Збірник праць
Ін-ту математики НАН України
2015, т.12, №6, 68-88

И. Ю. Власенко, Т. В. Рыбалкина

Институт математики НАН Украины, Киев.
vlasenko@imath.kiev.ua, rybalkina_t@ukr.net

Примеры внутренних отображений цилиндра с нейтрально неблуждающими точками, не являющимися нейтрально рекуррентными

We construct examples of inner mappings of cylinder with neutrally non-wandering points that are not neutrally recurrent.

Побудовано приклади внутрішніх відображень циліндра, які мають нейтрально неблукаючі точки, що не є нейтрально рекурентними.

1. Введение

В работах [1,2] были введены новые топологические инварианты внутренних отображений, в качестве модели для которых были взяты инвариантные множества динамических систем, образованные гомеоморфизмами. В частности, были введены множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Как известно, их аналоги — множества рекуррентных и неблуждающих точек различны (см. [3], глава 1.1). Однако оставался открытым вопрос, различны ли множества нейтрально рекуррентных и нейтрально неблуждающих точек. Построенный в [4] пример дал на этот вопрос положительный ответ. Однако построенное отображение является внутренним отображением некоторого абстрактного топологического пространства, не вложимого ни в какое конечномерное многообразие. В данной работе также построены примеры отображений, у которых нейтрально неблуждающее множество отлично от нейтрально рекуррентного множества, а также дополнительно нейтрально неблуждающее множество отлично от нейтрально предельного множества, и нейтрально предельное множество отлично от нейтрально рекуррентного множества. Кроме того, в отличие от примера в [4], построенного на некотором абстрактном топологическом пространстве, данные примеры являются накрытиями двумерного цилиндра.

2. Предварительные сведения

Внутренним отображением будем называть открытое (образ открытого множества открыт) изолированное (прообраз каждой точки состоит из изолированных точек) отображение. Пусть $f\colon X \to X$ — внутренний эндоморфизм цилиндра $X = \mathbb{R} \times S^1$.

Следующие определения были введены в [1, 2].

Определение 2.1. *Нейтральным сечением точки x назовем множество*

$$O_f^{\perp}(x) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(f^n(x)). \tag{2.1}$$

Определение 2.2. *Точка x называется* ***нейтрально рекуррентной*** *(или* ***$\perp$-рекуррентной****), если x граничная точка для множества $O_f^{\perp}(x) \setminus \{x\}$.*

Определение 2.3. *Точка x называется* ***блуждающей*** *точкой f, если найдется такая ее окрестность U, что $f^m(U) \cap U = \varnothing$ для всех $m \in \mathbb{Z}$. При этом U называется* ***окрестностью блуждания*** *для x. Иначе точка называется* ***неблуждающей****.*

Определение ниже применимо только для локально связных пространств, но в данном случае его достаточно. Общая форма этого определения есть в [2].

Определение 2.4. *Точка x называется* ***нейтрально блуждающей*** *(или* ***$\perp$-блуждающей****) точкой f, если найдется открытая окрестность U точки x такая, что U является компонентой связности множества $\cup_{n\geq 0} f^{-n}(f^n(U))$. При этом U называется* ***окрестностью $\perp$-блуждания*** *для x. Иначе точка называется* ***$\perp$-неблуждающей****.*

Здесь и везде знак $\perp$- будет синонимом и сокращением слова “нейтрально”. Тогда в определениях выше $\perp$-блуждающее означает нейтрально блуждающее, $\perp$-рекуррентное означает нейтрально рекуррентное и т. д.

Определение 2.5. *Множество U назовем* ***нейтрально инвариантным*** *относительно f, если для всех $x \in U$, $O^{\perp}_f(x) \subset U$.*

Определение 2.6. *Множество $f^{-n}(f^n(U)) \setminus f^{-(n-1)}(f^{n-1}(U))$ назовем* ***n-й нейтральной итерацией*** *множества U.*

Определение 2.7. ***Нейтральным предельным множеством*** *точки x назовем*

$$\perp(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{O^{\perp}_f(x) \setminus f^{-n}(f^n(x))}$$

Определение 2.8. *Множество точек y таких, что найдется x, такое, что $y \in \perp(x)$, назовем* ***множеством нейтральных предельных*** *точек отображения f и обозначим через $\mathrm{Lim}^{\perp}(f)$.*

3. Итерированная группа монодромии

Определение 3.1. *Открытое множество U* ***правильно накрыто*** *отображением f, если $f^{-1}(U)$ можно представить в виде дизъюнктного объединения открытых множеств $V_i \subset X$, каждое из которых гомеоморфно отображается на U при помощи f.*

Определение 3.2. *Непрерывное отображение $f\colon X \to X$ называется* ***накрывающим****, если любая точка $x \in X$ имеет* *открытую окрестность, правильно накрытую отображением f. В этом случае мы говорим, что f — накрытие.*

Определение 3.3. *Гомеоморфизм $h\colon X \to X$ называется* ***скольжением*** *или же автоморфизмом накрытия $f\colon X \to X$, если $f \circ h = f$.*

Предположим, что X — многообразие с абелевой фундаментальной группой $\pi_1(X)$, для которого существует накрывающее отображение $f\colon X \to X$. Тогда для каждого $n \geq 1$ отображения f^n также являются накрытиями. Отметим, что f индуцирует гомоморфизм фундаментальной группы $\pi_1(X)$ в себя. Поскольку $\pi_1(X)$ — абелева, то образ $\pi_1(X)$ является нормальной подгруппой в $\pi_1(X)$. Такие накрытия называют *регулярными*. В этом случае фактор-группа $G_f = \pi_1(X)/f(\pi_1(X))$ действует на X, так, что отображение f можно рассматривать как фактор-отображение $f\colon X \to X/G_f \cong X$.

