Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 54-66

УДК 517.51

М. М. Бубняк (Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль)

ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

The circle (multidimensional generalization of Worpitsky's Theorem) and the oval regions of the convergence were investigated for $\overrightarrow{p}$-periodic branched continued fractions of the special form. For 1-periodic these fractions the convergence was proved, the truncation error bounds was researched in the angle regions; the necessary condition was established.

Для $\overrightarrow{p}$-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду досліджено кругові (багатовимірне узагальнення теореми Worpitsky) та овальні області збіжності. Для 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду доведена збіжність та встановлена оцінка швидкості збіжності в кутових областях; встановлена необхідна ознака збіжності.

1.Вступ. Неперервний дріб

$$\mathop{\mathrm{D}}_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1|}{|b_1}+\frac{a_2|}{|b_2}+\dots, \qquad (1)$$

де $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, називають p-періодичним, якщо виконуються умови: $a_{n+p} = a_p$ і $b_{n+p} = b_p$, $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Періодичні дроби використовуються при дослідженні максимальності областей збіжності (кругових, параболічних та ін.), при доведенні непокращенності оцінок швидкості збіжності неперервних дробів. Якщо елементи дробу (1) задовольняють умови: $\lim\limits_{n\to\infty} a_{np+m} = \widetilde{a}_m$ і $\lim\limits_{n\to\infty} b_{np+m} = \widetilde{b}_m$, $m = \overline{1,p}$, то цей дріб називають гранично-p-періодичним. У гранично-періодичні дроби розвиваються багато елементарних та спеціальних функцій. Огляд результатів, присвячених таким дробам, викладено у монографії [11].

Одним із багатовимірних узагальнень неперервних дробів (1) є гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) вигляду

$$a_0\left(b_0+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{a_{i(k)}}{b_{i(k)}}\right)^{-1}=\cfrac{a_0}{b_0+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\cfrac{a_{i(1)}}{b_{i(1)}+\sum\limits_{i_2=1}^{i_1}\cfrac{a_{i(2)}}{b_{i(2)}+\ddots}}} \tag{2}$$

де $a_{i(k)}, b_{i(k)} \in \mathbb{C}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, $\mathcal{I} = \{i_1 i_2 \dots i_k\colon 1 \le i_s \le i_{s-1}; s \ge 1; s = \overline{1,k}; i_0 = N\}$, N – фіксоване натуральне число. Їх дослідженням присвячені роботи Д. І. Боднара, Х. Й. Кучмінської, Т. М. Антонової, Р. І. Дмитришина, О. Є. Баран та ін. [1-4].

Послідовність $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ із $\mathbb{C}^2$ називають послідовністю множин елементів дробу (2) і $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ – послідовністю множин значень, які відповідають $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$, якщо виконуються умови: $a_{i(k)}/b_{i(k)} \in V_{i(k)}$ та $a_{i(k)}/(b_{i(k)} + \sum_{i_{k+1}=1}^{i_k} V_{i(k+1)}) \subset V_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$. Послідовність $\{\Omega_{i(k)}\}_{n=0}^{\infty}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, називаються послідовністю множин збіжності ГЛД (2), якщо з умов $(a_{i(k)}, b_{i(k)}) \in \Omega_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, випливає збіжність цього дробу.

Розглянемо $\overrightarrow{p}$-періодичний гіллястий ланцюговий дріб вигляду

$$\left(1+\overset{\infty}{\underset{k=1}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}\frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}, \tag{3}$$

де $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_j \in \mathbb{N}$, $j = \overline{1,N}$; індекс s, $1 \le s \le p_{i_k}$, елемента $c_{i_k,s}$ залежать від поверху k та періоду p_{i_k} і визначається з наступного розкладу: $k = p_{i_k} n + s$, якщо $i_1 = i_2 = \dots = i_k$, або $k - m = p_{i_k} n + s$, якщо $i_1 \ge i_2 \ge \dots \ge i_m > i_{m+1} = \dots = i_k$, $n \ge 0$. Якщо $p_j = 1$, $j = \overline{1,N}$, то дріб (3) назвемо 1-періодичним ГЛД спеціального вигляду і позначимо $c_{q,j} = c_q$, $q = \overline{1,N}$. Нехай r елементів 1-періодичного ГЛД рівні нулю, тобто $c_{j_1} = \dots = c_{j_r} = 0$. Тоді перепозначимо елементи, які відмінні від нуля, і одержимо 1-періодичний гіллястий ланцюговий дріб спеціального вигляду з $(N-r)$ вітками галуження. Отже, умова $c_q = 0$, $q = \overline{1,N}$ не зменшує загальності.

