Збiрник праць Iн-ту математики НАН України 2015, Т.12, №4, 67-78

УДК 517.518

С. Б. Вакарчук (Днепропетровский университет имени Альфреда Нобеля, Днепропетровск)
М. Б. Вакарчук (Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ "УГЛОМ" АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ БИКРУГЕ ФУНКЦИЙ

Exact in some sense inequalities of the best approximation by "angles" , have been obtained for the classes $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2), r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, of two complex variables functions analytic in the unit bicircle U^2. These results are the application of Kolmogorov type inequalities for some problems of the approximation theory of functions.

Для аналитических в единичном бикруге U^2 функций двух комплексных переменных, которые принадлежат классу $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2), r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, получены в определенном смысле точные неравенства, связанные с наилучшим приближением "углом". Указанные результаты являются приложением неравенств типа Колмогорова к некоторым задачам теории аппроксимации функций.

Данную статью можно рассматривать как продолжение исследований авторов [1]–[5]. Пусть $\mathbf{z} = (z_1, z_2) = (\rho_1 e^{it_1}, \rho_2 e^{it_2})$, где $0 \leqslant \rho_j < \infty$, $0 \leqslant t_j < 2\pi$, $j = 1, 2$, — точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$; $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |z_j| < 1, j = 1, 2\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$; $A(U^2)$ — класс аналитических в U^2 функций. Символом $\mathfrak{B}_2(U^2)$ обозначим банахово пространство всех функций $f \in A(U^2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\| := \|f\|_{\mathfrak{B}_2(U^2)} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{U^2} |f(z_1, z_2)|^2 d\sigma_{z_1} d\sigma_{z_2} \right\}^{1/2},$$

где $d\sigma_{z_j} := dx_j dy_j$ $(z_j = x_j + iy_j)$; $x_j, y_j \in \mathbb{R}$, $x_j^2 + y_j^2 < 1, j = 1, 2$.

Полагая

$$M_2(f;\rho_1,\rho_2) := \left\{\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho_1 e^{it_1},\rho_2 e^{it_2})|^2 dt_1 dt_2\right\}^{1/2},$$

получаем

$$\|f\| = \left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \rho_1\rho_2 M_2^2(f;\rho_1,\rho_2)d\rho_1 d\rho_2\right\}^{1/2}. \qquad (1)$$

Для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_2(U^2)$, имеющей разложение в ряд Тейлора

$$f(z_1,z_2) = \sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2},$$

где $c_{j_1,j_2}(f), j_1, j_2 \in \mathbb{Z}_+$, — коэффициенты Тейлора, используя формулу (1), имеем

$$\|f\| = \left\{\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}\frac{1}{4(j_1+1)(j_2+1)}|c_{j_1,j_2}(f)|^2\right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Пусть $U_{z_j}, j = 1,2,$ — круг единичного радиуса в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной z_j, т.е. $U_{z_j} := \{z_j \in \mathbb{C} : |z_j| < 1\}$, $A(U_{z_j})$ — множество функций, аналитических в U_{z_j}. Через $\mathfrak{B}_2(U_{z_j})$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in A(U_{z_j})$, для которых конечная норма

$$\|f\|_{\mathfrak{B}_2(U_{z_j})} := \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{U_{z_j}}|f(z_j)|^2 d\sigma_{z_j}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\rho_j|f(\rho_j e^{it_j})|^2 dt_j d\rho_j\right\}^{1/2}.$$

Пусть $\mathfrak{N}_N \subset \mathfrak{B}_2(U_{z_1})$ и $\mathfrak{M}_M \subset \mathfrak{B}_2(U_{z_2})$ — конечномерные подпространства с базисами $\{z_1^{j_1}\}_{j_1=0}^{N-1}$ и $\{z_2^{j_2}\}_{j_2=0}^{M-1}$ соответственно, где $N, M \in \mathbb{N}$. В пространстве $\mathfrak{B}_2(U^2)$ рассмотрим множество

$$G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M) := \mathfrak{B}_2(U_{z_2}) \otimes \mathfrak{N}_N \oplus \mathfrak{B}_2(U_{z_1}) \otimes \mathfrak{M}_M, \tag{3}$$

