Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, том 12, № 3, 24–30

УДК 517.54

Г. П. Бахтіна[1], *В. Є. В'юн*[2], *І. Я. Дворак*[2]

([1] Національний технічний університет "Київський політехнічний інститут", Київ)

[2], [3] *(Інститут математики НАН України, Київ)*

[1] bakhtina_galina@mail.ru, [3] vvikev@mail.ru

Оцінки добутків внутрішніх радіусів областей в задачах про екстремальне розбиття комплексної площини

The paper is devoted to extremal problems of the geometric function theory of complex variable associated with estimates of functionals defined on systems of non-overlapping domains.

Робота присвячена дослідженню екстремальних задач геометричної теорії функцій комплексної змінної, пов'язаних з оцінками функціоналів, заданих на системах неперетинних областей.

1. Вступ. Задачі про екстремальне розбиття займають важливе місце в геометричній теорії функцій комплексної змінної і мають багату історію (див. роботу М. О. Лаврентьєва 1934 року [1], де екстремальні розбиття розглядались при отриманні оцінок добутку степенів конформних радіусів неперетинних областей, а також дослідження [2–15]). Важливими елементами дослідження таких екстремальних задач є глибокі результати теорії квадратичних диференціалів.

2. Означення і позначення. Нехай $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ — множини натуральних і дійсних чисел, відповідно. $\mathbb{C}$ — комплексна площина, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ — її одноточкова компактифікація, $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Нехай $r(B,a)$ — внутрішній радіус області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ відносно точки $a \in B$ (див., наприклад, [5, с. 14]; [7, с. 71].

Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Систему точок $A_n := \left\{a_k \in \mathbb{C}: \, k = \overline{1,n}\right\}$ таку, що $|a_k| \in \mathbb{R}^+$ при $k = \overline{1,n}$ та $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, будемо називати n-променевою. Позначимо

$$P_k = P_k(A_n) := \{w : \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\},$$

$\theta_k := \arg a_k$, $a_{n+1} := a_1$, $\theta_{n+1} := 2\pi$. Величини $\alpha_k := \frac{1}{\pi}\left[\theta_{k+1} - \theta_k\right]$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1,n}$, будемо називати кутовими параметрами n-променевої системи точок A_n.

Метою даної роботи є отримання точних оцінок зверху для функціонала наступного вигляду:

$$J_n(\gamma) = \left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right), \qquad (1)$$

де $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ — n-променева система точок, яка розташована на одиничному колі, B_0, B_∞, $\{B_k\}_{k=1}^n$ — сукупність неперетинних областей, $a_k \in B_k$, $k = \overline{1,n}$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_\infty$.

В роботі [4] була отримана оцінка функціоналу (1) для системи неперетинних областей при $n \geq 2$ і для $\gamma = \frac{1}{2}$. Цей результат було посилено в роботі [6] і показано, що дана оцінка справедлива при $\gamma \in \left(0, \frac{n^2}{8}\right]$, $n \geq 2$. В останні роки дана задача активно досліджувалась в роботах [13–15].

В даній роботі задача про оцінку функціонала (1) розглядається при $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

3. Основні результати.

Позначимо

$$\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1-\tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1+\tau)^{-(1+\tau)^2} \;\; \forall \tau \geqslant 0.$$

Лемма 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$. Тоді для будь-якої n-променевої системи точок $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ такої, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1,n}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_0, B_k, B_∞ ($a_0 = 0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1,n}$), справедлива нерівність*

$$\left[r\left(B_0, 0\right) r\left(B_\infty, \infty\right)\right]^\gamma \prod_{k=1}^{n} r\left(B_k, a_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right) \left(\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k)\right)^{1/2}, \qquad (2)$$