Визначимо рекурентно величини $R_n^{(q,j)}$

$$R_n^{(1,j)} = 1 + \frac{c_{1,j}}{R_{n-1}^{(1,j+1)}}, \quad R_n^{(q,j)} = 1 + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{c_{k,1}}{R_{n-1}^{(k,2)}} + \frac{c_{q,j}}{R_{n-1}^{(q,j+1)}} \tag{4}$$

при початкових значеннях: $R_0^{(q,j)} = 1$, $R_{-1}^{(q,j)} = 1$, $q = \overline{1,N}$; $j \geq 1$. Назвемо $R_n^{(q,j)}$ – j-м залишком q-ої вітки n-го порядку. Для залишків $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} R_n^{(q,m)} &= R_n^{(q,s)} \quad (m = r_q p_q + s; 1 \leq s \leq p_q), \\ R_n^{(q,m)} &= R_n^{(q-1,1)} + \frac{c_{q,m}}{R_{n-1}^{(q,m+1)}} \quad (m + 1 \leq p_q). \end{aligned} \tag{5}$$

Залишки 1-періодичного ГЛД позначимо $R_n^{(q)}$, $q = \overline{1,N}$; $n \geq 1$. Підхідним дробом n-го порядку $\overrightarrow{p}$-періодичного дробу (3) називають вираз $F_n = \left(1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k,s}}{1}\right)^{-1}$, $n \geq 1$, $F_0 = 1$. Очевидно, що $F_n = \left(R_n^{(N,1)}\right)^{-1}$. Дріб (3) збігається, якщо існує скінченна границя послідовності $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Багатовимірні узагальнення теореми Worpitsky та овальної

У роботі [4] встановлено багатовимірний аналог теореми Worpitsky для гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду (2), де $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $b_{i(k)} = 1$, $i(k) \in \mathcal{I}$. Доведено, що якщо $|a_{i(k)}| \leq 1/(4i_{k-1})$, $k \geq 1$, $i_0 = N$, то дріб (2) збігається. Для 1-періодичного ГЛД ці умови запишуться у вигляді: $|c_q| \leq 1/(4N)$, $q = \overline{1,N}$, а для $\overrightarrow{p}$-періодичного – у вигляді: $|c_{q,1}| \leq 1/(4N)$, $|c_{q,j}| \leq 1/(4q)$, $q = \overline{1,N}$; $j = \overline{2,p_q}$.

Теорема 1. Нехай існує додатна стала C, $0 < C \leq 1/4$, така, що для елементів $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД (3) виконуються умови:

$$|c_{1,j}| \leq C, \quad j = \overline{1,p_q}; \quad \sum_{s=1}^{q-1} |c_{s,1}| + |c_{q,j}| \leq C, \quad q = \overline{2,N}; j = \overline{1,p_q}. \tag{6}$$

Тоді справджується оцінка швидкості збіжності ГЛД (3):

$$|F - F_m| \leq \begin{cases} L \cdot \xi^m, & \text{якщо } 0 < C < 1/4; \\ \dfrac{4}{m+1}, & \text{якщо } C = 1/4. \end{cases} \tag{7}$$

де F_m – m-й підхідний дріб ГЛД (3), F – значення цього дробу, $L = 2\dfrac{1+\sqrt{1-4C}}{1-\xi}$, $\xi = \dfrac{1-\sqrt{1-4C}}{1+\sqrt{1-4C}}$.

Доведення. Для встановлення оцінки швидкості збіжності дробу (3) використаємо формулу різниці двох підхідних дробів ГЛД (2), де $n > m > 0$, $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ і $b_{i(k)} = 1$

$$F_n - F_m = \frac{(-1)^{m+1}}{Q_{i(0)}^{(n)} Q_{i(0)}^{(m)}} \sum_{i_1=1}^{N} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}} \frac{\prod_{k=1}^{m} a_{i(k)}}{\prod_{k=1}^{m} Q_{i(k)}^{(n-1)} Q_{i(k)}^{(m-1)}}, \tag{8}$$

де $Q_{i(s)}^{(r)} = 1$, $r = s-1, s$; $Q_{i(k)}^{(s)} = 1 + \sum\limits_{i_{k+1}=1}^{i_k} \dfrac{a_{i(k+1)}}{Q_{i(k+1)}^{(s)}}$, $k = \overline{1, s-1}$, $s \geq 1$ [4].

Нехай дріб (2) є $\overrightarrow{p}$-періодичним і тотожним ГЛД (3), тоді $Q_{i(k)}^{(n)} = R_{n-k}^{(i_k,k)}$ і $a_{i(k)} = c_{i_k,s}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, де індекс s визначено вище. З умов теореми випливає, що $\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} |a_{i(k)}| = |c_{1,1}| + |c_{2,1}| + \ldots + |c_{i_{k-2},1}| + |c_{i_{k-1},k}| \leq C$, $i_k = \overline{1, N}$; $k \geq 1$.