где символы $\otimes$ и $\oplus$ обозначают соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Элементы множества (3) имеют следующий вид:

$$g_{N,M}(z_1, z_2) := \sum_{j_1=0}^{N-1} \varphi_{j_1}(z_2) z_1^{j_1} + \sum_{j_2=0}^{M-1} \psi_{j_2}(z_1) z_2^{j_2}, \tag{4}$$

где $\{\varphi_{j_1}\}_{j_1=0}^{N-1} \subset \mathfrak{B}_2(U_{z_2})$ и $\{\psi_{j_2}\}_{j_2=0}^{M-1} \subset \mathfrak{B}_2(U_{z_1})$ — произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (4) будем называть "углами" из алгебраических полиномов комплексных переменных z_1 и z_2. Напомним, что понятие "угла" в случае аппроксимации вещественных функций многих переменных впервые было введено М.К.Потаповым в 1969 году. В случае аналитических функций нескольких комплексных переменных вопросы аппроксимации "углом" рассматривались, например, в работах [4], [6].

Для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_2(U^2)$ символом $\mathcal{E}_{N,M}(f)$ обозначим её наилучшее приближение элементами множества (3), т.е.

$$\mathcal{E}_{N,M}(f) := \inf\{\|f - g_{N,M}\| : g_{N,M} \in G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)\}.$$

Под обобщенным полиномом Тейлора порядка (N, M), $N, M \in \mathbb{N}$, аналитической в U^2 функции f будем понимать следующее выражение [6]:

$$T_{N,M}(f; z_1, z_2) := \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2} + \sum_{j_2=0}^{M-1} \sum_{j_1=0}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2} - \\ - \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{M-1} c_{j_1,j_2}(f) z_1^{j_1} z_2^{j_2}. \tag{5}$$

Несложно показать, что функция $T_{N,M}(f)$ может быть представлена в виде (4), т.е. что $T_{N,M}(f)$ — элемент множества $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$.

Далее нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть* $N, M \in \mathbb{N}$ *и* $f \in \mathfrak{B}_2(U^2)$ *— произвольная функция. Тогда имеет место равенство*

$$\mathcal{E}_{N,M}(f) = \|f - T_{N,M}(f)\| = \left\{ \sum_{j_1=N}^{\infty} \sum_{j_2=M}^{\infty} \frac{|c_{j_1,j_2}(f)|^2}{4(j_1+1)(j_2+1)} \right\}^{1/2}, \quad (6)$$

т.е. среди всех элементов $g_{N,M}$ *множества* $G(\mathfrak{N}_N, \mathfrak{M}_M)$ *обобщенный полином Тейлора* $T_{N,M}(f)$ *доставляет функции* f *наилучшее приближение в метрике пространства* $\mathfrak{B}_2(U^2)$.

Доказательство. Поскольку $\{\varphi_{j_1}\}_{j_1=0}^{N-1} \subset \mathfrak{B}_2(U_{z_2})$ и $\{\psi_{j_2}\}_{j_2=0}^{M-1} \subset \mathfrak{B}_2(U_{z_1})$, то справедливы следующие разложения указанных функций в ряды Тейлора:

$$\varphi_{j_1}(z_2) = \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_2}(\varphi_{j_1}) z_2^{j_2}, \quad j_1 = \overline{0, N-1}, \quad (7)$$

$$\psi_{j_2}(z_1) = \sum_{j_1=0}^{\infty} c_{j_1}(\psi_{j_2}) z_1^{j_1}, \quad j_2 = \overline{0, M-1}. \quad (8)$$

Используя соотношения (4) и (7)–(8), получаем

$$g_{N,M}(z_1, z_2) = \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_2}(\varphi_{j_1}) z_1^{j_1} z_2^{j_2} + \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{M-1} c_{j_1}(\psi_{j_2}) z_1^{j_1} z_2^{j_2}. \quad (9)$$

Напомним, что пространство $\mathfrak{B}_2(U^2)$ с введенным в нем скалярным произведением

$$< f; h >:= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{U^2} f(z_1, z_2)\overline{h(z_1, z_2)} d\sigma_{z_1} d\sigma_{z_2},$$

