Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 204-219

***Б. Г. Фещенко***

*Інститут математики НАН України, Київ*
`fb@imath.kiev.ua`

# Деформації гладких функцій на 2-торі, у яких граф Кронрода-Ріба є деревом

Нехай $f : T^2 \to \mathbb{R}$ — функція Морса на 2-торі $T^2$, $X$ — замкнена (можливо порожня) підмножина в $T^2$ і $\mathcal{S}(f,X)$, $\mathcal{O}(f,X)$ — відповідно стабілізатор і орбіта функції $f$ відносно правої дії групи дифеоморфізмів $\mathcal{D}(T^2,X)$ нерухомих на $X$. Нехай $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2,X)$ — зв'язна компонента $\mathcal{D}(T^2,X)$, що містить id і $\mathcal{O}_f(f,X)$ — зв'язна компонента $\mathcal{O}(f,X)$, що містить $f$. Покладемо $\mathcal{S}'(f,X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2,X)$. Припустимо що функція $f$ є такою, що її граф Кронрода–Ріба є деревом. Тоді існує множина 2-дисків $\{D_i\}_{i=0}^r \subset T^2$ та сталі $n,m \in \mathbb{N}$ такі, що має місце ізоморфізм $\pi_1\mathcal{O}_f(f) \cong \prod_{i=0}^r \pi_0\mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \underset{\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_{nm}}{\wr} \mathbb{Z}^2$, де $A \underset{\mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_{nm}}{\wr} \mathbb{Z}^2$ — вінцевий добуток $A$ і $\mathbb{Z}^2$ над $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{nm}$. Цей результат має місце для більшого класу гладкий функцій $f : T^2 \to \mathbb{R}$ які мають таку властивість: для кожної критичної точки $z$ функції $f$ паросток $f$ в $z$ є гладко еквівалентним однорідному многочлену $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ без кратних коренів.

## 1. Вступ

Нехай $M$ — гладка компактна поверхня, $X$ — замкнена (можливо порожня) підмножина в $M$, $\mathcal{D}(M,X)$ — група дифеоморфізмів $M$, нерухомих на $X$. Тоді група $\mathcal{D}(M,X)$ діє на просторі гладких функцій $C^\infty(M,\mathbb{R})$ за таким правилом:

$$\gamma : C^\infty(M,\mathbb{R}) \times \mathcal{D}(M,X) \to C^\infty(M,\mathbb{R}), \quad \gamma(f,h) = f \circ h. \quad (1.1)$$

Нехай $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ — гладка функція на $M$. Множини

$$\mathcal{S}(f,X) = \{f \in \mathcal{D}(M,X) \mid f \circ h = f\},$$

$$\mathcal{O}(f, X) = \{f \circ h \mid h \in \mathcal{D}(M, X)\}$$

називаються відповідно *стабілізатором* і *орбітою* функції $f$ відносно дії (1.1).

Якщо $X$ є порожньою множиною, то покладемо

$$\mathcal{D}(M) = \mathcal{D}(M, \varnothing), \qquad \mathcal{S}(f) = \mathcal{S}(f, \varnothing), \qquad \mathcal{O}(f) = \mathcal{O}(f, \varnothing),$$

і так далі. Наділимо простори $\mathcal{D}(M, X)$, $C^\infty(M, \mathbb{R})$, $\mathcal{S}(f, X)$, і $\mathcal{O}(f, X)$ відповідними сильними $C^\infty$-топологіями Уітні.

Позначимо через $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f, X)$ і $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X)$ відповідно тотожні компоненти $\mathcal{S}(f, X)$ і $\mathcal{D}(M, X)$, а через $\mathcal{O}_f(f, X)$ — компоненту $\mathcal{O}(f, X)$, що містить $f$. Нехай також

$$\mathcal{S}'(f, X) = \mathcal{S}(f) \cap \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M, X).$$

Нехай далі $\mathcal{F}(M) \subset C^\infty(M, \mathbb{R})$ — множина гладких функцій, що задовольняють такі дві умови:

(B) функція $f$ приймає постійне значення на кожній зв'язній компоненті $\partial M$, і всі критичні точки $f$ належать до внутрішності $M$;

(P) для кожної критичної точки $z$ функції $f$ паросток $f$ в $z$ є гладко еквівалентним до деякого *однорідного поліному* $f_z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *без кратних коренів*.

Нехай $\mathrm{Morse}(M)$ — множина функцій Морса на $M$, тобто функцій, що мають лише невироджені критичні точки. Множина $\mathrm{Morse}(M)$ є відкритою і всюди щільною підмножиною в $C^\infty(M, \mathbb{R})$. На підставі леми Морса кожна невироджена особливість є гладко еквівалентною однорідному многочлену $\pm x^2 \pm y^2$ без кратних коренів. Отже, $\mathrm{Morse}(M) \subset \mathcal{F}(M)$.