Із рекурентних співвідношень (5) випливає, що $|R_n^{(q,j)}| \geq g_n$, $n \geq 0$, $q = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, p_q}$, де g_n – n-ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу $1 + \dfrac{-C|}{|1} + \dfrac{-C|}{|1} + \ldots$.

1. Нехай $C < 1/4$. В [11] показано, що $g_n = \dfrac{x^{n+2} - y^{n+2}}{x^{n+1} - y^{n+1}}$, $n \geq 0$, де $x = (1 + \sqrt{1-4C})/2$, $y = (1 - \sqrt{1-4C})/2$. Отже,

$$\prod_{k=1}^{m} \left(|R_{n-k-1}^{(i_k,k)}| |R_{m-k-1}^{(i_k,k)}| \right) \geq \prod_{k=1}^{m} (g_{n-k-1} g_{m-k-1}) \geq x^{2m} \frac{1-\xi}{x},$$

де $\xi = y/x$, $g_{-1} = 1$. Враховуючи, що $C = x \cdot y$ і

$\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\ldots\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}}\prod_{r=1}^{m}|a_{i(r)}|\le C^m$, маємо оцінку

$$|F_n-F_m|\le\frac{1}{g_n\cdot g_m}\frac{xC^m}{(1-\xi)x^{2m}}\le\frac{4x}{1-\xi}\left(\frac{y}{x}\right)^m=L\cdot\xi^m.$$

2. Якщо $C=1/4$, то $g_n=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$ і $\prod_{k=1}^{m}(g_{n-k-1}g_{m-k-1})=\dfrac{4^m(n-m+1)}{(n+1)(m+1)}$ [6]. Крім цього $\sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{i_1}\ldots\sum_{i_m=1}^{i_{m-1}}\prod_{r=1}^{m}|a_{i(r)}|\le$ $\le 1/4^m$. Отже,

$$|F_n-F_m|\le\frac{1}{g_n\cdot g_m}\cdot\frac{1}{4^m}\cdot\frac{4^m(n-m+1)}{(n+1)(m+1)}=4\frac{n-m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Переходячи до границі при $n\to\infty$, одержуємо оцінку (7). Ця оцінка є точною для 1-періодичного дробу (3) при $C=1/4$. Доведення завершено.

Позначимо через $\mathcal{B}(\Gamma;\rho)$ замкнений круг в $\mathbb{C}$ з центром у точці Γ та радіусом ρ. Нехай $\Gamma_{q,j}\in\mathbb{C}$, $\rho_{q,j}>0$ – задані числа такі, що $|\Gamma_{q,j}|<\rho_{q,j}$, $\rho^*_{q,j}=\sum_{j=1}^{q-1}\rho_{j,1}+\rho_{q,j}$ і $\Gamma^*_{q,j}=\sum_{j=1}^{q-1}\Gamma_{j,1}+\Gamma_{q,j}$, $\rho^*_{q,j}<|1+\Gamma^*_{q,j}|$, $q=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,p_q}$.

Теорема 2. *Нехай елементи $\overrightarrow{p}$-періодичного ГЛД (3) належать овальним областям $\mathcal{O}_{q,j}$, тобто $c_{q,j}\in\mathcal{O}_{q,j}$, $q=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,p_q}$,*

$$\mathcal{O}_{q,j}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-d_{q,j}|+|z|\frac{\rho^*_{q,j+1}}{|1+\overline{\Gamma}^*_{q,j}|}<\frac{\rho_{q,j}}{|\Gamma_{q,j}|}|d_{q,j}|\right\},\qquad(9)$$

де $d_{q,j}=\Gamma_{q,j}(1+\Gamma^*_{q,j+1})\left(1-\dfrac{\rho^{*2}_{q,j+1}}{|1+\Gamma^*_{q,j+1}|^2}\right)$, $\Gamma_{q,p_q+1}=\Gamma_{q,1}$, $\rho_{q,p_q+1}=$ $=\rho_{q,1}$, $q=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,p_q}$.

Тоді

1. *Дріб (3) та послідовності його залишків $\{R_n^{(q,1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q=\overline{1,N}$, збігаються.*

2. *Залишки дробу (3) належать кругам:* $R_n^{(q,j)} \in \mathcal{B}\left(1+\Gamma^*_{q,j};\rho^*_{q,j}\right)$, $q=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,p_q}$, *і n-ні підхідні дроби $F_n \in \mathcal{K}$, $n \geq 1$, де*

$$\mathcal{K} = \mathcal{B}\left(\frac{\overline{\Gamma}^*_{N,1}}{|1+\Gamma^*_{N,1}|^2-\rho^{*2}_{N,1}}; \frac{\rho^*_{N,1}}{|1+\Gamma^*_{N,1}|^2-\rho^{*2}_{N,1}}\right).$$