где $f, h \in \mathfrak{B}_2(U^2)$, и нормой $\|f\|^2 =< f; f >$ превращается в гильбертово пространство. Тогда для произвольной функции $f \in \mathfrak{B}_2(U^2)$ с учетом свойств скалярного произведения и формул (2) и (9) запишем

$$\|f - g_{N,M}\|^2 =< f - g_{N,M}; f - g_{N,M} >=$$

$$= \|f\|^2 - < f; g_{N,M} > - < g_{N,M}; f > + \|g_{N,M}\|^2 =$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} \overline{c_{j_2}(\varphi_{j_1})} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{U^2} f(z_1, z_2) \overline{z_1}^{j_1} \overline{z_2}^{j_2} d\sigma_{z_1} d\sigma_{z_2} -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{M-1} \overline{c_{j_1}(\psi_{j_2})} \frac{1}{4\pi^2} \iint_{U^2} f(z_1, z_2) \overline{z_1}^{j_1} \overline{z_2}^{j_2} d\sigma_{z_1} d\sigma_{z_2} -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} c_{j_2}(\varphi_{j_1}) \frac{1}{4\pi^2} \iint_{U^2} \overline{f(z_1, z_2)} z_1^{j_1} z_2^{j_2} d\sigma_{z_1} d\sigma_{z_2} -$$

$$- \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{M-1} c_{j_1}(\psi_{j_2}) \frac{1}{4\pi^2} \iint_{U^2} \overline{f(z_1, z_2)} z_1^{j_1} z_2^{j_2} d\sigma_{z_1} d\sigma_{z_2} + \|g_{N,M}\|^2 = \|f\|^2 -$$

$$- \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{Re(c_{j_1,j_2}(f) \overline{c_{j_2}(\varphi_{j_1})})}{(j_1+1)(j_2+1)} + \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{M-1} \frac{Re(c_{j_1,j_2}(f) \overline{c_{j_1}(\psi_{j_2})})}{(j_1+1)(j_2+1)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{M-1} \frac{Re(c_{j_2}(\varphi_{j_1}) \overline{c_{j_1}(\psi_{j_2})})}{(j_1+1)(j_2+1)} \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4} \left\{ \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{\infty} \frac{|c_{j_2}(\varphi_{j_1})|^2}{(j_1+1)(j_2+1)} + \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{M-1} \frac{|c_{j_1}(\psi_{j_2})|^2}{(j_1+1)(j_2+1)} \right\}.$$

Отсюда после ряда несложных преобразований получаем

$$\|f - g_{N,M}\|^2 = \frac{1}{4} \left\{ \sum_{j_1=N}^{\infty} \sum_{j_2=M}^{\infty} |c_{j_1,j_2}(f)|^2 + \right.$$

$$+ \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=M}^{\infty} \frac{|c_{j_1,j_2}(f) - c_{j_2}(\varphi_{j_1})|^2}{(j_1+1)(j_2+1)} + \sum_{j_1=N}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{M-1} \frac{|c_{j_1,j_2}(f) - c_{j_1}(\psi_{j_2})|^2}{(j_1+1)(j_2+1)} +$$

$$\left. + \sum_{j_1=0}^{N-1} \sum_{j_2=0}^{M-1} \frac{|c_{j_1,j_2}(f) - c_{j_2}(\varphi_{j_1}) - c_{j_1}(\psi_{j_2})|^2}{(j_1+1)(j_2+1)} \right\}. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что величина $\|f - g_{N,M}\|$ принимает наименьшее значение в случае одновременного выполнения таких условий:

$$c_{j_2}(\varphi_{j_1}) = c_{j_1,j_2}(f), \quad j_1 = \overline{0, N-1}, j_2 = M, M+1, ..., \tag{11}$$

$$c_{j_1}(\psi_{j_2}) = c_{j_1,j_2}(f), \quad j_2 = \overline{0, M-1}, j_1 = N, N+1, ..., \tag{12}$$

$$c_{j_2}(\varphi_{j_1}) + c_{j_1}(\psi_{j_2}) = c_{j_1,j_2}(f), \quad j_1 = \overline{0, N-1}, j_2 = \overline{0, M-1}. \tag{13}$$

Подставляя в формулу (9) выражения (11)–(13) коэффициентов Тейлора функций φ_{j_1} и ψ_{j_2}, выраженных через коэффициенты Тейлора функции f, получаем соотношение (5). Таким образом, справедлива формула (6). Лемма 1 доказана.

