Збірник праць Інституту математики НАН України 2015, т. 12, № 5, 32–45

УДК 517.9; 519.63

Експоненціально збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з необмеженим оператором у нелокальній умові

В. Б. Василик, В. Л. Макаров, Д. О. Ситник

Інститут математики НАН України, vasylyk@imath.kiev.ua, makarov@imath.kiev.ua, sytnik@imath.kiev.ua

Problem for the first order differential equation with an unbounded operator coefficient in Banach space and two-pointed nonlocal condition is considered. It is assumed that the nonlocal condition possesses an unbounded operator coefficient. An exponentially convergent algorithm is proposed and justified for the numerical solution of this problem under assumption that the operator coefficient A is sectorial and some existence and uniqueness conditions are fulfilled. The proposed algorithm is based on the application of Sinc-quadrature formulae to the Dunford-Cauchy integral representation of the solution operator and, as a result, requires only a small number of resolvent evaluations.The efficiency of the proposed algorithm is demonstrated by several numerical examples.

Для дифференциального уравнения первого порядка с неограниченным операторным коэффициентом в банаховом пространстве рассматривается двухточечная нелокальная задача. Предполагается, что нелокальное условие содержит неограниченый операторный коэффициент. Построено и обосновано экспоненциально сходящийся метод для решения этой задачи, в предположении, что операторный коэффициент A – секториальный и выполнены условия существования и единственности. Этот метод базируется на применении Sinc-квадратурную формулы к представлению розрешающего оператора с помощью интеграла Данфорда-Коши и, как следствие, требует вычисления небольшого количество резольвент. Эфективность предложеного метода подтверждается численными расчетами.

1. Вступ

При моделюванні багатьох фізичних явищ дослідники використовують диференціальні рівняння з нелокальними умовами. Це зумовлено тим, що, на відміну від класичних початкових або крайових умов, такий підхід дозволяє описати процес краще, тому що є можливість виміряти деякі параметри системи більш точно. Задачі з нелокальними умовами виникають в теорії фізики плазми [12], ядерної фізики [9], автокаталітичної хімії [10], теорії хвилеводів [7] і т.д. Деякі математичні моделі динаміки біопопуляцій є крайовими задачами для гіперболічних рівнянь з нелокальними умовами по просторових змінних (див., наприклад, [8], [16] і цитовану тут літературу). У той же час, ці проблеми можна розглядати як узагальнення класичних крайових задач, які породжують дуже цікаві теоретичні математичні дослідження.

В цій роботі ми розглянемо наступну нелокальну задачу з двоточковою операторною умовою:

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Au = 0, \quad t \in (0, T), \\ &u(0) + \alpha A^{\beta} u(T) = u_0, \end{aligned} \tag{1}$$

де α, β — задані константи, $u_0 \in X$. Оператор A з областю визначення $D(A)$ в банаховому просторі X є щільно визначеним сильно позитивним (секторіальним), тобто його спектр $\Sigma(A)$ розміщений в секторі Σ в правій півплощині з вершиною в початку координат.

$$\Sigma = \left\{ z = \rho_0 + r e^{i\theta} : \quad r \in [0, \infty),\ \rho_0 > 0\ \ |\theta| < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{2}$$

Резольвента оператора A спадає обернено пропорційно до $|z|$ на нескінченності, тобто:

$$\|R_A(z)\| = \left\|(zI - A)^{-1}\right\| \le \frac{M}{1 + |z|}, \tag{3}$$

за межами сектора та на його границі Γ_Σ, $M > 0$ – стала. Числа ρ_0, φ називаються спектральними характеристиками A.