Доведення. Покажемо, що круги $\mathcal{B}(\Gamma_{q,j},\rho_{q,j})$ є множинами значень, а овальні області $\mathcal{O}_{q,j}$ – множинами елементів дробу (3), тобто мають місце включення

$$\frac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1+\Gamma^*_{q,j+1};\rho^*_{q,j+1})} \subset \mathcal{B}(\Gamma_{q,j};\rho_{q,j}) \quad q=\overline{1,N}; j=\overline{1,p_q}. \tag{10}$$

Очевидно, що $0 \overline{\in} \mathcal{B}(1+\Gamma^*_{q,j},\rho^*_{q,j})$. Позначимо через $C_{q,j}$ та $R_{q,j}$ відповідно центр та радіус круга $\dfrac{c_{q,j}}{\mathcal{B}(1+\Gamma^*_{q,j+1};\rho^*_{q,j+1})}$. Включення (10) еквівалентне виконанню нерівності: $|C_{q,j}-\Gamma_{q,j}|+$ $+R_{q,j} \leq \rho_{q,j}$, що рівносильно умові: $\left|\dfrac{c_{q,j}(1+\overline{\Gamma}^*_{q,j+1})}{|1+\Gamma^*_{q,j+1}|^2-\rho^{*2}_{q,j+1}}-\Gamma_{q,j}\right|+$ $+\dfrac{|c_{q,j}|\rho^*_{q,j+1}}{|1+\Gamma^*_{q,j+1}|^2-\rho^{*2}_{q,j+1}} \leq \rho_{q,j}$ або $c_{q,j} \in \mathcal{O}_{q,j}$. Враховуючи рекурентні співвідношення (5), маємо: $R_n^{(q,j)} \in \mathcal{B}(1+\Gamma^*_{q,j};\rho^*_{q,j})$, $n \geq 1$; $q=\overline{1,N}$; $j=\overline{1,p_q}$.

Для доведення збіжності дробу (3) використаємо багатовимірне узагальнення теореми Stieltjes-Vitali [6]. Для цього побудуємо функціональні гіллясті ланцюгові дроби вигляду

$$1+\operatorname*{D}_{k=1}^{\infty}\sum_{j_k=1}^{j_{k-1}}\frac{z_{j_k,s}}{1} \quad j_0=\overline{1,N}. \tag{11}$$

Нехай $R_n^{(q,1)}(z^{\sigma_q})$ – n-ий залишок дробу (11), де $j_0=q$, $\sigma_q=\sum_{j=1}^{q}p_j$, $z^{(\sigma_q)}=(z_{1,1},z_{1,2},\dots,z_{1,p_1},\dots,z_{q,1},z_{q,2}\dots;z_{q,p_q})$, $q=\overline{1,N}$. Доведемо, що існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}R_n^{(q,1)}(z^{\sigma_q})$.

Визначимо множину

$$\mathcal{O}^{(q)} = \mathcal{O}_{1,1} \times \ldots \times \mathcal{O}_{1,p_1} \times \ldots \times \mathcal{O}_{q,1} \times \ldots \times \mathcal{O}_{q,p_q}.$$

Нехай $\mathcal{D} = \{z^{(\sigma_q)} \in \mathbb{C}^{\sigma_q} : |z_k| \leq r < r_q, k = \overline{1,\sigma_q}\}$ – замкнений полікруг, який міститься у множині $\mathcal{O}^{(q)}$, де $r_q = \min\{1/(4N), |v_{s,m}| : s = \overline{1,q}; m = \overline{1,p_q}\}$ і $v_{q,j}$– мала вісь овалу $\mathcal{O}_{q,j}$, яку знаходимо за формулою $v_{q,j} = (|\Gamma_{q,j}| - \rho_{q,j})(|1+\Gamma^*_{q,j}| - \rho^*_{q,j})$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$. Збіжність $R_n^{(q,1)}(z^{\sigma_q})$ на компакті $\mathcal{D}$ множини $\mathcal{O}^{(q)}$ випливає з узагальнення теореми Worpitsky для ГЛД спеціального вигляду [4]. Зокрема, одержуємо збіжність послідовності залишків $R_n^{(N,1)}(z^{\sigma_N})$ в точці $M \in \mathcal{O}^{(N)}$ з координатами $z_{q,j} = c_{q,j}$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$.

Оскільки $F_n = \left(R_n^{(N,1)}\right)^{-1}$ і $|R_n^{(q,j)}| > \delta$, де $\delta = \min(|1+\Gamma^*_{q,j}|-\rho^*_{q,j})$, $q = \overline{1,N}$; $j = \overline{1,p_q}$, то існує границя послідовності n-х підхідних дробів $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$. Враховуючи, що $R_n^{(N,1)} \in \mathcal{B}(1+\Gamma^*_{N,1}, \rho^*_{N,1})$, маємо $F_n \in \mathcal{K}$, $n \geq 1$. Доведення завершено.