Символом $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$, $r_p \in \mathbb{N}, p = 1, 2$, обозначим класс функций $f \in A(U^2)$, у которых смешанная производная $f^{(r_1,r_2)}$ по переменным z_1 и z_2, а также частные производные $f^{(r_1,0)}$ и $f^{(0,r_2)}$ по переменным z_1 и z_2 соответственно принадлежат пространству $\mathfrak{B}_2(U^2)$. При этом все промежуточные производные функции $f \in \mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$ также принадлежат $\mathfrak{B}_2(U^2)$. Отметим, что справедливо включение $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2) \subset \mathfrak{B}_2(U^2)$. Для любых натуральных чисел $j_p \geqslant r_p$, $p = 1, 2$, полагаем

$$\alpha_{j_p,r_p} := j_p(j_p - 1)...(j_p - r_p + 1).$$

При этом будем считать $\alpha_{j_p,0} := 1, j_p \in \mathbb{N}, p = 1, 2$.

Основным результатом данной статьи является следующая

Теорема 1. *Пусть $N > r_1 \geqslant k_1 \geqslant 1$ и $M > r_2 \geqslant k_2 \geqslant 1$ — произвольные натуральные числа. Тогда для любой функции $f \in \mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$ имеет место неравенство*

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha_{N,r_1-k_1}(N-r_1+1)^{(r_1-k_1)/(2r_1)}(N+1)^{k_1/(2r_1)}}{(\alpha_{N,r_1})^{1-k_1/r_1}\sqrt{N-r_1+k_1+1}} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{M,r_2-k_2}(M-r_2+1)^{(r_2-k_2)/(2r_2)}(M+1)^{k_2/(2r_2)}}{(\alpha_{M,r_2})^{1-k_2/r_2}\sqrt{M-r_2+k_2+1}} \times$$

$$\times \left(\mathcal{E}_{N,M}(f)\right)^{k_1k_2/(r_1r_2)}\left(\mathcal{E}_{N-r_1,M}(f^{(r_1,0)})\right)^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2} \times$$

$$\times \left(\mathcal{E}_{N,M-r_2}(f^{(0,r_2)})\right)^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1} \times$$

$$\times \left(\mathcal{E}_{N-r_1,M-r_2}(f^{(r_1,r_2)})\right)^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}, \qquad (14)$$

которое является точным в том смысле, что существует функция из класса $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$, *обращающая неравенство* (14) *в равенство.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент

$$f(z_1,z_2)=\sum_{j_1=0}^{\infty}\sum_{j_2=0}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}$$

из класса $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$, для которого полагаем

$$e_{N,M}(f;z_1,z_2):=f(z_1,z_2)-T_{N,M}(f;z_1,z_2)=\sum_{j_1=N}^{\infty}\sum_{j_2=M}^{\infty}c_{j_1,j_2}(f)z_1^{j_1}z_2^{j_2}.$$

Очевидно, что $e_{N,M}(f)\in\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$. Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующих равенств [4]:

$$e_{N,M}^{(r_1,r_2)}(f;z_1,z_2)=f^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2)-T_{N-r_1,M-r_2}\left(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2\right)=$$

$$=e_{N-r_1,M-r_2}\left(f^{(r_1,r_2)};z_1,z_2\right),$$

$$e_{N,M}^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(f;z_1,z_2)=$$

$$=f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2)-T_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)};z_1,z_2\right)=$$

$$=e_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)};z_1,z_2\right),$$

$$e_{N,M}^{(r_1,0)}(f;z_1,z_2)=f^{(r_1,0)}(z_1,z_2)-T_{N-r_1,M}\left(f^{(r_1,0)};z_1,z_2\right)=$$

$$=e_{N-r_1,M}\left(f^{(r_1,0)};z_1,z_2\right),$$

$$e_{N,M}^{(0,r_2)}(f;z_1,z_2)=f^{(0,r_2)}(z_1,z_2)-T_{N,M-r_2}\left(f^{(0,r_2)};z_1,z_2\right)=$$

$$= e_{N,M-r_2}\left(f^{(0,r_2)}; z_1, z_2\right).$$

Из приведенных соотношений с учетом полученной выше леммы 1 имеем

$$\|e_{N,M}(f)\| = \mathcal{E}_{N,M}(f), \tag{15}$$

$$\|e_{N,M}^{(r_1,0)}(f)\| = \mathcal{E}_{N-r_1,M}(f^{(r_1,0)}), \tag{16}$$

$$\|e_{N,M}^{(0,r_2)}(f)\| = \mathcal{E}_{N,M-r_2}(f^{(0,r_2)}), \tag{17}$$

$$\|e_{N,M}^{(r_1,r_2)}(f)\| = \mathcal{E}_{N-r_1,M-r_2}(f^{(r_1,r_2)}), \tag{18}$$

$$\|e_{N,M}^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(f)\| = \mathcal{E}_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}).. \tag{19}$$