**Теорема 1.1.** [1–3] *Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ — функція і $X$ — скінченне (можливо порожнє) об'єднання регулярних компонент множин рівня функції $f$. Тоді справедливі наступні твердження.*

(1) *Відображення*

$$p : \mathcal{D}(M, X) \to \mathcal{O}(M, X), \qquad p(h) = f \circ h$$

*є розшаруванням Серра з шаром $\mathcal{S}(f,X)$, тобто вона має властивість підняття гомотопії для CW-комплексів.*

(2) *Обмеження розшарування $p$ на $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$*

$$p|_{\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)} : \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X) \to \mathcal{O}_f(f,X)$$

*також є розшаруванням Серра.*

(3) *Припустимо, що $X = \varnothing$ і, або $f$ має критичну точку, що не є невиродженим локальним екстремумом, або $M$ є неорієнтованою поверхнею. Тоді $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f)$ є стягуваним,*

$$\pi_n \mathcal{O}_f(f) = \pi_n M, \ n \geq 3, \qquad \pi_2 \mathcal{O}_f(f) = 0,$$

*і для $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ ми маємо таку точну послідовність*

$$1 \longrightarrow \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M) \xrightarrow{p} \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \xrightarrow{\partial} \pi_0 \mathcal{S}'(f) \longrightarrow 1. \tag{1.2}$$

(4) *Припустимо, що $\chi(M) < 0$ або $X \neq 0$. Тоді $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X)$ і $\mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X)$ є стягуваними, $\pi_n\mathcal{O}_f(f,X) = 0$ для $n \geq 2$, а відображення*

$$\partial : \pi_1 \mathcal{O}_f(f,X) \to \pi_0 \mathcal{S}'(f,X) \tag{1.3}$$

*є ізоморфізмом.*

Нехай також $\omega : (I^k, \partial I^k, 0) \to (\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X), \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(M,X), \mathrm{id}_M)$ — неперервне відображення трійок, $k \geq 0$. Тоді з (2) теореми 1.1 випливає, що для будь-якого $k \geq 0$ існує ізоморфізм

$$\lambda_k : \pi_k(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(M,X), \mathcal{S}_{\mathrm{id}}(f,X)) \to \pi_k \mathcal{O}_f(f,X), \quad \lambda_k[\omega] = [f \circ \omega],$$

див., наприклад, [4, § 4.1, теорема 4.1]. В подальшому тексті роботи ми будемо ототожнювати $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ з $\pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f))$.

В серії робіт [1–3, 5–8] Максименко описав гомотопічні типи стабілізаторів дії (1.1). Автори у роботах [9,10] описали фундаментальну групу орбіт $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ функцій $f$ з $\mathcal{F}(T^2)$ у випадку, коли КР-граф функції $f$ містить цикл. У випадку, коли КР-граф $f$ є деревом, автори [11] знайшли умови, за яких послідовність (1.2) розщеплюється. Метою даної роботи є опис групи $\pi_1\mathcal{O}_f(f)$ функцій з $\mathcal{F}(T^2)$, граф Кронрода-Ріба яких є деревом, див. теорему 2.5.

## 2. Попередні відомості

2.1. **Вінцеві добутки $G \wr_{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m} \mathbb{Z}^2$.** Нехай $G$ — група з одиницею 1 і $n, m \geq 1$. Через $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ ми позначимо групу всіх відображень з $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ в $G$ з поточковим множенням, тобто якщо $\alpha, \beta : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \to G$ — два відображення з $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$, то $(\alpha \cdot \beta)(i,j) = \alpha(i,j) \cdot \beta(i,j)$, де $(i,j) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$.

Група $\mathbb{Z}^2$ діє справа на $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ за таким правилом: якщо $\alpha \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G)$ і $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, тоді результат цієї дії $\alpha^{k,l}$ задається формулою:

$$\alpha^{k,l}(i,j) = \alpha(i + k \bmod n,\ j + l \bmod m), \qquad (i,j) \in \mathbb{Z}^2.$$

Напівпрямий добуток $\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$, що відповідає цій дії, позначимо через

$$G \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}{\wr} \mathbb{Z}^2 := \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \rtimes \mathbb{Z}^2$$

і будемо називати *вінцевим добутком $G$ і $\mathbb{Z}^2$ над $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$*.

Таким чином, $G \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}{\wr} \mathbb{Z}^2$ — це прямий добуток множин

$$\mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$$

з такою операцією

$$(\alpha, (k_1, k_2))(\beta, (l_1, l_2)) = (\alpha \beta^{k_1, k_2}, (k_1 + l_1, k_2 + l_2))$$

для всіх $(\alpha, (k_1, k_2)), (\beta, (l_1, l_2)) \in \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \times \mathbb{Z}^2$. Крім того, ми маємо таку коротку точну послідовність:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Map}(\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m, G) \xrightarrow{\sigma} G \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m}{\wr} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{p} \mathbb{Z}^2 \longrightarrow 1,$$

де $\sigma(\alpha) = (\alpha, (0,0))$ — вкладення і $p(\alpha, (a_1, a_2)) = (a_1, a_2)$ — проекція.