Зауваження. Якщо $\Gamma_{q,j} = 0$, $q = \overline{1,N}$, $j = \overline{1,p_q}$, то $\overline{\mathcal{O}}_{q,j} = \mathcal{B}(0; \rho_{q,j}(1-\rho^*_{q,j+1})$. Ці круги називають кругами Worpitsky. Позначимо їх $\mathcal{W}_{q,j}$.

Розглянемо 1-періодичний ГЛД вигляду

$$1 + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}, \tag{12}$$

де $c_q \in \mathbb{C}$, $q = \overline{1,N}$. Чи можна підібрати радіуси кругів ρ_q, $q = \overline{1,N}$, у теоремі 2 так, щоб $\mathcal{W}_q \supseteq \mathcal{B}(0; 1/(4N))$. Виберемо числа α_q так, щоб система рівнянь

$$\rho_q(1-\rho^*_q) = \alpha_q \quad q = \overline{1,N}. \tag{13}$$

мала розв'язки і вони задовольняли умови: $\rho_q > 0$, $\rho^*_q < 1$. Зокрема, взявши $\alpha_q = 1/(4N)$, $q = \overline{1,N-1}$, виберемо ρ_N так, щоб вираз $\rho_N(1-\rho^*_N)$ досягав максимального значення.

При $N = 2$, поклавши $\alpha_1 = 1/8$, маємо: $\rho_1 = (2-\sqrt{2})/4$, $\rho_2 = (2+\sqrt{2})/8$. Тоді $\mathcal{W}_1 = \mathcal{B}(0; 1/8)$ і $\mathcal{W}_2 = \mathcal{B}(0; (3+2\sqrt{2})/32) \supset \mathcal{B}(0; 1/8)$.

При $N = 3$, поклавши $\alpha_1 = 1/12$, маємо: $\rho_1 = (3 - \sqrt{6})/6$, $\rho_2 = (3+\sqrt{6}-\sqrt{3+6\sqrt{6}})/12$, $\rho_3 = (3+\sqrt{6}+\sqrt{3+6\sqrt{6}})/24$. Отже, маємо: $\mathcal{W}_1 = \mathcal{W}_2 = \mathcal{B}(0; 1/12)$ і $\mathcal{W}_3 = \mathcal{B}(0; 0.161881) \supset \mathcal{B}(0; 1/12)$.

Якщо розглянемо аналогічну задачу, але при умовах, що всі α_q, $q = \overline{1, N}$, досягають максимального значення, то одержимо $\mathcal{W}_q = \mathcal{B}(0; 1/4^q)$.

3. Кутові області збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

У статті [2] встановлено, що кутові області $E_{i(k)} = \{z_{i(k)} \in \mathbb{C} : |z_{i(k)}| \le M_{i(k)}, 0 \le \arg z_{i(k)} < \pi - \delta, \arg z_{i(k)} \ge \arg z_{i(k)j}, j = \overline{1, i_k}\}$, $i(k) \in \mathcal{I}$ є областями збіжності для ГЛД (2) спеціального вигляду при $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ і $b_{i(k)} = 1$, $i(k) \in \mathcal{I}$, якщо додатні сталі $M_{i(k)}$ такі, що $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\max M_{i(k)}, i(k) \in \mathcal{I}\right)^{-1} = \infty$. Встановимо збіжність 1-періодичного ГЛД у кутових областях.

Теорема 3. *Нехай елементи 1-періодичного ГЛД*

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{D}} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{c_{i_k}}{1}, \tag{14}$$

де $c_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, N}$, *задовольняють умови:*

$$0 \le \arg c_N \le \ldots \le \arg c_1 \le \pi/2 \tag{15}$$

або

$$-\pi/2 \le \arg c_1 \le \ldots \le \arg c_N \le 0. \tag{16}$$

Тоді дріб (14) збігається і має місце оцінка:

$$|F_{n+1} - F_n| \le L \binom{N}{N+n-1} \xi^n, \tag{17}$$

де $n \ge N + 1$; $L = \max\limits_{j=\overline{1,N}} \{|c_j|\}$; $\xi = \dfrac{L}{\sqrt{1+L^2}}$.