Применяя, практически без изменений, ход доказательства теоремы 1 из работы [5] к функции $e_{N,M}(f)$ и учитывая, что в рассматриваемом нами случае величины $\psi_{r_p,k_p}(j_p), p = 1, 2$, определяемые формулой (9) из [5], рассматриваются для всех натуральных чисел $j_1 \geqslant N > r_1 \geqslant k_1 \geqslant 1$ и $j_2 \geqslant M > r_2 \geqslant k_2 \geqslant 1$, получаем неравенство

$$\|e_{N,M}^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(f)\| \leqslant \frac{\alpha_{N,r_1-k_1}(N-r_1+1)^{(r_1-k_1)/(2r_1)}(N+1)^{k_1/(2r_1)}}{(\alpha_{N,r_1})^{1-k_1/r_1}\sqrt{N-r_1+k_1+1}}\times$$

$$\times\frac{\alpha_{M,r_2-k_2}(M-r_2+1)^{(r_2-k_2)/(2r_2)}(M+1)^{k_2/(2r_2)}}{(\alpha_{M,r_2})^{1-k_2/r_2}\sqrt{M-r_2+k_2+1}}\times$$

$$\times\|e_{N,M}(f)\|^{k_1k_2/(r_1r_2)}\left\|e_{N,M}^{(r_1,0)}(f)\right\|^{(1-k_1/r_1)k_2/r_2}\times$$

$$\times\left\|e_{N,M}^{(0,r_2)}(f)\right\|^{(1-k_2/r_2)k_1/r_1}\left\|e_{N,M}^{(r_1,r_2)}(f)\right\|^{(1-k_1/r_1)(1-k_2/r_2)}. \tag{20}$$

Из неравенства (20) с учетом соотношений (15)–(19) имеем требуемое неравенство (14).

Для доказательства неулучшаемости неравенства (14) рассмотрим функцию $f_0(z_1, z_2) := z_1^N z_2^M$, где $N > r_1$, $M > r_2$, принадлежащую классу $\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$. При этом функции $f_0^{(r_1,0)}(z_1, z_2) = \alpha_{N,r_1} z_1^{N-r_1} z_2^M$; $f_0^{(0,r_2)}(z_1, z_2) = \alpha_{M,r_2} z_1^N z_2^{M-r_2}$; $f_0^{(r_1,r_2)}(z_1, z_2) = \alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2} z_1^{N-r_1} z_2^{M-r_2}$; $f_0^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1, z_2) =$

$\alpha_{N,r_1-k_1}\alpha_{M,r_2-k_2}z_1^{N-r_1+k_1}z_2^{M-r_2+k_2}$ также принадлежат пространству $\mathfrak{B}_2(U^2)$. Используя формулы (5)–(6), отсюда получаем

$$\mathcal{E}_{N,M}(f_0)=\frac{1}{2\sqrt{(N+1)(M+1)}}, \tag{21}$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1,M}(f_0^{(r_1,0)})=\left\|f_0^{(r_1,0)}\right\|=\frac{\alpha_{N,r_1}}{2\sqrt{(N-r_1+1)(M+1)}}, \tag{22}$$

$$\mathcal{E}_{N,M-r_2}(f_0^{(0,r_2)})=\left\|f_0^{(0,r_2)}\right\|=\frac{\alpha_{M,r_2}}{2\sqrt{(N+1)(M-r_2+1)}}, \tag{23}$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1,M-r_2}(f_0^{(r_1,r_2)})=\left\|f_0^{(r_1,r_2)}\right\|=$$

$$=\frac{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}{2\sqrt{(N-r_1+1)(M-r_2+1)}}, \tag{24}$$

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}(f_0^{(r_1-k_1,r_2-k_2)})=\left\|f_0^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right\|=$$

$$=\frac{\alpha_{N,r_1-k_1}\alpha_{M,r_2-k_2}}{2\sqrt{(N-r_1+k_1+1)(M-r_2+k_2+1)}}. \tag{25}$$

Путем непосредственного подсчета нетрудно убедиться в том, что для функции $f_0\in\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$, с учетом равенств (21)–(25), в формуле (14) будем иметь знак равенства. Теорема 1 доказана.