Зауважимо, що загальна нелокальна задача з неоднорідним рівнянням, що відповідає (1), може бути зведена до двох більш простих задач, одна з яких є класичною задачею Коші, для неоднорідного рівняння з однорідною початковою умовою, а друга є двоточковою (нелокальна) задачею для однорідного рівняння. Це здійснюється у такий спосіб. Покладаємо $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$, де

$$v_1(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-A(t-s)} f(s) ds$$

є розв'язком класичної задачі Коші

$$\begin{aligned} &\frac{dv_1}{dt} + Av_1 = f(t), \quad t \in (0, T], \\ &v_1(0) = 0, \end{aligned}$$

а $v_2(t)$ є розв'язком задачі вигляду (1) з модифікованою правою частиною двоточкової умови

$$\begin{aligned} &\frac{dv_2}{dt} + Av_2 = 0, \quad t \in (0, T), \\ &v_2(0) + \alpha A^\beta v_2(T) = u_0 - \alpha A^\beta v_1(T). \end{aligned}$$

Відмітимо, що експоненціально збіжна апроксимація для $v_1(t)$ була розроблена в [9], [6]. Отже, можна використати цю апроксимацію щоб знайти $v_1(T)$ і сконцентрувати свою увагу на задачі для $v_2(t)$.

Слід також відзначити, що нещодавно були розроблені різноманітні експоненціально збіжні методи для задач з необмеженими операторними коефіцієнтами в банаховому просторі [9], [11], [4], [15], [18], [19]. Такі задачі можна розглядати як метамоделі класичних задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних, зокрема параболічних, еліптичних та гіперболічних. Для задач з операторними коефіцієнтами в банаховому просторі та нелокальними умовами також розроблені експоненціально збіжні методи. Так, для диференціального рівняння першого порядку в [2] розглянута m-точкова задача, в [1] розглянута задача з інтегральною умовою. Разом з тим, методів для задач з нелокальними умовами, які б містили необмежений операторний коефіцієнт в нелокальній умові нам невідомі. Метою даної роботи якраз і є побудова експоненціально збіжного наближення розв'язку задачі (1) з використанням методики розробленої в попередніх роботах $[1, 2, 9]$.

2. Існування та зображення розв'язку

Розв'язок (1) може бути зображений формально наступним чином [3, 14]:

$$u(t) = e^{-At}u(0). \tag{4}$$

Тоді з двоточкової умови маємо

$$u_0 = u(0) + \alpha A^\beta u(T) = u(0) + \alpha A^\beta e^{-AT} u(0).$$

Позначимо $B(A) = \left(I + \alpha A^\beta e^{-AT}\right)$. Таким чином, у випадку коли $B(A)^{-1}$ існує (достатні умови для існування цього оператора дослідимо нижче), ми отримаємо

$$u(0) = B(A)^{-1}u_0.$$

Отже,

$$u(t) = e^{-At}B(A)^{-1}u_0. \tag{5}$$

Називатимемо криву Γ_0 спектральною гіперболою сильно позитивного оператора A, якщо вона визначається формулою:

$$\Gamma_0 = \{z(\zeta) = \rho_0 \cosh\zeta - ib_0 \sinh\zeta : \ \zeta \in (-\infty, \infty), \ b_0 = \rho_0 \tan\varphi\}. \tag{6}$$

Вона має вершину в $(\rho_0, 0)$ і асимптоти, що паралельні до променів спектрального кута Σ.

Для зображення операторних функцій зручно використовувати інтеграл Данфорда-Коші (див. напр. [3, 13]), де шлях інтегрування відіграє важливу роль. Отже, вибравши деяку гіперболу Γ_I (її параметри визначимо нижче), що охоплює спектральну гіперболу Γ_0 і використавши інтеграл Данфорда-Коші для (5), розв'язок задачі (1) може бути поданий у вигляді:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} e^{-zt}\left[1 + \alpha z^\beta e^{-zT}\right]^{-1} R_A(z)u_0 dz = \tag{7}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} F(z,t)R_A(z)u_0 dz,$$

якщо $F(z,t)$ є аналітичною функцією всередині гіперболи Γ_I, яка охоплює Γ_0. Щоб отримати рівномірно збіжний та чисельно стійкий алгоритм, ми модифікуємо цей інтеграл, замінивши резольвенту $R_A(z)$

на $R^1_A(z)$ (вперше це було запропоновано в [6]), що не змінює значення інтеграла коли $u_0 \in D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$ (для деталей див. [6, 9]).