2.2. **Граф Кронрода-Ріба функції $f$.** Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладка функція і $c \in \mathbb{R}$ — дійсне число. Зв'язна компонента $C$ множини рівня $f^{-1}(c)$ називається *критичною*, якщо $C$ містить щонайменше одну критичну точку $f$. В протилежному випадку $C$ називається *регулярною*.

Нехай $\Delta$ — розбиття $M$ на зв'язні компоненти множин рівня функції $f$. Добре відомо, що фактор-простір $M/\Delta$ є 1-вимірним CW комплексом і $M/\Delta$ називається *графом Кронрода-Ріба* або, простіше, *KR-графом* функції $f$. Ми будемо позначати його через $\Gamma_f$. Вершинами графу $\Gamma_f$ є критичні компоненти множин рівня функції $f$. Нехай $p_f : M \to \Gamma_f$ — проекція $M$ на фактор-простір $\Gamma_f = M/\Delta$.

2.3. **Дія $\mathcal{S}'(f)$ на $\Gamma_f$.** Нехай $f \in \mathcal{F}(M)$ — гладка функція. Зазначимо, що функція $f$ може бути представлена як композиція таких відображень

$$f = \phi \circ p_f : M \xrightarrow{p_f} \Gamma_f \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}.$$

Припустимо, що $h \in \mathcal{S}'(f)$. Тоді $f \circ h = f$ і ми отримуємо, що $h(f^{-1}(c)) = f^{-1}(c)$ для всіх $c \in \mathbb{R}$. Отже, $h$ переставляє зв'язні компоненти множин рівня $f$, а тому $h$ індукує гомоморфізм $\rho(h)$ KR-графу $\Gamma_f$ такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_f"] \arrow[d, "h"] & \Gamma(f) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho(h)"] & \mathbb{R} \arrow[d, equal] \\ M \arrow[r, "p_f"] & \Gamma(f) \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{R} \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

є комутативною. Іншими словами, ми отримуємо гомоморфізм

$$\rho : \mathcal{S}'(f) \to \mathrm{Aut}(\Gamma_f)$$

в групу автоморфізмів $\Gamma_f$. Нехай $G = \rho(\mathcal{S}'(f))$ — образ $\mathcal{S}'(f)$ в $\mathrm{Aut}(\Gamma_f)$ відносно відображення $\rho$.

Нехай $v$ — вершина $\Gamma_f$ і

$$G_v = \{g \in G \mid g(v) = v\}$$

— стабілізатор $v$ відносно дії $G$. Довільний замкнений зв'язний $G_v$-інваріантний окіл $v$ в $\Gamma_f$, що не містить інших вершин $\Gamma_f$ із будемо називати *зіркою* вершини $v$ і позначатимемо її через $\mathrm{st}(v)$.

Множина

$$G_v^{loc} = \{g|_{\mathrm{st}(v)} \mid g \in G_v\}$$

є підгрупою в $\mathrm{Aut}(\mathrm{st}(v))$, що складається з обмежень елементів з $G_v$ на $\mathrm{st}(v)$. Ми будемо називати $G_v^{loc}$ *локальним стабілізатором* вершини $v$ відносно дії групи $G$. Зауважимо, що група $G_v^{loc}$ не залежить від вибору зірки $\mathrm{st}(v)$. Зокрема, має місце така комутативна діаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}'(f) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[d, "pr"'] & & G \arrow[r, hook] \arrow[d, "r"] & \mathrm{Aut}(\Gamma_f) \\
\pi_0\mathcal{S}'(f) \arrow[rru, "\rho_0"] \arrow[rr, "\widehat{\rho_0}"] & & G_v^{loc} \arrow[r, hook] & \mathrm{Aut}(\mathrm{st}(v)),
\end{tikzcd} \tag{2.5}$$

де $p$ — проекція, $r$ — відображення обмеження на $\mathrm{st}(v)$, $\rho_0$ є таким, що $\rho = \rho_0 \circ pr$ і $\widehat{\rho} = r \circ \rho$.

Для функцій $f \in \mathcal{F}(T^2)$ на 2-торі $T^2$ має місце така лема.

**Лема 2.4** (Утверждение 1, [11]). *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ — гладка функція така, що її KP-граф $\Gamma(f)$ є деревом. Тоді існує єдина вершина $v$ графу $\Gamma(f)$ така, що кожна компонента доповнення $T^2 \setminus p_f^{-1}(v)$ є відкритим 2-диском.*

Вершина $v$ з леми 2.4 і критична компонента зв'язності $V = p_f^{-1}(v)$ рівня $f^{-1}(\phi(v))$, що відповідає $v$, будемо називати *спеціальними*.