Символом $W_2^{r_1,r_2}(U^2)$, где $r_1,r_2\in\mathbb{N}$, обозначим класс функций $f\in\mathfrak{B}_2^{r_1,r_2}(U^2)$, для каждой из которых выполнено неравенство $\|f^{(r_1,r_2)}\|\leqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть для натуральных чисел N,M и r_p,k_p, где $p=1,2$, выполнены неравенства $N>r_1\geqslant k_1\geqslant 1$ и $M>r_2\geqslant k_2\geqslant 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\left\{\mathcal{E}_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right): f\in W_2^{r_1,r_2}(U^2)\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{(N-r_1+1)(M-r_2+1)}{(N-r_1+k_1+1)(M-r_2+k_2+1)}}\cdot\frac{\alpha_{N,r_1-k_1}\alpha_{M,r_2-k_2}}{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}. \tag{26}$$

Доказательство. Поскольку для произвольной функции $f \in W_2^{r_1,r_2}(U^2)$ имеем

$$f^{(r_1,r_2)}(z_1,z_2) = \sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty} c_{j_1,j_2}(f)\alpha_{j_1,r_1}\alpha_{j_2,r_2} z_1^{j_1-r_1} z_2^{j_2-r_2},$$

то согласно формуле (2) запишем

$$\|f^{(r_1,r_2)}\| = \left\{\sum_{j_1=r_1}^{\infty}\sum_{j_2=r_2}^{\infty} \frac{\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2-r_2+1)}\right\}^{1/2}. \qquad (27)$$

Согласно лемме 1

$$\mathcal{E}_{N,M-r_2}\left(f^{(0,r_2)}\right) = \left\|f^{(0,r_2)} - T_{N,M-r_2}(f^{(0,r_2)})\right\| =$$

$$= \left\{\sum_{j_1=N}^{\infty}\sum_{j_2=M}^{\infty} \frac{\alpha_{j_2,r_2}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2}{4(j_1+1)(j_2-r_2+1)}\right\}^{1/2} =$$

$$= \left\{\sum_{j_1=N}^{\infty}\sum_{j_2=M}^{\infty} \frac{1}{(j_1+1)(j_1-r_1+1)\alpha_{j_1,r_1-1}^2}\cdot\frac{\alpha_{j_1,r_1}^2\alpha_{j_2,r_2}^2|c_{j_1,j_2}(f)|^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2-r_2+1)}\right\}^{1/2}.$$

С учетом формулы (27) отсюда получаем

$$\mathcal{E}_{N,M-r_2}\left(f^{(0,r_2)}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{(N+1)(N-r_1+1)}\,\alpha_{N,r_1-1}}\times$$

$$\times\|f^{(r_1,r_2)}\| \leqslant \sqrt{\frac{N-r_1+1}{N+1}}\cdot\frac{1}{\alpha_{N,r_1}}. \qquad (28)$$

На основе аналогичных соображений имеем неравенство

$$\mathcal{E}_{N-r_1,M}\left(f^{(r_1,0)}\right) \leqslant \sqrt{\frac{M-r_2+1}{M+1}}\cdot\frac{1}{\alpha_{M,r_2}}. \qquad (29)$$

Очевидно, что

$$\mathcal{E}_{N-r_1,M-r_2}\left(f^{(r_1,r_2)}\right) \leqslant \|f^{(r_1,r_2)}\| \leqslant 1. \qquad (30)$$