де $\tau_k = \alpha_k\sqrt{\gamma}$, $k = \overline{1,n}$. *Знак рівності в нерівності* (2) *досягається тоді, коли області* B_0, B_∞, B_k *і точки* 0, ∞, a_k, $k = \overline{1,n}$, *є, відповідно, круговими областями та полюсами квадратичного диференціала*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma w^{2n} + (n^2-2\gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n-1)^2}\,dw^2.$$

Доведення. При доведенні леми застосовуємо метод розділяючого перетворення (див., наприклад, [4, с. 48]; [5, с. 27–30]; [7, с. 87–92]). Аналогічно міркуванням, проведеним в роботі [7, с. 261], розглянемо систему функцій $\zeta_k(w) = -i\left(e^{-i\theta_k}w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $k = \overline{1,n}$. Нехай $\Omega_k^{(1)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_k(B_k\bigcap\overline{P}_k)$, що містить точку $\zeta_k(a_k)$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. Через $\Omega_k^{(2)}$ позначимо область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_k(B_{k+1}\bigcap\overline{P}_k)$, що містить точку $\zeta_k(a_{k+1})$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. $B_{n+1} :=$ $:= B_1$, $\zeta_n(a_{n+1}) := \zeta_n(a_1)$. Крім того, $\Omega_k^{(0)}$ позначає область площини $\mathbb{C}_\zeta$, отриману в результаті об'єднання зв'язної компоненти множини $\zeta_k(B_0\bigcap\overline{P}_k)$, що містить точку $\zeta = 0$, зі своїм симетричним відображенням відносно уявної вісі. Набір областей $\{\Omega_k^{(\infty)}\}_{k=1}^n$ є результатом розділяючого перетворення довільної області B_∞ відносно набору $\{P_k\}_{k=1}^n$ і $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$ в точці $\zeta = \infty$. Позначимо $\zeta_k(a_k) := \omega_k^{(1)}$, $\zeta_k(a_{k+1}) := \omega_k^{(2)}$, $\zeta_n(a_{n+1}) := \omega_n^{(2)}$, $k = \overline{1,n}$.

Застосовуючи в наших міркуваннях методи робіт [7, с. 262] і [9, с. 871], отримуємо нерівність

$$J_n(\gamma) \leqslant 2^n\left(\prod_{k=1}^n \alpha_k\right)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^n\left\{\frac{r\left(\Omega_k^{(1)},\omega_k^{(1)}\right)\cdot r\left(\Omega_k^{(2)},\omega_k^{(2)}\right)}{\left(|a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}+|a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}\right)^2}\left(r\left(\Omega_k^{(0)},0\right)r\left(\Omega_k^{(\infty)},\infty\right)\right)^{\gamma\alpha_k^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$|\omega_k^{(1)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(2)}| = |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$, $|\omega_k^{(1)} - \omega_k^{(2)}| = |a_k|^{\frac{1}{\alpha_k}} + |a_{k+1}|^{\frac{1}{\alpha_k}}$. Вираз, що стоїть у фігурних дужках, є значенням функціоналу

$$L_\tau = \left[r\left(\Lambda_0,0\right)r\left(\Lambda_\infty,\infty\right)\right]^{\tau^2}\cdot\frac{r\left(\Lambda_1,\lambda_1\right)r\left(\Lambda_2,\lambda_2\right)}{|\lambda_1-\lambda_2|^2} \tag{3}$$

на системі неперетинних областей $\{\Omega_k^{(0)}, \Omega_k^{(1)}, \Omega_k^{(2)}, \Omega_k^{(\infty)}\}$, і відповідній системі точок $\{0, \omega_k^{(1)}, \omega_k^{(2)}, \infty\}$ $(k = \overline{1, n})$.

На основі теореми 4.1.1 [7, с. 167] та інваріантності функціоналу (3), отримуємо оцінку

$$L_\tau \leqslant \Phi(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

де $\Phi(\tau) = \tau^{2\tau^2} \cdot |1-\tau|^{-(1-\tau)^2} \cdot (1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Тоді

$$J_n(\gamma) \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k \sqrt{\gamma}\right) \left[\prod_{k=1}^{n} \Phi(\tau_k)\right]^{1/2} = \tag{4}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\right)^n \cdot \left[\prod_{k=1}^{n} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1, n}$. Реалізація знаку рівності перевіряється безпосередньо. Лема доведена.