Головним результатом роботи є така теорема.

**Теорема 2.5.** *Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ — гладка функція така, що $\Gamma_f$ є деревом, і $v$ — спеціальна вершина $\Gamma_f$. Тоді*

(1) *$G_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $m, n \in \mathbb{N}$;*
(2) *існують замкнені 2-диски $D_1, D_2, \ldots, D_r \subset T^2$ такі, що $f|_{D_i} \in \mathcal{F}(D_i)$, $i = 1, \ldots, r$, і має місце ізоморфізм*

$$\xi : \pi_1\mathcal{O}_f(f) \;\cong\; \prod_{i=0}^{r} \pi_0\mathcal{S}'(f|_{D_i}, \partial D_i) \underset{\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}}{\wr} \mathbb{Z}^2.$$

Зокрема, у випадку коли $G_v^{loc} = 1$, ми маємо ізоморфізм

$$\xi : \pi_1 \mathcal{O}_f(f) \cong \pi_0 \mathcal{S}'(f) \times \mathbb{Z}^2,$$

що дає теорему 2 [11].

## 3. Доведення твердження (1) теореми 2.5

Нехай $f \in \mathcal{F}(T^2)$ — гладка функція така, що її КР-граф є деревом, $v$ — спеціальна вершина графу $\Gamma_f$ і $V = p_f^{-1}(v)$ — відповідна спеціальна критична компонента. Потрібно довести, що $G_v^{loc} \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ для деяких $m, n \in \mathbb{N}$.

Відмітимо, що з леми 2.4 випливає, що $V$ задає кліткове розбиття $T^2$: 0- та 1-клітини цього розбиття — це відповідно вершини (тобто критичні точки $f$) та ребра $V$, а 2-клітини — це компоненти доповнення $T^2 \setminus V$.

З [1, теорема 7.1] випливає, що для кожного $h \in \ker(r \circ \rho)$ виконані такі умови:

(1) $h(e) = e$ для будь-якої клітини $e$,
(2) відображення $h : e \mapsto h(e)$ зберігає орієнтацію клітин $e$ розмірності $\dim e \geq 1$.

Нехай $h \in \mathcal{S}'(f)$ — дифеоморфізм. Згідно [2, твердження 5.4], або всі клітини є $h$-інваріантними, або число інваріантних клітин автоморфізму $h$ дорівнює числу Лефшеця $L(h)$. Оскільки $h$ — ізотопний тотожному відображенню дифеоморфізм тора $T^2$, то $L(h) = \chi(T^2) = 0$. Таким чином, «комбінаторна дія» $h$ на множині клітин визначається його дією на якій-небудь фіксованій 2-клітині, тобто дією $\rho(h)$ на ребрі $\mathrm{st}(v)$.

Тому з результатів роботи [12] слідує, що існує переріз

$$s : G_v^{loc} \to \mathcal{S}'(f) \tag{3.6}$$

відображення $r \circ \rho$ такий, що $s(G_v^{loc})$ діє на $T^2$ вільно. Зокрема фактор-відображення $q : T^2 \to T^2/G_v^{loc}$ є накриттям, а отже $T^2/G_v^{loc}$ є або тором, або пляшкою Клейна. Але так як $G_v^{loc}$-дія на $T^2$ є дією групи дифеоморфізмів, що зберігають орієнтацію, то фактор-простір $T^2/G_v^{loc}$ є тором. Зокрема, ми маємо таку коротку точну послідовність:

$$1 \longrightarrow \pi_1 T^2 \xrightarrow{q} \pi_1 T^2/G_v^{loc} \longrightarrow G_v^{loc} \longrightarrow 1.$$

Так як $q$ — мономорфізм, то твердження (1) теореми 2.5 випливає з такої леми:

**Лема 3.1.** напр. [13, Розділ E, с. 31] *Нехай $A$ та $B$ — вільні абелеві групи рангу 2, і $q : A \to B$ — вкладення. Тоді існують $L, M \in A$ та $X, Y \in B$ такі, що $A = \langle L, M\rangle$, $B = \langle X, Y\rangle$ і*

$$q(L) = nX, \qquad\qquad q(M) = mnY$$

*для деяких $n, m \in \mathbb{N}$, зокрема $B/A \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$.*

## 4. Доведення твердження (2) теореми 2.5

**Крок 1. Вибір спеціальних твірних в $\pi_1 T^2$ та $\pi_1 T^2/G_v^{loc}$.** Зафіксуємо точку $y \in T^2$ і нехай $z = q(y) \in T^2/G_v^{loc}$. Тоді ми маємо таку комутативну діаграму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \pi_1(T^2, y) \arrow[r, "q"] \arrow[d, equal] & \pi_1(T^2/G_v^{loc}, z) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, equal] & G_v^{loc} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "q"] & \mathbb{Z}^2 \arrow[r, "\partial"] & \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