$$R^1_A(z) = (zI - A)^{-1} - \frac{I}{z}.$$

Таким чином, отримаємо наступне зображення для розв'язку задачі (1):

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_I} F(z,t)R^1_A(z)u_0 dz. \tag{8}$$

Ми виберемо наступну гіперболу

$$\Gamma_I = \{z(\zeta) = a_I \cosh\zeta - ib_I \sinh\zeta : \ \zeta \in (-\infty, \infty)\}, \tag{9}$$

за контур інтегрування, що охоплює Σ, а отже і спектр оператора A. Значення параметрів a_I, b_I визначимо з умови можливості побудови аналітичного продовження підінтегральної функції. Використовуючи цю гіперболу, отримаємо з (8)

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} F(z(\zeta),t)R^1_A(\zeta)z'(\zeta)u_0 d\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t,\zeta)d\zeta, \tag{10}$$

де

$$z'(\zeta) = a_I \sinh\zeta - ib_I \cosh\zeta.$$

Наступний крок для побудови чисельного методу є наближення (10) за допомогою ефективної квадратурної формули. Для цього нам необхідно оцінити ширину смуги навколо дійсної вісі, де підінтегральний вираз в (10) має аналітичне продовження (по відношенню до ζ). Якщо вибрати параметри a_I, b_I, як і в [9]

$$\begin{aligned} a_I &= \rho_0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}, \\ b_I &= \rho_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}, \end{aligned} \tag{11}$$

$$d_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi, \tag{12}$$

з $\cos\varphi = \frac{\rho_0}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b_0}{\sqrt{\rho_0^2 + b_0^2}}$, то резольвента оператора A є аналітичною в смузі D_{d_1} по відношенню до $w = \zeta + i\nu$ для будь-якого $t \geq 0$.

Далі визначимо умови, при яких існує оператор $B(z)^{-1}$, що відповідає нелокальній умові з (5). Щоб це виконувалось, треба, щоб $B(z) \neq 0$ на гіперболі Γ_I та в області, яку вона охоплює. Для цього достатньо виконання нерівності

$$\left|1 + \alpha z^{\beta} \mathrm{e}^{-zT}\right| \geq 1 - \left|\alpha z^{\beta} \mathrm{e}^{-zT}\right|.$$

Розглянемо другий доданок у правій частині

$$\left|\alpha z^{\beta} \mathrm{e}^{-zT}\right| = |\alpha| \left(a_I^2 \cosh^2 s + b_I^2 \sinh^2 s\right)^{\frac{\beta}{2}} \left|\mathrm{e}^{-(a_I \cosh s + i b_I \sinh s)T}\right| =$$

$$= |\alpha| a_I^{\beta} \cosh^{\beta} s \left(1 + \left(\frac{b_I}{a_I}\right)^2 \tanh^2 s\right)^{\frac{\beta}{2}} \mathrm{e}^{-T a_I \cosh s}.$$

Дослідимо функцію $f(x) = x^{\beta} \mathrm{e}^{-Tx}$. Оскільки

$$f'(x) = \beta x^{\beta-1} \mathrm{e}^{-Tx} - T x^{\beta} \mathrm{e}^{-Tx},$$

то

$$\max_x f(x) = M_1 = \left(\frac{\beta}{T}\right)^{\beta} \mathrm{e}^{-\beta}.$$

Таким чином, маємо

$$\left|1 + \alpha z^{\beta} \mathrm{e}^{-zT}\right|^{-1} \leq \frac{1}{1 - C_1} = C < \infty,$$

у випадку, коли

$$C_1 = |\alpha| \left(1 + \left(\frac{b_I}{a_I}\right)^2\right)^{\beta/2} M_1 = \frac{M_1 |\alpha|}{\cos^{\beta}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} < 1. \tag{13}$$

Єдиність розв'язку встановлюється елементарно. Отже, ми можемо підсумувати все у наступній лемі.