Доведення. Для оцінки швидкості збіжності 1-періодичного дробу (14) використаємо формулу (8) різниці двох підхідних дробів

ГЛД спеціального вигляду оберненого до дробу (2). Враховуючи його періодичність і те, що $Q_{i(k)}^{(n)} = R_{n-k}^{(i_k,k)}$ і $a_{i(k)} = c_{i_k}$, $i(k) \in \mathcal{I}$, маємо:

$$|F_{n+1} - F_n| \leq \sum_{i_1=1}^{i_0} \cdots \sum_{i_{n+1}=1}^{i_n} \frac{|c_{i_{n+1}}|}{|R_{n+1}^{(i_{n+1})}|} \prod_{k=1}^{n} \omega_{n-k}^{(i_k)},$$

де $\omega_s^{(q)} = \dfrac{|c_q/R_{s-1}^{(q)}|}{|R_s^{(q)}|}$, $q = \overline{1,N}$; $1 \leq s \leq n$.

Позначимо $u_n^{(q)}$ та $v_n^{(q)}$, відповідно, дійсну та уявну частину залишку $R_n^{(q)}$, $n \geq 1$, $q = \overline{1,N}$. Тоді, використовуючи рекурентні співвідношення (5), маємо:

$$u_n^{(q)} = 1 + \sum_{k=1}^{q} |c_k| \left(u_{n-1}^{(k)} \cos\alpha_k + v_{n-1}^{(k)} \sin\alpha_k \right) / |R_{n-1}^{(k)}|^2,$$

$$v_n^{(q)} = \sum_{k=1}^{m} |c_k| \left(u_{n-1}^{(k)} \sin\alpha_k - v_{n-1}^{(k)} \cos\alpha_k \right) / |R_{n-1}^{(k)}|^2.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |R_n^{(q)}|^2 = 1 + \sum_{k=1}^{q} & \left(2Re \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} + \frac{|c_k|^2}{|R_{n-1}^{(k)}|^2} \right) \\ & + \sum_{\substack{k,j=1; \\ k<j}}^{q} \left(Re \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} Re \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} + Im \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} Im \frac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} \right). \end{aligned}$$

У роботі [1] встановлено формули для дійсної та уявної частин залишків ГЛД (2). Враховуючи ці формули і періодичність дробу (14), отримаємо:

$$\begin{aligned} Re \frac{c_q}{R_n^{(q)}} = \frac{Re c_q}{|R_n^{(q)}|^2} & + \sum_{i_n=1}^{q} \frac{Re c_q \overline{c}_{i_n}}{|R_n^{(q)}|^2 |R_{n-1}^{(i_n)}|^2} \\ & + \ldots + \sum_{i_n=1}^{i_q} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_n} \cdots \sum_{i_1=1}^{i_2} \frac{Re c_q \overline{c}_{i_n} c_{i_{n-1}} \ldots \widetilde{c}_{i_1}}{|R_n^{(q)}|^2 \prod_{r=1}^{n} |R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2} \end{aligned} \qquad (18)$$

$$Im\frac{c_q}{R_n^{(q)}}=\frac{Imc_q}{|R_n^{(q)}|^2}+\sum_{i_n=1}^{q}\frac{Imc_q\overline{c}_{i_n}}{|R_n^{(q)}|^2|R_{n-1}^{(i_n)}|^2}$$
$$+\ldots+\sum_{i_n=1}^{q}\sum_{i_{n-1}=1}^{i_n}\cdots\sum_{i_1=1}^{i_2}\frac{Imc_q\overline{c}_{i_n}c_{i_{n-1}}\ldots\widetilde{c}_{i_1}}{|R_n^{(q)}|^2\prod_{r=1}^{n}|R_{n-r}^{(i_{n+1-r})}|^2}, \quad (19)$$

де $q=\overline{1,N}$; $\widetilde{c}_q=c_q$, якщо n-парне, або $\widetilde{c}_q=\overline{c}_q$, якщо n-непарне.

Після еквівалентних перетворень дріб (14) запишемо у вигляді:

$$1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}1/d_{i(k)},$$

де елементами визначаються: $d_{i(k)}=\prod_{p=1}^{k}c_{i_p}^{(-1)^{k+p-1}}=|c_{i_1}^{(-1)^k}|\times$ $\times|c_{i_2}^{(-1)^{k+1}}|\ldots|c_{i_k}^{(-1)^{2k-1}}|\exp\left\{\sum_{p=1}^{k}(-1)^{k+p-1}\alpha_{i_p}\right\}$, $\alpha_m=\arg c_m$, $m=\overline{1,N}$.

Доведемо, що при виконанні умов (15), справджуються нерівності: $Re\frac{c_q}{R_n^{(q)}}\geq 0$ і $Im\frac{c_q}{R_n^{(q)}}\geq 0$, $q=\overline{1,N}$; $n\geq 0$. Умови (15) запишемо у вигляді: $\frac{\pi}{2}\geq\alpha_{i_k}\geq\alpha_{i_{k+1}}\geq\ldots\geq\alpha_{i_{k+n}}\geq 0$. Звідси $0\leq\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\alpha_{i_{k+p}}\leq\pi/2$. Отже, виконуються нерівності:

$$Rec_{i_k}\overline{c}_{i_{k+1}}c_{i_{k+2}}\ldots\widetilde{c}_{i_{k+n}}\geq 0,$$
$$Imc_{i_k}\overline{c}_{i_{k+1}}c_{i_{k+2}}\ldots\widetilde{c}_{i_{k+n}}\geq 0.$$

Згідно з формулами (18)-(19) маємо: $Re\frac{c_{i_k}}{R_n^{(i_k)}}\geq 0$ та $Im\frac{c_{i_k}}{R_n^{(i_k)}}\geq 0$, $n\geq 0$.