де $q : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ та $\partial : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn}$ визначаються за формулами

$$q(\lambda, \mu) = (n\lambda, mn\mu), \qquad \partial(x, y) = (x \bmod n,\ y \bmod mn).$$

Нехай $\hat{X}, \hat{Y} : T^2/G_v^{loc} \times [0,1] \to T^2/G_v^{loc}$ — ізотопії, такі, що

$$\hat{X}_0 = \hat{X}_1 = \hat{Y}_0 = \hat{Y}_1 = \mathrm{id}_{T^2/G_v^{loc}},$$

$$\hat{X}_s \circ \hat{Y}_t = \hat{Y}_t \circ \hat{X}_s,$$

для всіх $s, t \in [0,1]$, причому петлі $\hat{X}_z, \hat{Y}_z : I \to T^2/G_v^{loc}$, визначені за формулами $\hat{X}_z(t) = \hat{X}(z,t)$ та $\hat{Y}_z(t) = Y(z,t)$, представляють елементи

$$[\hat{X}_z] = (1,0),\ [\hat{Y}_z] = (0,1) \in \mathbb{Z}^2 \equiv \pi_1(T^2/G_v^{loc}, z).$$

Розширимо $\hat{X}$ та $\hat{Y}$ до відображень

$$X, Y : T^2/G_v^{loc} \times \mathbb{R} \to T^2/G_v^{loc}$$

за формулами:

$$X(x,t) = \hat{X}(x,\ t \bmod 1), \qquad Y(x,t) = \hat{Y}(x,\ t \bmod 1).$$

Нехай $L, M : T^2 \times \mathbb{R} \to T^2$ — єдині підняття відповідно $X$ та $Y$ відносно $q$ такі, що $L$ та $M$ комутують і $L_0 = M_0 = \mathrm{id}_{T^2}$. Тобто

$$X_t \circ q = q \circ L_t, \qquad\qquad Y_t \circ q = q \circ M_t.$$

Нехай $s : G_v^{loc} = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \to \mathcal{S}'(f)$ — переріз $r \circ \rho$, див. (3.6). Тоді $L_t \circ M_{t'} = M_{t'} \circ L_t$ для всіх $t, t' \in \mathbb{R}$ і

$$L_k = s(k \bmod n, 0), \qquad M_k = s(0, k \bmod mn),$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Зокрема,

$$L_{kn} = M_{kmn} = \mathrm{id}_{T^2}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

а петлі

$$L_z : [0,n] \to T^2, \qquad\qquad M_z : [0, mn] \to T^2$$

представляють елементи

$$[L_z] = (1,0),\ [M_z] = (0,1) \ \in \ \mathbb{Z}^2 \ \equiv \ \pi_1(T^2, y).$$

З того, що $G_v^{loc}$ діє вільно на $T^2$ випливає, що компоненти зв'язності $\overline{T^2 \setminus N}$ можна занумерувати трьома індексами $D_{ijk}$ такими, що $i = 1, \dots r$, $j = 0, \dots, n-1$, $k = 0, \dots, nm-1$. Причому, якщо $\gamma = (a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m = G_v^{loc}$, то

$$\gamma(D_{ijk}) = D_{i\ j+a\ k+b},$$

де другий індекс береться $\bmod n$, а третій — $\bmod nm$.

Покладемо $\mathcal{S}_{ijk} = \pi_0 \mathcal{S}'(f|_{D_{ijk}}, \partial D_{ijk})$ і

$$\mathcal{S} = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{nm-1} \mathcal{S}_{ijk}.$$

Визначимо гомоморфізм

$$\tau : \mathcal{S} \to \mathrm{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00})$$

за такою формулою: якщо $\alpha = (h_{ijk}) \in \mathcal{S}$, то

$$\tau(\alpha) : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \to \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00}$$

задається формулою:

$$\tau(\alpha)(a,b) = \Big(M_k^{-1} \circ L_j^{-1} \circ h_{ijk} \circ L_j \circ M_k, \quad i = 1, \dots, r\Big), \quad (4.7)$$

для $(a,b) \in \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \equiv G_v^{loc}$. Легко бачити, що $\tau$ є ізоморфізмом.

**Крок 2. Епіморфізм $\psi : \pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \to \pi_1 T^2 / G_v^{loc}$.** Нехай

$$h : I \to \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$$

— петля в $\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$ така, що $h(0) = h(1) = \mathrm{id}_{T^2}$, тобто $h$ є ізотопією $h : T^2 \times I \to T^2$ тора $T^2$. Нехай $x \in T^2$ — точка. Тоді $h_x : \{x\} \times I \to T^2$ — петля в $T^2$ з початком в $x$. Визначимо відображення $\ell : \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \to \pi_1 T^2$ за формулою:

$$\ell([h]) = [h_x] \in \pi_1 T^2.$$

Відомо, що відображення $\ell$ є ізоморфізмом, див. [14–16].