Лема 2.1. *Нехай A– щільно визначений сильно позитивний оператор. Якщо виконується умова* (13)*, тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)*, який може бути зображений за допомогою* (8)*.*

3. Чисельний метод

Припускаючи $u_0 \in D(A^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, в [9] було показано, що

$$\left\| e^{-z(\zeta)t} z'(\zeta) R_A^1(\zeta) u_0 \right\| \le (1+M)K \frac{b_I}{a_I} \left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha e^{-a_I t \cosh\zeta - \alpha|\zeta|} \|A^\alpha u_0\|, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0, \tag{14}$$

де K – залежна від α константа, а M – константа з оцінки резольвенти (3).

Частина, що відповідає нелокальній умові в (7), при виконанні (13) обмежена деякою сталою C. Таким чином, ми отримаємо наступну оцінку для $\mathcal{F}(t,\zeta)$:

$$\begin{gathered} \|\mathcal{F}(t,\zeta)\| \le C(\varphi,\alpha) e^{-a_I t \cosh\zeta - \alpha|\zeta|} \|A^\alpha u_0\|, \\ C(\varphi,\alpha) = \frac{(1+M)Kcb_I}{2\pi a_I} \left(\frac{2}{a_I}\right)^\alpha, \quad \zeta \in \mathbb{R}, \quad t \ge 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Наблизимо інтеграл (10) за допомогою наступної Sinc-квадратурної формули [9, 17]:

$$u_N(t) = h \sum_{k=-N}^{N} \mathcal{F}(t, z(kh)), \tag{16}$$

яка має похибку

$$\begin{gathered} \|\eta_N(\mathcal{F},h)\| = \|u(t) - u_N(t)\| \le \\ \le \left\| u(t) - h \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(t, z(kh)) \right\| + \left\| h \sum_{|k|>N} \mathcal{F}(t, z(kh)) \right\| \le \\ \le \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} \|\mathcal{F}\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} + \\ + C(\varphi,\alpha) h \|A^\alpha u_0\| \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-a_I t \cosh kh - \alpha kh}. \end{gathered}$$

Тут $\mathbf{H}^1(D_d)$– простір всіх векторно-значних функцій $\mathcal{F}$, які є аналітичними у смузі D_d ширини $2d$ навколо дійсної вісі. Цей простір введений аналогічно до [17] в [9].

$$D_d = \{z = x + iy : \, x \in (-\infty, \infty), \quad y \in [-d, \, d]\} \, .$$

Згідно [9]

$$\|\mathrm{e}^{-z(\cdot)t} z'(\cdot) R_A^1(\cdot) u_0\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} \leq \|A^\alpha u_0\| [C_-(\varphi, \alpha, \delta) +$$

$$+ C_+(\varphi, \alpha, \delta)] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha|\xi|} d\xi = C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_0\|,$$

де

$$C(\varphi, \alpha, \delta) = \frac{2}{\alpha} [C_+(\varphi, \alpha, \delta) + C_-(\varphi, \alpha, \delta)],$$

$$C_\pm(\varphi, \alpha, \delta) = (1 + M) K \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pm \frac{d}{2}\right) \left(\frac{2\cos\varphi}{a_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \pm \frac{d}{2}\right)}\right)^\alpha,$$

$$d = d_1 - \delta$$

і δ — довільна додатна стала.

Очевидно, що у випадку виконання (13), частина, що відповідає нелокальній умові, обмежена в D_d. Це дає нам змогу отримати оцінку

$$\|\mathcal{F}(t, \zeta)\|_{\mathbf{H}^1(D_d)} \leq C(\varphi, \alpha, \delta) \|A^\alpha u_0\|.$$

Таким чином, для $\eta_N(\mathcal{F}_n, h)$ ми маємо

$$\|\eta_N(\mathcal{F}, h)\| \leq \frac{c\|A^\alpha u_0\|}{\alpha} \left\{ \frac{\mathrm{e}^{-\pi d/h}}{\sinh(\pi d/h)} + \mathrm{e}^{-a_I t \cosh((N+1)h) - \alpha(N+1)h} \right\}, \tag{17}$$

де додатна стала c не залежить від h, N, t.