Будемо вважати, що $m \in \{4, 5, 6\}$, $\gamma_m := 2,25$ при $m = 4$, $\gamma_m := 3,3$ при $m = 5$, $\gamma_m := 4,6$ при $m = 6$.

Теорема 1. *Нехай $0 < \gamma \leq \gamma_m$. Тоді для довільної m-променевої системи точок $A_m = \{a_k\}_{k=1}^m$ такої, що $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, m}$, і довільного набору взаємно неперетинних областей B_0, B_k, B_∞ $(0 \in B_0 \subset \overline{\mathbb{C}}$, $\infty \in B_\infty \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{1, m})$, справедлива нерівність*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{m} r(B_k, a_k) \leqslant$$

$$\leqslant [r(D_0, 0)\, r(D_\infty, \infty)]^\gamma \prod_{k=1}^{m} r(D_k, d_k), \tag{5}$$

де області D_0, D_∞, D_k — кругові області; точки 0, ∞, d_k, $k = \overline{1, m}$, є полюсами квадратичного диференціалу

$$Q(w)dw^2 = -\frac{\gamma\, w^{2m} + (m^2 - 2\gamma) w^m + \gamma}{w^2 (w^m - 1)^2}\, dw^2. \tag{6}$$

Доведення. Проведемо доведення теореми 1 при $m = 4$. Враховуючи лему 1 і умови теореми 1, з нерівності (4) при $n = 4$, одержуємо

$$J_4(\gamma) \leqslant \frac{16}{\gamma^2} \left(\prod_{k=1}^{4} \left(\tau_k^{2\tau_k^2+2} \cdot |1-\tau_k|^{-(1-\tau_k)^2} \cdot (1+\tau_k)^{-(1+\tau_k)^2} \right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

де $\tau_k = \sqrt{\gamma} \cdot \alpha_k$, $k = \overline{1,4}$.

Нехай $\Psi(x) = x^{2x^2+2} \cdot |1-x|^{-(1-x)^2} \cdot (1+x)^{-(1+x)^2}$, $G(x) = \ln(\Psi(x))$.

Розглянемо екстремальну задачу

$$\prod_{k=1}^{n} \Psi(x_k) \longrightarrow \max; \quad \sum_{k=1}^{n} x_k = 2\sqrt{\gamma}, \quad x_k = \alpha_k \sqrt{\gamma}.$$

Нехай $X^{(0)} = \left\{ x_k^{(0)} \right\}_{k=1}^{n}$ — її довільна екстремальна система точок.

Повторюючи міркування, проведені в роботі [12], приходимо до висновку, що має місце твердження:

$$G'(x_k^{(0)}) = G'(x_j^{(0)}), \quad k,j = \overline{1,n}, \quad k \neq j, \tag{7}$$

де $G'(x) = 4x \ln x - 2(x-1)\ln|1-x| - 2(x+1)\ln(x+1) + \frac{2}{x}$.

На основі співвідношення (7), а також використовуючи ідеї робіт [12 - 15], покажемо що $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)}$.