И, наконец, используя формулу (6), запишем

$$\mathcal{E}_{N,M}(f) = \left\{ \sum_{j_1=N}^{\infty} \sum_{j_2=M}^{\infty} \frac{1}{(j_1+1)(j_2+1)(j_1-r_1+1)(j_2-r_2+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\alpha_{j_1,r_1-1}^2 \alpha_{j_2,r_2-1}^2} \cdot \frac{\alpha_{j_1,r_1}^2 \alpha_{j_2,r_2}^2 |c_{j_1,j_2}(f)|^2}{4(j_1-r_1+1)(j_2-r_2+1)} \right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{(N+1)(M+1)(N-r_1+1)(M-r_2+1)}} \cdot \frac{\|f^{(r_1,r_2)}\|}{\alpha_{N,r_1-1}\alpha_{M,r_2-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{(N-r_1+1)(M-r_2+1)}{(N+1)(M+1)}} \cdot \frac{1}{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}. \tag{31}$$

Подставляя в правую часть неравенства (14) вместо величин наилучших приближений "углом" их оценки сверху (28)–(31), получаем соотношение

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}\left(f^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{(N-r_1+1)(M-r_2+1)}{(N-r_1+k_1+1)(M-r_2+k_2+1)}} \cdot \frac{\alpha_{N,r_1-k_1}\alpha_{M,r_2-k_2}}{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}, \tag{32}$$

справедливое для любой функции f из класса $W_2^{r_1,r_2}(U^2)$.

Рассмотрим функцию

$$f_1(z_1,z_2) := \frac{2\sqrt{(N-r_1+1)(M-r_2+1)}}{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}\, z_1^N z_2^M,$$

принадлежащую классу $W_2^{r_1,r_2}(U^2)$. Учитывая, что

$$f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}(z_1,z_2) = 2\sqrt{(N-r_1+1)(M-r_2+1)} \times$$

$$\times \frac{\alpha_{N,r_1-k_1}\alpha_{M,r_2-k_2}}{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}\, z_1^{N-r_1+k_1} z_2^{M-r_2+k_2},$$

и используя лемму 1, имеем

$$\mathcal{E}_{N-r_1+k_1,M-r_2+k_2}\left(f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\right) = \|f_1^{(r_1-k_1,r_2-k_2)}\| =$$

$$= \sqrt{\frac{(N-r_1+1)(M-r_2+1)}{(N-r_1+k_1+1)(M-r_2+k_2+1)}} \cdot \frac{\alpha_{N,r_1-k_1}\alpha_{M,r_2-k_2}}{\alpha_{N,r_1}\alpha_{M,r_2}}. \quad (33)$$

Сопоставляя соотношения (32) и (33), получаем требуемое равенство (26). Теорема 2 доказана.

Обозначим

$$\widetilde{\alpha}_{j_p+1,r_p+1} := \begin{cases} \sqrt{(j_p+1)j_p}, & \text{если } r_p = 1, \\ \sqrt{j_p+1}j_p\sqrt{j_p-1}, & \text{если } r_p = 2, \\ \sqrt{j_p+1}j_p...(j_p-r_p+2)\sqrt{j_p-r_p+1}, & \text{если } r_p \geqslant 3, \end{cases}$$

где $r_p, j_p \in \mathbb{N}$ и $j_p > r_p$; $p = 1,2$. В заключение отметим, что, например, при $r_p = k_p; p = 1,2$, и $N > r_1, M > r_2$ из соотношения (26) получаем

$$\mathcal{E}_{N,M}\left(W_2^{r_1,r_2}(U^2)\right) := \sup\left\{\mathcal{E}_{N,M}(f) : f \in W_2^{r_1,r_2}(U^2)\right\} =$$
$$= \frac{1}{\widetilde{\alpha}_{N+1,r_1+1}\widetilde{\alpha}_{M+1,r_2+1}}.$$

1. *Вакарчук С. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии : Сб. научн. тр. —К. : Ин-т математики АН УССР. — 1988. — С. 4–7.
2. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О мультипликативных неравенствах типа Харди–Литтльвуда–Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных. // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер.: Математика. — 2010. — **18**, №6/1. — С. 81–87.
3. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций. // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер.: Математика. — 2012. — **20**, №6/1. — С. 82–88.
4. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации. // Укр. мат. журн. — 2011. — **63**, №12. — С. 1579–1601.
5. *Вакарчук С. Б., Вакарчук М. Б.* О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций. // Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер.: Математика. — 2013. — **21**, №6/1. — С. 61–66.
6. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем приближении обобщенными полиномами в одном пространстве аналитических функций двух комплексных переменных. // Изв. вузов. Математика. — 1991. — № 7. — С. 14–25.