Урівноважимо доданки в фігурних дужках, прирівнявши обидві експоненти при $t = 0$. Отримаємо

$$\frac{\pi d}{h} = \alpha(N + 1)h,$$

$$h = \sqrt{\frac{\pi d_1}{\alpha(N + 1)}}, \tag{18}$$

це приводить до наступної оцінки похибки:

$$\|\eta_N(\mathcal{F},h)\| \le \frac{c}{\alpha}\exp\Big(-\sqrt{\pi d\alpha(N+1)}\Big)\|A^\alpha u_0\|. \tag{19}$$

У випадку $t > 0$, перший доданок в аргументі $\mathrm{e}^{-a_I t\cosh((N+1)h)-\alpha(N+1)h}$ з (17) вносить домінуючий вклад у похибку. Покладаючи для цього випадку $h = c_1 \ln N/N$ з деякою додатною сталою c_1, що не залежить від N, ми отримаємо для фіксованого t оцінку

$$\|\eta_N(\mathcal{F},h)\| \le c\left[\mathrm{e}^{-\pi d_1 N/(c_1\ln N)} + \mathrm{e}^{-c_1 t a_I N/2 - c_1\alpha\ln N}\right]\|A^\alpha u_0\|. \tag{20}$$

Таким чином, ми довели теорему.

Теорема 3.1. *Нехай A – секторіальний оператор, $u_0 \in D(A^\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$ і виконується умова* (13). *Тоді Sinc-квадратура* (16) *апроксимує $u(t)$ з експоненціальною швидкістю збіжності* (19)*, рівномірною по $t \ge 0$ для кроку h, визначеного в* (18). *Швидкість збіжності наближення* (16) *характеризується формулою* (20) *для випадку $t > 0$ та $h = c_1 \ln N/N$, де стала $c_1 > 0$ і не залежить від N.*

Зауваження 3.1. Крива інтегрування Γ_I– симетрична відносно дійсної вісі. Тому $z(-kh) = \overline{z(kh)}$ і $z'(-kh) = -\overline{z'(kh)}$, а тому, скориставшись цим, наближення (16) можна переписати у вигляді

$$u_N(t) = \frac{h}{2\pi i}\mathcal{F}(t,z(0)) + Re\left[\sum_{k=1}^{N} h\frac{\mathcal{F}(t,z(kh))}{\pi i}\right],$$

що зменшує кількість обчислення резольвент у два рази.

4. Чисельні приклади

Приклад 4.1. Розглянемо задачу (1) з оператором A, визначеним як

$$\begin{aligned} D(A) &= \{v(x) \in W_2^2(0,1):\ v(0)=v(1)=0\},\\ Av &= -v''(x)\ \forall v \in D(A). \end{aligned} \tag{21}$$

Поклавши $\beta = 1$, $T = 1$, абстрактне задача (1) набуває вигляду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\\ &u(x,0) - \alpha\frac{\partial^2 u(x,T)}{\partial x^2} = u_0(x).\end{aligned}$$

Розразунки були проведні для $t = 0.5$, $u_0(x) = \left(1 + \alpha\pi^2 \mathrm{e}^{-\pi^2 T}\right)\sin\pi x$ та $\alpha = 0.5, 1, 2.5$. Результати чисельних експериментів порівнювались з точним розв'язком задачі (1) при визначених вище A, β, T:

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\pi^2 t}\sin\pi x.$$

Відмітимо, що для заданого u_0 резольвента оператора A знаходиться точно

$$R_A(z)\sin\pi x = (zI - A)^{-1}\sin\pi x = \frac{\sin\pi x}{z-\pi^2}.$$

Похибки обчислень, проведених за побудованим в даній роботі методом наведені в таблиці 1 для різної кількості вузлів квадратури та різних α. Внизу таблиці наведено константу C_1 з оцінки (13), що дає достатню умову існування. З таблиці чітко видно експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (19). Крім того видно, що у випадку $\alpha = 2.5$ достатня умова існування (13) не виконується, але метод все одно збіжний.

