $B_2(B, r_2)$ с радиусом r_2 в точке $B = (0, b_1, b_2)$, $b = \overrightarrow{OB}$.

Поверхности конусов K_1 и K_2 будут пересекаться по двум прямым, которые являются общими касательными к шарам B_1, B_2 и которые обозначим x', x'' (рис. 1). Случаи, когда конусы не пересекаются либо касаются, не рассматриваем, поскольку они соответствуют такому размещению шаров, при котором невозможно создать тень в центре сферы. Действительно, если бы конусы не пересекались, нашлась бы плоскость, проходящая через центр сферы и не пересекающая ни один из этих конусов. Тогда третий шар не сможет перекрыть эту плоскость. Если бы конусы касались, то, в случае открытых шаров, снова нашлась бы плоскость, проходящая через касательную прямую и не пересекающая конусы (а в случае замкнутых шаров, это была бы та же плоскость, но без касательной прямой, и которую очевидно третий шар также не смог бы перекрыть).

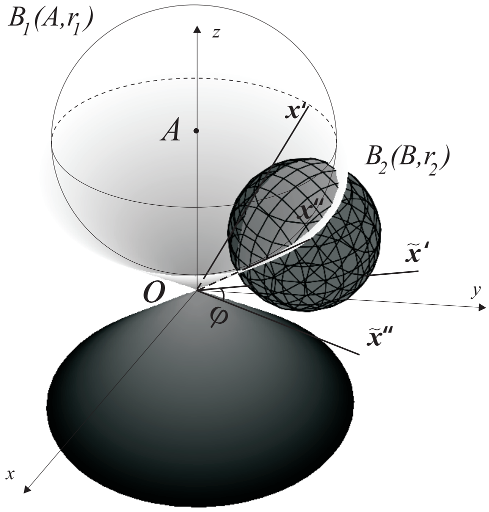

Рис. 1

Нас интересует угол φ между проекциями $\tilde{x}'$, $\tilde{x}''$ прямых x', x'' на плоскость xOy. Покажем, что $\angle\varphi < \pi/2$.

Рассмотрим точку $X = (x_1, x_2, x_3)$ пересечения прямой x' со сферой. Тогда, $|x| = 1$, $x = \overrightarrow{OX}$, и $\angle\varphi = 2arctg\dfrac{x_1}{x_2}$. Выразим x_1, x_2 через r_1, r_2.

Учитывая то, что $|a| = |b| = 1$ и $|a-b| = r_1+r_2$, получим скалярное произведение

$$ab = b_3 = 1 - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2. \tag{1}$$

Пусть прямая x' касается шаров B_1, B_2 соответственно в точках A', B' (рис. 2). Тогда, учитывая то, что из прямоугольных треугольников $OA'A$, $OB'B$ имеем $\cos\widehat{ax} = \sqrt{1-r_1^2}$ и $\cos\widehat{bx} = \sqrt{1-r_2^2}$, получим

$$ax = x_3 = \sqrt{1-r_1^2}, \tag{2}$$

$$bx = b_2x_2 + b_3x_3 = \sqrt{1-r_2^2}. \tag{3}$$

Из (1) – (3) и $b_2 = \sqrt{1-b_3^2}$, получаем

$$x_2 = \frac{\sqrt{1-r_2^2} - b_3\sqrt{1-r_1^2}}{\sqrt{1-b_3^2}} = $$

$$= \frac{\sqrt{1-r_2^2} - \left(1-\frac{1}{2}(r_1+r_2)^2\right)\sqrt{1-r_1^2}}{\sqrt{(r_1+r_2)^2 - \frac{1}{4}(r_1+r_2)^4}}. \quad (4)$$

А из (2) и равенства $|x| = 1$, получаем

$$x_1 = \sqrt{1-x_2^2-x_3^2} = \sqrt{r_1^2 - x_2^2}. \quad (5)$$

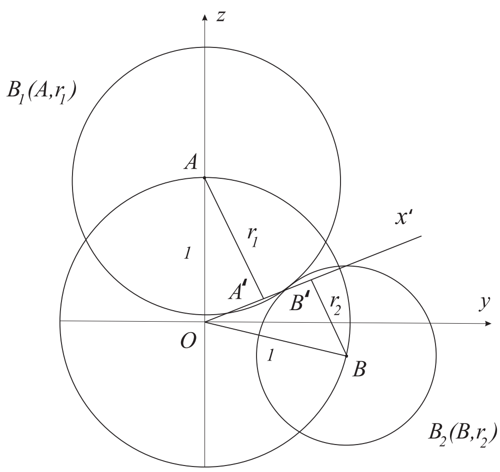

Рис. 2

Таким образом, выражение x_1/x_2 является функцией двух переменных r_1, r_2, для которой нужно найти максимум в открытом квадрате $(0,1) \times (0,1)$. С помощью несложных, но объемных вычислений получим, что $x_1/x_2 < 1$ и $\varphi < \pi/2$.