З умов (16) маємо: $-\pi/2\leq\alpha_{i_{k+n}}\leq\alpha_{i_{k+n-1}}\leq\ldots\leq\alpha_{i_k}\leq 0$. Звідки $-\pi/2\leq\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\alpha_{i_{k+p}}\leq 0$ і

$$Rec_{i_k}\overline{c}_{i_{k+1}}c_{i_{k+2}}\ldots\widetilde{c}_{i_{k+n}}\geq 0,$$
$$Imc_{i_k}\overline{c}_{i_{k+1}}c_{i_{k+2}}\ldots\widetilde{c}_{i_{k+n}}\leq 0.$$

З формул (18)-(19) випливає, що $Re\frac{c_{i_k}}{R_n^{(i_k)}}\geq 0$ і $Im\frac{c_{i_k}}{R_n^{(i_k)}}\leq 0$,

$n \geq 0$. Оскільки $ReR_n^{(q)} = 1 + \sum_{j=1}^{q} Re\dfrac{c_j}{R_{n-1}^{(j)}} \geq 1$, $q = \overline{1,N}$; $n \geq 0$, то справджуються оцінки: $\dfrac{|c_q|}{|R_n^{(q)}|} \leq \dfrac{|c_q|}{ReR_n^{(q)}} \leq L$ та

$$\omega_s^{(q)} = \frac{|c_q|/|R_{s-1}^{(q)}|}{|R_s^{(q)}|} \leq \frac{|c_q|/|R_{s-1}^{(q)}|}{\sqrt{1+|c_q|^2/|R_{s-1}^{(q)}|^2}} \leq \frac{L}{\sqrt{1+L^2}} = \xi \quad s = \overline{1,n}.$$

Тому, враховуючи, що $|c_{n+1}/R_{n+1}^{(i_{n+1})}| \leq L$, маємо оцінку (17).

4. Необхідна умова збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду

Т. М. Антонова у [3] встановила необхідну та достатню умову збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального дробу (2) з дійними елементами, у якого $c_q = -R$, $q = \overline{1,N}$ при певних додаткових обмеженях на R.

Теорема 4. *Якщо 1-періодичний ГЛД (14) з дійсними елементами збігається, тоді його елементи задовольняють умови:* $c_q \geq -X_{q-1}^2/4$, *де* $X_q = \frac{1}{2}(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q})$, $X_0 = 1$, $q = \overline{1,N}$. *Якщо виконуються умови:* $c_q > -X_{q-1}^2/4$, *то цей 1-періодичний дріб збігається.*

Доведення. У теоремі 2 [7] показано, що з умов: $c_q > -X_{q-1}^2/4$, $q = \overline{1,N}$, випливає збіжність дробу (14).

Нехай дріб (14) збігається, тобто існує скінченна границя $\lim\limits_{n\to\infty} F_n = \lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(N)} = Z_N$. Розглянемо послідовності його залишків $\{R_n^{(q)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1,N}$. Покажемо, що якщо існують границі цих послідовностей, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q)} = Z_q$, $q = \overline{1,N}$, то $Z_q \neq 0, \infty$. З означення збіжності дробу випливає, що $Z_N \neq \infty$. Припустимо, що $Z_N = 0$. Тоді із співвідношення

$$R_n^{(k)} = R_n^{(k-1)} + \frac{c_k}{R_{n-1}^{(k)}} \tag{20}$$

при $k = N$ випливає, що $Z_{N-1} = \infty$. На основі таких самих міркувань маємо: $Z_q = \infty$, $q = \overline{1,N-1}$. Оскільки $R_n^{(1)}$ – n-ий підхідний дріб 1-періодичного неперервного дробу, то Z_1 – нерухома точка дробово-лійнійного відображення $s_1(\omega) = 1 + c_1/\omega$. Однак, $Z_1 = \infty$ не є нерухомою точною дробово-лінійного відображення $s_1(\omega)$. Отже, ми прийшли до суперечності. Тому $Z_N \neq 0$ і $Z_q \neq \infty$, $q = \overline{1, N-1}$. Повторюючи ці самі міркування, маємо: $Z_q \neq 0$, $q = \overline{1, N-1}$.