Приклад 4.2. У цьому прикладі виберемо оператор A

$$\begin{aligned}&D(A) = \{v(x) \in H^4(0,1):\ v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0\},\\ &\quad Av = v^{(4)}(x)\ \forall v \in D(A),\end{aligned} \tag{22}$$

Поклавши $T = 1$, $\beta = 0.5$ задача (1), при такому A, перетворюється до вигляду

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} = 0,\\ &u(0,t) = u(1,t) = 0,\\ &\frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(1,t)}{\partial x^2} = 0,\\ &u(x,0) - \alpha\frac{\partial^2 u(x,1)}{\partial x^2} = u_0(x).\end{aligned}$$

Таблиця 1. Похибка для $x = 0.5,\ t = 0.5$, C_1– константа з оцінки. (13)

N	α		
	0.5	1	2.5
4	9.032528105123E-3	0.00876936583408	0.0000016190175
8	1.31886146244E-4	0.00010738852334	0.0000032146814
16	1.9377157841E-9	2.32962084985E-7	4.04351289813E-7
32	3.3472815373E-11	6.97097047732E-9	2.63736943383E-8
64	3.2609655442E-15	6.29897518175E-12	6.99863739713E-10
128	1.1927889094E-20	2.63986204256E-16	1.59128422303E-12
256	2.8041450469E-28	6.36503924814E-22	1.25305895408E-15
	0.480	0.961	2.403
	C_1		

Розрахунки проводились для $t = 0.5$, $u_0(x) = \left(1 + \alpha\pi^2 \mathrm{e}^{-\pi^4 T}\right) \sin\pi x$ і $\alpha = 0.5, 1, 5.5$. Відмітимо, що таким чином визначений оператор збігається з $A^{0.5}$.

Результати чисельних експериментів порівнювались з точним розв'язком задачі (1), який має вигляд

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\pi^2 t} \sin\pi x.$$

Звернемо увагу на той факт, що резольвента оператора A, як і в першому прикладі, точно знаходиться для заданого u_0, оскільки

$$R_A(z)\sin\pi x = (zI - A)^{-1}\sin\pi x = \frac{\sin\pi x}{z - \pi^4}.$$

Похибки обчислень, проведених за побудованим у даній роботі методом, наведені в таблиці 2 для різної кількості вузлів квадратури та різних α. З таблиці видно експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (19).

Приклад 4.3. У цьому прикладі розглянемо задачу, як і у прикладі 4.1, але виберемо $u_0(x) = 100(1 - |2x - 1|)$. Звернемо увагу на те, що узагальнена похідна функції $u_0(x)$ є розривною функцією і $u_0(x) \in W_2^{\alpha}(0,1)$, $\alpha < 3/2$. Тому $u_0 \in D(A^{\lambda})$, $\lambda < 1$.

Відмітимо також той факт, що резольвенту оператора A, як і у попередніх прикладах можна визначити точно. Похибки обчислень,

Таблиця 2. Похибка для $x = 0.5,\ t = 0.5$.

N	α		
	0.5	1.5	5.5
4	0.00044995808	0.0004517670	0.0001585263213
8	0.00004389768	0.0000447411	0.0000651574332
16	3.77379183602E-10	1.28384146028E-8	0.0000277701509
32	1.19224518645E-13	1.08363947339E-10	0.0000026896624
64	8.56211224005E-19	3.36734643776E-14	8.2665879010E-8
128	4.31781266238E-25	9.19111892628E-19	1.2652995792E-9
256	1.33156530800E-34	1.87159722873E-25	2.2495807772E-12

проведених за побудованим у даній роботі методом, наведені в таблиці 3 для різної кількості вузлів квадратури та $\alpha = 0.5$. В першому стовпчику наведено $N-$ кількість вузлів квадратурної формули (16), у другому стовпчику – значення $u(x,t)$, в третьому – різниця між $u(x,t)$, обчисленого для заданого N і $u(x,t)$, обчисленого для $N/2$. З таблиці видно експоненціальне спадання похибки згідно отриманої теоретичної оцінки (19).

Таблиця 3. Похибка для $x = 0.25,\ t = 0.5$.