Очевидно, что те же рассуждения верны и для шара B_3.

Теперь рассмотрим конус, содержащий шар B_1 и равноудаленный от касательного конуса K_1 на некоторый достаточно малый угол. Весь этот конус должен содержаться внутри конусов K_2, K_3, но это невозможно, поскольку проекция части, содержащейся в половине конуса (K_2 или K_3), на плоскость xOy находится в секторе величины $\varphi < \pi/2$, а значит весь построенный конус не может содержаться в тени шаров B_2, B_3.

Таким образом, трех шаров не достаточно, чтобы создать тень для центра сферы. Как показано в [3], четыре шара будут создавать тень.

Рассмотрим интересный факт, сопутствующий этой задаче. Пусть шары открыты и один из них имеет радиус, равный радиусу сферы. Тогда очевидно, что такой шар создает тень всюду, кроме экваториальной плоскости, касательной к шару. Следовательно, для оставшихся шаров было бы достаточно создать тень только на экваторе. Пусть второй шар касается первого, тогда методами школьного курса геометрии несложно показать, что максимальный угол, под которым из центра сферы видно пересечение второго шара с экваториальной плоскостью, получается в пределе, когда его центр стремится к точке, диаметрально противоположной к центру первого, и составляет $\pi/2$. Это сразу доказывает, что двумя шарами невозможно закрыть экватор.

Теперь вместо сферы рассмотрим эллипсоид вращения вокруг большой оси, а на открытые шары наложим условие, что они не пересекают центра эллипсоида. Если у основания малой оси разместить первый шар с радиусом, равным этой оси, то, как и в случае со сферой, открытой останется экваториальная плоскость. Если же большую ось выбрать достаточно длинной и второй шар разместить также у ее основания, то он закроет как угодно большой угол $< \pi$, что даст возможность третьему шару, находящемуся на линии вращения малой оси, закрыть остаток угла. Таким образом, существует вытянутый эллипсоид вращения и такие три открытых шара, попарно не пересекающихся и не пересекающие центр эллипсоида и с центрами на нем, которые создают тень в центре эллипсоида. Очевидно, что двух шаров для создания тени недостаточно.

Естественно возникает следующая

Задача 1. *Пусть задан вытянутый эллипсоид вращения. Найти минимальное соотношение длин большой и малой полуосей, так, чтобы три замкнутых (открытых) попарно не пересекающихся шара с центрами на эллипсоиде и не пересекающие центр эллипсоида, создавали тень для центра эллипсоида.*

Определение 1. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-выпукло относи-*

тельно точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, если найдется m-мерная плоскость L, такая что $x \in L$ и $L \cap E = \emptyset$.

Определение 2. Скажем, что множество $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-выпукло*, если оно m-выпукло относительно каждой точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ минимальное m-выпуклое множество, содержащее E, называется его *m-оболочкой* множества E.

Тогда нашу задачу можно переформулировать таким образом: *найти минимальное отношение длин большой и малой полуосей вытянутого эллипсоида вращения, чтобы три замкнутых (открытых) попарно не пересекающихся шара, не пересекающие центр эллипсоида и с центрами на нем, обеспечили принадлежность центра эллипсоида* 1-*оболочке семейства шаров.*

Для определенности будем рассматривать замкнутые шары. Обозначим a_1, a_2, a_3 — радиус-векторы центров шаров; r_1, r_2, r_3 — радиусы шаров. Не уменьшая общности, будем рассматривать эллипсоид с малой полуосью, равной единице, большой полуосью, равной d, и с центром в начале координат.

Пусть $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда уравнение $|Mx| = 1$, где x — переменный вектор, описывающий заданный эллипсоид. По условию $|Ma_i| = 1$ и $|a_i - a_j| \geq r_i + r_j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Далее, над каждым шаром построим касательный конус с центром в начале координат, образующими которого являются лучи. Уравнение границы конуса можно получить из формул для косинуса угла между осью и образующей:

$$\frac{(a_i, x)}{|a_i||x|} = \frac{\sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}}{|a_i|} = \cos\varphi, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ неравенство $\dfrac{(a_i, x)}{|x|} \geq \sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}$ задает замкнутый конус.