Доведемо, що зі збіжності послідовності $\{R_n^{(N)}\}_{n=1}^{\infty}$ випливає збіжність всіх послідовностей $\{R_n^{(q)}\}_{n=1}^{\infty}$, $q = \overline{1, N-1}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(N)} = Z_N$ і $Z_N \neq 0, \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(N-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(N)} - \dfrac{c_{N-1}}{R_{n-1}^{(N)}} = Z_{N-1}$ і $Z_{N-1} \neq 0, \infty$. Повторюючи ці міркування, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(q)} = Z_q$ і $Z_q \neq 0, \infty$; $1 \leq q \leq N$.

Знайдемо границі Z_q $(q = \overline{1, N})$ і доведемо методом математичної індукції по q, що $Z_q > 0$ і $Z_q = X_q$, де $X_q = \frac{1}{2}(X_{q-1} + \sqrt{X_{q-1}^2 + 4c_q})$, $q = \overline{1, N}$. Нехай Z_1 – границя збіжного 1-періодичного неперервного дробу $1 + \dfrac{c_1|}{|1} + \dfrac{c_1|}{|1} + \ldots$. Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^{(1)} = Z_1$, де $Z_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c_1})$ [11,12]. Оскільки $Z_1 \in \mathbb{R}$, то $Z_1 > 0$ і $Z_1 = X_1$.

Припустимо, що для деякого k виконуються співвідношення: $Z_s = \frac{1}{2}(Z_{s-1} + \sqrt{Z_{s-1}^2 + 4c_s})$, $2 \leq s \leq k$, і $Z_s > 0$. Розглянемо послідовність залишків $(k+1)$-ої гілки $\{R_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$, де

$$R_n^{(k+1)} = R_n^{(k)} + \frac{c_{k+1}|}{|R_{n-1}^{(k)}} + \frac{c_{k+1}|}{|R_{n-2}^{(k)}} + \ldots + \frac{c_{k+1}|}{|R_0^{(k)}}$$

— зворотний дріб гранично-періодичного неперервного дробу. Цій гілці відповідає дробово-лінійне відображення $t_{k+1}(\omega) = Z_k + c_{k+1}/\omega$. З теореми 4.13 [11] маємо: якщо послідовність $\{R_n^{(k+1)}\}_{n=1}^{\infty}$ збігається, то вона збігається до нерухомої точки Z_{k+1}, де $Z_{k+1} = \frac{1}{2}(Z_k + \sqrt{Z_k^2 + 4c_{k+1}})$. Отже, $Z_{k+1} = X_{k+1}$. Більше того, $Z_{k+1} > 0$. Доведення завершено.

Зауваження. Перша частина доведення теореми 4 переноситься на випадок, коли $c_q \in \mathbb{C}$, $q = \overline{1, N}$. Зокрема, із збіжності дробу (14) з комплексними елементами випливає існування і відмінність від нуля границь послідовностей всіх залишків $\{R_n^{(q)}\}_{n=1}^{\infty}$, тобто $\lim_{n\to\infty} R_n^{(q)} = Z_q$, $Z_q \neq 0, \infty$, $q = \overline{1, N}$.

1. *Антонова Т. М.* Багатовимірне узагальнення теореми про параболічні області збіжності неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1999. — **42**, № 4. — С. 7–12.
2. *Антонова Т. М., Боднар Д. І.* Області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Теорія наближення функцій та її застосування. — Праці Ін-ту математики НАН України. — 2000. — **31.** – С. 19–32.
3. *Антонова Т. М.* Про прості кругові множини абсолютної збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпат. мат. публікації. — 2012. — **4**, № 2. — С. 165–174.
4. *Баран О. Є.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1996. — **39**, № 2. – С. 35–38.
5. *Баран О. Є.* Деякі області збіжності гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Карпатські мат. публікації. — 2013. — **5**, № 1. — С. 4–13.
6. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби / Д. И. Боднар — Киев : Наукова думка, 1986. — 176 с.
7. *Боднар Д. І., Бубняк М. М.* Про збіжність 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. вісник НТШ. — 2011. — **8**. — С. 5–16.
8. *Боднар Д. І., Бубняк М. М.* Оцінки швидкості поточкової та рівномірної збіжності 1-періодичного гіллястого ланцюгового дробу спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2013. — **56**, № 4. — С. 24–32.
9. *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби / Х. Й. Кучмінська — Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2010. — 218 с.
10. *Jones W. B., Thron W. J.* Continued Fractions // Analytic Theory and Applications, Encyclopedia of Mathematics and its Applications. – New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1980. — 428 p.
11. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions. Atlantis Press – World Scientific, Amsterdam-Paris: 2008. — 304 p.
12. *Wall H. S.* Analytic Theory of Continued Fractions. – New York:Van Nostrand, 1948. — 445 p.