N	$u_N(x,t)$	$\lvert u_N(x,t) - u_{N/2}(x,t)\rvert$
4	0.9283657780470762774	
8	0.4020280985038091628	0.52633767954
16	0.4121075902758613784	0.01007949177
32	0.4121042028080824055	0.00000338746
64	0.4121042012395290280	1.56855337755E-9
128	0.4121042012399241684	3.95140392208E-13
256	0.4121042012399241666	1.71920493615E-18
512	0.4121042012399241666	9.02730134040E-27

[1] *Василик В., Макаров В.* Експоненційно збіжний метод для диференціального рівняння першого порядку в банаховому просторі з інтегральною нелокальною умовою // УМЖ. — 2014. — **66**, 8. — С. 1029–1040.

[2] Exponentially convergent method for the m-point nonlocal problem for a first order differential equation in Banach space / *I. P. Gavrilyuk, V. L. Makarov, D. O. Sytnyk, V. B. Vasylyk* // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2010. — **31**, 1-3. — P. 1–21.

[3] *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

[4] Fast Runge-Kutta approximation of inhomogeneous parabolic equations / María López-Fernández, Christian Lubich, Cesar Palencia, Achim Schädle // Numer. Math. — 2005. — **102**, 2. — P. 277–291.

[5] *Gavrilyuk I., Makarov V., Vasylyk V.* Exponentially convergent algorithms for abstract differential equations. Frontiers in Mathematics. — Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011. — P. viii+180. — ISBN: 978-3-0348-0118-8. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-0348-0119-5.

[6] *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Exponentially convergent algorithms for the operator exponential with applications to inhomogeneous problems in Banach spaces // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2005. — **43**, 5. — P. 2144–2171.

[7] *Gordeziani D., Avalishvili G.* Investigation of the nonlocal initial boundary value problems for some hyperbolic equations // Hiroshima Math. J. — 2001. — **31**, 3. — P. 345–366.

[8] *Huyer W.* Approximation of a linear age-dependent population model with spatial diffusion // Commun. Appl. Anal. — 2004. — **8**, 1. — P. 87–108.

[9] *Leung A. W., Chen G.-S.* Optimal control of multigroup neutron fission systems // Appl. Math. Optim. — 1999. — **40**, 1. — P. 39–60.

[10] *Leung A. W., Ortega L. A.* Existence and monotone scheme for time-periodic nonquasimonotone reaction-diffusion systems: application to autocatalytic chemistry // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — **221**, 2. — P. 712–733.

[11] *López-Fernández M., Palencia C., Schädle A.* A spectral order method for inverting sectorial laplace transforms // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — **44**. — P. 1332–1350.

[12] *Самарский А. А.* Некоторые задачи теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1980. — **16**, 11. — С. 1925–1935.

[13] One-parameter semigroups / Ph. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent et al. — Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1987. — Vol. 5 of CWI Monographs. — P. x+312.

[14] *Pazy A.* Semigroups of linear operator and applications to partial differential equations. — New York, Berlin, Heidelberg : Springer Verlag, 1983.

[15] *Sheen D., Sloan I., Thomée V.* A parallel method for time discretization of parabolic equations based on Laplace transformation and quadrature // IMA J. Numer. Anal. — 2003. — **23**, 2. — P. 269–299.

[16] *Sinestrari E., Webb G.* Nonlinear hyperbolic systems with nonlocal boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. — 1987. — **121**, 2. — P. 449–464.

[17] *Stenger F.* Numerical methods based on sinc and analytic functions. — Springer-Verlag, New York, 1993. — Vol. 20 of Springer Series in Computational Mathematics. — P. xvi+565. — ISBN: 0-387-94008-1. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4612-2706-9.

[18] *Thomée V.* A high order parallel method for time discretization of parabolic type equations based on Laplace transformation and quadrature // Int. J. Numer. Anal. Model. — 2005. — **2**. — P. 121–139.

[19] *Weideman J. A. C.* Optimizing Talbot's contours for the inversion of the Laplace transform // SIAM J. Numer. Anal. — 2006. — **44**, 6. — P. 2342–2362.