Рассмотрим систему линейных уравнений
$(a_i, x) = \sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}, \quad i = 1, 2, 3$. Пусть вектор x — решение этой системы. Если $|x| = 1$, то x лежит на общей касательной конусов над шарами. Если $|x| \leq 1$, то конусы с центрами в начале координат над шарами имеют общий луч Ox. Если же $|x| > 1$, то x не содержится ни

в каком конусе, но x лежит на общей образующей конусов с меньшими косинусами углов между осью и образующей

$$\frac{(a_i, x)}{|a_i||x|} = \frac{\sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}}{|a_i||x|} \leq \frac{\sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}}{|a_i|}.$$

Данные конусы содержат конусы над шарами в своей внутренности, следовательно, пересечение конусов над шарами содержит только точку O.

Добавим к трем конусам еще три симметричных им относительно начала координат. Для того, чтобы 1-выпуклая оболочка трех шаров содержала начало координат необходимо и достаточно, чтобы объединение шести конусов содержало все пространство. Очевидно, что для этого достаточно, чтобы каждая тройка конусов, не содержащая пару симметричных конусов, имела нетривиальное пересечение.

Обозначим $s_i = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ — набор из восьми векторов. Тогда все условия пересечения соответствующих троек конусов можно записать в виде: $(a_i, x_k) = s_k \sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}$, $|x_k| \leq 1$, $k = 1, \ldots, 8$.

Таким образом, получаем задачу условной минимизации функции:
$(a_i, x_k) = s_k \sqrt{|a_i|^2 - r_i^2}$, $|x_k| \leq 1$,
$s_k = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $k = 1, ..., 8$, $i = 1, 2, 3$,
$|Ma_i| = 1$, $|a_i - a_j| \geq r_i + r_j$, $r_i \geq 0$, $1 \leq i < j \leq 3$,
$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{d} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$d \to \min$.

Для ее решения применим численные методы.

Поскольку все ограничения являются алгебраическими, то для нахождения минимума можно использовать Sequential Least SQuares Programming из пакета SciPy для Python. Вычисления дают значение минимума, приближенно равное $2\sqrt{2}$.

Минимум $d_{min} = 2\sqrt{2}$ не достигается и является предельным значением для следующего трехпараметрического семейства конфигураций:
$r_1 = x$, $r_2 = y$, $a_1 = (0, 0, 1)$, $a_2 = (0, u, v)$,
$u = -1 + \frac{1}{2}(4 - (x + y)^2)$, $v = \frac{1}{2}(x + y)\sqrt{4 - (x + y)^2}$,
$a_3(z, 0, 0)$, $r_3 = \sqrt{z^2 + 1} - 1$,

при $x \to 1$, $y \to 1$, $z \to 2\sqrt{2}$, где r_1, r_2, r_3 — радиусы шаров, а x, y, z — параметры.

Следовательно, искомое минимальное отношение длин большой и малой полуосей эллипсоида равно $2\sqrt{2}$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Пусть задан вытянутый эллипсоид вращения с отношением большой к малой полуоси, которое строго меньше* $2\sqrt{2}$*. Для того, чтобы центр заданного эллипсоида принадлежал* 1*-оболочке семейства попарно непересекающихся замкнутых (открытых) шаров, не пересекающих центр эллипсоида и с центрами на нем, необходимо и достаточно трех таких шаров.*

Пусть три шара создают тень в центре эллипсоида вращения. Изменим масштаб вдоль большой оси эллипсоида, вследствие такого линейного преобразования эллипсоид перейдет в сферу а шары – в эллипсоиды вращения с параллельными осями. Воспользуемся теперь инвариантностью 1-выпуклости относительно афинных преобразований [2], из чего следует, что полученные эллипсоиды создадут тень в центре сферы.

Теорема 2. *Для создания тени в центре сферы достаточно трех попарно не пересекающихся эллипсоидов с центрами на сфере, каждый из которых не содержит центр сферы. При этом эллипсоиды могут быть попарно гомотетичными.*

Список литературы

[1] *Зелинский Ю. Б.* Многозначные отображения в анализе. — К.: Наукова думка, 1993. — 264 с.

[2] *Зелинский Ю. Б.* Выпуклость. Избранные главы /Праці Інституту математики НАН України. Т. 92/. — К.: Інститут математики НАН України. — 2012, 280 с.

[3] *Yu. Zelinskii, Vyhovska I., Stefanchuk M.* Generalized convex sets and shadows problem // arXiv preprint /arXiv:1501.06747 [math.MG]/. — 2015 (in Russian).

[4] *Худайберганов Г.* Об однородно-полиномиально выпуклой оболочке объединения шаров // Рукопись деп. в ВИНИТИ 21.02.1982 г. № 1772 — 85 Деп.