**Лема 4.1.** *Існує епіморфізм $\psi : \pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \to \pi_1 T^2 / G_v^{loc}$ такий, що наступна діаграма є комутативною*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \pi_1 \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \arrow[r] \arrow[d, "\ell"', "\cong"] & \pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & \pi_0 \mathcal{S}'(f) \arrow[r] \arrow[d, "\widehat{\rho_0}"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \pi_1 T^2 \arrow[r, "q"] & \pi_1 T^2 / G_v^{loc} \arrow[r] & G_v^{loc} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \quad (4.8)$$

*а її рядки — точними.*

*Доведення.* Зафіксуємо довільну вершину $z \in V$ і визначимо відображення:

$$\psi_0 : \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \to T^2/G_v^{loc}, \qquad \psi_0(h) = q(h(z)),$$

для $h \in \mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2)$, де $q : T^2 \to T^2/G_v^{loc}$ — накриваюче відображення індуковане вільною дією $G_v^{loc}$ на $T^2$. Очевидно, що $\psi_0$ є неперервним. Оскільки $G_v^{loc}$-дія та $\mathcal{S}'(f)$-дія збігаються на вершинах $V$, то $\psi_0(h)$ належить до $G_v^{loc}$-орбіти точки $z$ для $h \in \mathcal{S}'(f)$. Тоді відображення $\psi_0$ індукує відображення трійок

$$\psi_0 : (\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \mathrm{id}) \to (T^2/G_v^{loc}, z', z'), \quad \psi(\widehat{h}) = q(\widehat{h}(z)).$$

Зокрема, $\psi_0$ індукує гомоморфізм

$$\psi : \pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \mathrm{id}) \to \pi_1(T^2/G_v^{loc}, z', z').$$

Оскільки рядки діаграми (4.8) є точними послідовностями, відображення $\ell$ є ізоморфізмом, відображення $\widehat{\rho_0}$ є епіморфізмом, то, на підставі 5-леми, відображення $\psi$ — епіморфізм. $\square$

**Крок 3. Ядро $\psi$.** Нехай $f(V) = c$, $\epsilon > 0$ і $N$ — зв'язна компонента $f^{-1}([c-\epsilon, c+\epsilon])$, яка містить $V$. Назвемо $N$ — *$f$-регулярним околом* $V$. Нагадаємо, що

$$\mathcal{S}'(f, N) := \{h \in \mathcal{S}'(f) \mid h = \mathrm{id}_N\}.$$

Наступна лема описує ядро відображення $\psi$.

**Лема 4.2.** *Існують ізоморфізми між такими п'ятьма групами:*

$$\ker\psi \xrightarrow{\zeta} \ker\widehat{\rho_0} \xleftarrow{\iota} \pi_0\mathcal{S}'(f,N) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{S} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00}).$$

*Доведення.* 1) Побудуємо ізоморфізм $\zeta : \ker\psi \to \ker\widehat{\rho_0}$. Розглянемо діаграму, у якої рядки і стовпчики є точними:

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & \pi_1\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2) \arrow[r, "\ell", "\cong"'] \arrow[d] & \pi_1 T^2 \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & \ker\psi \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"', "\cong"] & \pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\partial\circ\lambda_1^{-1}"] & \pi_1 T^2/G_v^{loc} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \ker\widehat{\rho_0} \arrow[r] & \pi_0\mathcal{S}'(f) \arrow[r, "\widehat{\rho_0}"] \arrow[d] & G_v^{loc} \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Оскільки відображення $\ell$ — ізоморфізм, то, на підставі $3\times 3$-леми, [17, Chapter II, Lemma 5.1], гомоморфізм $\zeta = \partial\circ\lambda_1^{-1}|_{\ker\psi}$ є ізоморфізмом.

2) Відмітимо, що має місце ізоморфізм

$$\sigma : \mathcal{S}'(f, N) \cong \prod_{i,j,k} \mathcal{S}'(f|_{D_{ijk}}, \partial D_{ijk}), \qquad \sigma(h) = (h|_{D_{ijk}})_{i,j,k},$$

який індукує ізоморфізм

$$\sigma : \pi_0\mathcal{S}'(f, N) \cong \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=0}^{n-1}\prod_{k=0}^{nm-1} \mathcal{S}_{ijk} = \mathcal{S}.$$

3) Досить показати, що вкладення $\iota : \mathcal{S}'(f, N) \to \ker(r\circ\rho)$ є гомотопічною еквівалентністю. Тоді воно індукуватиме ізоморфізм

$$\iota : \pi_0\mathcal{S}'(f, N) \to \pi_0\ker(r\circ\rho) = \ker\widehat{\rho_0}.$$

Покажемо, що існує ізотопія $H : \ker r\circ\rho \times I \to \ker(r\circ\rho)$ така, що виконуються наступні умови:

(i) $H_0 = \mathrm{id}$,
(ii) $H_t(\mathcal{S}'(f, N)) \subset \mathcal{S}'(f, N)$ для всіх $t \in I$,
(iii) $H_1(\ker(r \circ \rho)) \subset \mathcal{S}'(f, N)$.