Нехай $G'(x) = t$, де $y_0 \leqslant t < 0$. Для $\forall t \in [y_0, 0)$ дане рівняння має 2 корені $x_1(t) \in (0, x_0]$ та $x_2 \in [x_0, \infty)$. Розглянемо наступні значення параметра t: $t_1 = -0,1$, $t_2 = -0,2$, $\ldots$, $t_{10} = -1$, $t_{11} = y_0$. Проводячи розрахунки, подамо допоміжні значення у вигляді таблиці:

k	t_k	$x_1(t_k)$	$x_2(t_{k+1})$	$3x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$	$4x_1(t_k) + x_2(t_{k+1})$
1	-0,1	0,595614	1,588941		
2	-0,2	0,610729	1,310498	3,09734	3,692954
3	-0,3	0,626917	1,184045	3,016232	3,626961
4	-0,4	0,644375	1,110153	2,990904	3,617821
5	-0,5	0,663378	1,062338	2,995463	3,639838
6	-0,6	0,684325	1,030184	3,020318	3,683696
7	-0,7	0,707842	1,008999	3,061974	3,746299
8	-0,8	0,735017	0,997389	3,120915	3,828757
9	-0,9	0,768137	0,979982	3,185033	3,92005
10	-1	0,814378	0,947119	3,25153	4,019667
11	-1,06	0,884406	0,884406	3,32754	4,141918

Враховуючи властивості функції $G'(x)$ і умови теореми, отримуємо наступну нерівність $3x_1(t) + x_2(t) > 3x_1(t_k) + x_2(t_{k+1}) > 2\sqrt{\gamma_4}$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{1, 10}$. Звідси, використовуючи відповідні значення із вище наведеної таблиці, отримуємо, що теорема 1 має місце при $\gamma = \gamma_4$.

Для всіх $\gamma < \gamma_4$ всі попередні міркування зберігаються. Реалізація знака рівності перевіряється безпосередньо. Теорема 1 доведена.

Доведення теореми 1 при $m = 5$ і $m = 6$, відповідно, повторюють міркування, проведені при доведенні теореми 1 при $m = 4$ з урахуванням деяких особливостей випадків при $n = 5$ (останній стовпчик таблиці) та $n = 6$, відповідно.

Висловлюємо подяку професору О.К. Бахтіну за постановку задачі та увагу до роботи.

Список литературы

[1] *Лаврентьев М.А.* К теории конформных отображений //Тр. физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5**. — С. 159 – 245.

[2] *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — Москва: Наука, 1966. — 628 с.

[3] *Дженкинс Дж.А.* Однолистные функции и конформные отображения. — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.

[4] *Дубинин В.Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. — 1988. — **168**. — С. 48 – 66.

[5] *Дубинин В.Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. – **49**, № 1(295). — С. 3 – 76.

[6] *Кузьмина Г.В.* Задачи об экстремальном разбиении римановой сферы // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2001. — **276**. — С. 253 – 275.

[7] *Бахтин А. К., Бахтина Г. П., Зелинский Ю. Б.* Топологоалгебраические структуры и геометрические методы в комплексном анализе // Праці ін-ту мат-ки НАН України. — 2008. — **73**. — 308 с.

[8] *Бахтин А.К., Таргонский А.Л.* О произведении внутренних радиусов неналегающих областей и открытых множеств // Доп. НАН України. — 2008. — № 5. — С. 7 – 12.

[9] *Бахтин А.К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 7. — С. 867 – 886.

[10] *Кузъмина Г.В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52 – 67.

[11] *Емельянов Е.Г.* К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2002. — **286**. — С. 103 – 114.

[12] *Ковалев Л.В.* К задаче об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности // Дальневост. мат. сб. — 1996. — 2. — С. 96 – 98.

[13] *Денега И.В.* Некоторые неравенства для внутренних радиусов частично неналегающих областей // Доп. НАН України. — 2012. — №5. — С. 19 – 22.

[14] *Бахтин А.К., Денега И.В.* Некоторые оценки функционалов для N-лучевых систем точек // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України /Теорія наближення функцій та суміжні питання/. — К.: Ін-т матем. НАН України, 2011. — **8**, №1. — С. 12 – 21.

[15] *Бахтін О.К., В'юн В.Є.* Про деякі нерівності в теорії неперетинних областей // Зб. праць Ін-ту матем. НАН України. — К.: Ін-т математики НАН України, 2014. — **11**, №1. — С. 141 – 152.