Нехай $F$ — гамільтонове векторне поле функції $f \in \mathcal{F}(T^2)$, $\mathbf{F} : T^2 \times \mathbb{R} \to T^2$ — потік поля $F$, і $N$, $N'$ — $f$-регулярні околи $V$ такі, що $\overline{N} \subset \mathrm{Int} N'$. Для кожної функції $\gamma : T^2 \to \mathbb{R}$ визначимо відображення $\mathbf{F}_\gamma : T^2 \to T^2$ за такою формулою:

$$\mathbf{F}_\gamma(x) = \mathbf{F}(x, \gamma(x)).$$

З [2, Claim 1], випливає, що для кожного $h \in \ker(r \circ \rho)$ існує єдина гладка функція $\beta_h \in C^\infty(N', \mathbb{R})$ така, що $h = \mathbf{F}_{\beta_h}$ на $N'$, тобто

$$h(x) = \mathbf{F}(x, \beta_h(x)), \qquad x \in N',$$

причому відображення

$$\widehat{s} : \ker(r \circ \rho) \to C^\infty(N', \mathbb{R}), \qquad \widehat{s}(h) = \beta_h.$$

є неперервним відносно відповідних $C^\infty$-топологій. Більш того, якщо $h$ — нерухомий на $N$, то $\beta_h = 0$ на $N$.

Продовжимо функцію $\beta_h$ до гладкої функції $\alpha_h \in C^\infty(T^2, \mathbb{R})$ такої, що $\alpha_h|_N = \beta_h$ і $\alpha_h = 0$ на $T^2 \setminus N'$ наступним чином. Нехай $\varepsilon : T^2 \to [0, 1]$ — гладка функція на $T^2$ така, що

(1) $\varepsilon$ є постійною на орбітах $\mathbf{F}$;
(2) $\varepsilon = 1$ на $N$;
(3) $\varepsilon = 0$ на $T^2 \setminus N'$.

Покладемо: $\alpha_h = \varepsilon \beta_h$ на $N'$ і $\alpha_h = 0$ на $T^2 \setminus N'$. Очевидно, що тоді відповідність $h \mapsto \alpha_h$ є неперервним відображенням $\alpha : \ker(r \circ \rho) \to C^\infty(T^2, \mathbb{R})$. Більш того, з умови (1) на $\varepsilon$ випливає, що відображення $\mathbf{F}_{t\alpha_h} : T^2 \to T^2$, визначене за формулою $\mathbf{F}_{t\alpha_h}(x) = \mathbf{F}(x, t\alpha_h)$, є дифеоморфізмом для всіх $t \in I$, див. [1, Claim 4.14.1]. А з умов (2) та (3) слідує, що

$$\mathbf{F}(x, \alpha_h(x)) = \begin{cases} h(x), & x \in N, \\ x, & x \in T^2 \setminus N'. \end{cases}$$

Визначимо ізотопію $H : \ker(r \circ \rho) \times I \to \ker(r \circ \rho)$ за формулою:

$$H(h, t) = h \circ \mathbf{F}^{-1}_{t\alpha_h}$$

і покажемо, що $H$ задовольняє умовам (i)-(iii).

(i) $H_0(h) = h \circ \mathbf{F}^{-1}_0 = h$, тобто $H_0 = \mathrm{id}(\ker(r \circ \rho))$.

(ii) Припустимо, що $h \in \mathcal{S}'(f, N)$. Тоді $\beta_h = t\alpha_h = 0$ на $N$, а отже $\mathbf{F}_{t\alpha_h}|_N = \mathrm{id}_N$ для всіх $t \in I$. Зокрема,

$$H_t(h)|_N = h|_N = \mathrm{id}_N.$$

(iii) $H_1(h)|_N = h \circ \mathbf{F}^{-1}_{\alpha_h}|_N = h \circ h^{-1}|_N = \mathrm{id}_N$.

Лему 4.2 доведено. $\square$

**Крок 4.** Визначимо відображення

$$\xi : \mathrm{Map}(G^{loc}_v, \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00}) \rtimes \pi_1(T^2/G^{loc}_v) \to \pi_1\big(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \mathrm{id}_{T^2}\big).$$

за такою формулою. Нехай $\alpha : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_{mn} \equiv G^{loc}_v \longrightarrow \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00}$ — довільне відображення. Для кожної трійки $(i, j, k)$ виберемо $h_{ijk} \in \mathcal{S}'(f|_{D_{i00}}, \partial D_{i00})$ такий, щоб

$$\alpha(i, j) = \big([h_{1jk}], [h_{2jk}], \dots, [h_{rjk}]\big)$$

і нехай $h^t_{ijk} : D_{i00} \to D_{i00}$, $t \in [0, 1]$, — довільна ізотопія між $h^0_{ijk} = \mathrm{id}_{D_{i00}}$ та $h^1_{ijk} = h_{ijk}$. Визначимо відображення

$$h : (I, 0, 1) \to \big(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \mathrm{id}_{T^2}\big)$$

за формулою:

$$h(t)(x) = \begin{cases} M_{k+at} \circ L_{j+bt} \circ h^t_{ijk} \circ L^{-1}_j \circ M^{-1}_k(x), & x \in D_{ijk}, \\ M_{at} L_{bt}(x), & x \in N. \end{cases}$$

Легко бачити, що $h$ визначено коректно. Покладемо

$$\xi(\alpha, (a, b)) = [h] \in \pi_1\big(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f), \mathrm{id}_{T^2}\big).$$

Також не важко перевірити, що $\xi$ є гомоморфізмом. Більш того, з леми 4.2 та формули (4.7) для $\tau$ випливає, що наступна діаграма є комутативною:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
\mathrm{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00}) \arrow[r, "(\tau\circ\sigma\circ\iota^{-1}\circ\zeta)^{-1}", "\cong"'] \arrow[d] & \ker\psi \arrow[d] \\
\mathrm{Map}(G_v^{loc}, \prod_{i=1}^{r} \mathcal{S}_{i00}) \rtimes \pi_1(T^2/G_v^{loc}) \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "pr"] & \pi_1(\mathcal{D}_{\mathrm{id}}(T^2), \mathcal{S}'(f)) \arrow[d, "\psi"] \\
\pi_1(T^2/G_v^{loc}) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \pi_1(T^2/G_v^{loc}) \arrow[d] \\
1 & 1
\end{tikzcd}
$$

Тому за 5-лемою $\xi$ є ізоморфізмом. Теорему 2.5 доведено.

Автор щиро вдячний С. І. Максименку за увагу та обговорення складних питань, що виникали під час роботи.

## Література

[1] *Maksymenko Sergiy.* Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces // *Ann. Global Anal. Geom.* — 2006. — **29**, 3. — P. 241–285.

[2] *Maksymenko Sergiy.* Functions with isolated singularities on surfaces // *Geometry and topology of functions on manifolds. Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos.* — 2010. — **7**, 4. — P. 7–66.

[3] *Максименко С. И.* Гомотопические свойства правых стабилизаторов и орбит гладких функцый на поверхностях // *Укр. мат. журн.* — 2012. — **64**, 9. — С. 1186–1203.

[4] *Hatcher Allen.* Algebraic topology. — Cambridge : Cambridge University Press, 2002.

[5] *Maksymenko Sergiy.* Functions on surfaces and incompressible subsurfaces // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2010. — **16**, 2. — P. 167–182.

[6] *Maksymenko Sergiy.* Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms // *arXiv:1311.3347.*

[7] *Maksymenko Sergiy.* Finiteness of homotopy types of right orbits of Morse functions on surfaces // *arXiv:1409.4319.*

[8] *Maksymenko Sergiy.* Structure of fundamental groups of orbits of smooth functions on surfaces // *arXiv:1408.2612.*

[9] *Maksymenko Sergiy, Feshchenko Bogdan.* Orbits of smooth functions on 2-torus and their homotopy types // *Matematychni Studii.* — 2015. — **44**, 1. — P. 67–84.

[10] *Maksymenko Sergiy, Feshchenko Bohdan.* Smooth functions on 2-torus whose Kronrod-Reeb graph contains a cycle // *Methods Funct. Anal. Topology.* — 2015. — **21**, 1. — P. 22–40.

[11] *Максименко С. И., Фещенко Б. Г.* Гомотопические свойства пространств гладких функций на 2-торе // *Укр. мат. журн.* — 2014. — **66**, 9. — С. 1205–1212.

[12] *Feshchenko Bohdan.* Free actions of finite groups and smooth function on surfaces // *to appear.*

[13] *Понтрягин Л. С.* Непрерырвные группы. 3-е изд., испр. — М.: Наука„ 1973. — P. 519.

[14] *Earle C. J., Eells J.* A fibre bundle description of Teichmüller theory // *J. Differential Geometry.* — 1969. — **3**. — P. 19–43.

[15] *Earle C. J., Schatz A.* Teichmüller theory for surfaces with boundary // *J. Differential Geometry.* — 1970. — **4**. — P. 169–185.

[16] *Gramain André.* Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4).* — 1973. — **6**. — P. 53–66.

[17] *Mac Lane Saunders.* Homology. Classics in Mathematics. — Springer-Verlag, Berlin, 1995. — P. x+422. — ISBN: 3-540-58662-8. — Reprint of the 1975 edition.