Аналогично, так как $\pi_1(X)$ абелева, то накрытие $f^n\colon X \to X$ также будет регулярным, а значит $f^n\colon X \to X/G_{f^n} \cong X$, где $G_{f^n} = \pi_1(X)/f^n(\pi_1(X))$ — группа автоморфизмов накрытия f^n (см., например, [5]).

Другими словами, мы имеем убывающую последовательность нормальных подгрупп

$$\pi_1 X \supset f(\pi_1 X) \supset \cdots \supset f^n(\pi_1 X) \supset f^{n+1}(\pi_1 X) \supset \cdots,$$

и соответствующую возрастающую последовательность фактор-групп:

$$G_f \subset G_{f^2} \subset \cdots \subset G_{f^n} \subset \cdots.$$

Прямой предел этих групп по вложению обозначим через G_{f^∞} и назовем *группой итерированной монодромии накрытия f*. Эта группа действует на X гомеоморфизмами.

Для произвольной точки $x \in X$ рассмотрим точку $f^n(x)$. Элементы группы G_{f^n} — гомеоморфизмы $X \to X$, которые отображают точку x в различные прообразы точки $f^n(x)$ под действием f^{-n}. Поэтому значение многозначного отображения

$f^{-n} \circ f^n$ в точке x совпадает с объединением значений всех элементов группы G_{f^n} в точке x, т. е.

$$f^{-n}(f^n(x)) = \bigcup_{h \in G_{f^n}} h(x).$$

Отсюда вытекает, что группа G_{f^∞} итерированной монодромии накрытия f оставляет инвариантными нейтральные сечения точек.

4. Семейство накрытий цилиндра

Будем строить примеры с помощью специального семейства внутренних отображений двумерного цилиндра $\mathbb{R} \times S^1$, с координатами $r \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in [0, 1)$. Эти внутренние отображения имеют вид $f(r, \varphi) = (r + 1 + d(r, \varphi), 2\varphi)$, где функция $d(r, \varphi)$ подобрана так, что при любом фиксированном значении φ отображение $r + d(r, \varphi)$ является гомеоморфизмом отрезка $[0, 1]$ на себя, а отображение $f(r, \varphi)$ топологически сопряжено само с собой с помощью гомеоморфизма сдвига $r \mapsto r + 1$. Как следствие, тогда $d(r + 1, \varphi) = d(r, \varphi)$. Легко проверить, что координатные прямые $\varphi = const$ этого цилиндра образуют для всех отображений такого вида инвариантное слоение. В частности, прямая $\varphi = 0$ отображается ими в себя.

В таком виде эти отображения являются накрытиями цилиндра степени 2. Группа автоморфизмов такого накрытия является циклической степени 2. Соответственно, группа автоморфизмов k-й степени такого накрытия является циклической степени 2^k, а описанная выше группа итерированной монодромии — группой двоично-рациональных вычетов по модулю 1.

Для гомеоморфизма группы итерированной монодромии накрытий цилиндра можно ввести обозначения вида h_φ, где h_0 — тождественное отображение, а h_ψ — автоморфизм некоторой степени накрытия, который переводит прямую $\varphi = 0$ в прямую $\varphi = \psi$. Из коммутативности следует, что $h_{\varphi_1} \circ h_{\varphi_2} = h_{\varphi_1 + \varphi_2}$.

5. Построение примеров

Построим примеры накрытий цилиндра, у которых есть $\perp$-неблуждающие точки, не являющиеся $\perp$-рекуррентными.

Пример 5.1. *Пример отображения, имеющего $\perp$-неблуждающие $\perp$-предельные, но не $\perp$-рекуррентные точки.*

Построение. Пусть внутреннее отображение цилиндра $f(r,\varphi) = (R(r,\varphi), \Phi(\varphi))$ задано с помощью пары функций $R(r,\varphi) = r + 1 + d(r,\varphi)$ и $\Phi(\varphi) = 2\varphi$, где

$$d(r,\varphi) = \frac{1}{4}\,\min\bigl(\{r\}, 1-\{r\}\bigr)\,\min\bigl(\{\varphi\}, 1-\{\varphi\}\bigr),$$

причем функция $d(r,\varphi)$ подобрана так, чтобы отображение $r + d(r,\varphi)$ при любом фиксированном значении φ являлось гомеоморфизмом отрезка $[0,1]$ на себя.

Благодаря специальному виду функции $d(r,\varphi)$, отображение f^{-1}, обратное к отображению f, можно выписать явно. Именно, пусть $f\left((r',\varphi')\right) = (r,\varphi)$. Тогда

$$\begin{cases} r' + 1 + \frac{1}{4}\,\min\bigl(\{r'\}, 1-\{r'\}\bigr)\,\min\bigl(\{\varphi\}, 1-\{\varphi\}\bigr) = r \\ 2\varphi' \bmod 1 = \varphi. \end{cases}$$

Заметим, что обозначение точки прообраза через (r',φ') неоднозначно. Отображение f является накрытием степени 2, поэтому у точки (r,φ) ровно 2 прообраза. Обозначим их (r'_0,φ'_0) и (r'_1,φ'_1).

Отображение f имеет треугольный вид[1], и φ' можно разрешить через φ независимо от r и r'. Для φ' имеется 2 значения: $\varphi'_0 = \frac{\varphi}{2}$ и $\varphi'_1 = (\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}) \bmod 1$. Обозначим

$$C_0 = \frac{1}{4}\min\left(\{\varphi'_0\}, 1-\{\varphi'_0\}\right), \quad C_1 = \frac{1}{4}\min\left(\{\varphi'_1\}, 1-\{\varphi'_1\}\right).$$

[1]Отображение f от n переменных $x_1,\ldots,x_n$ имеет треугольный вид, если его координатная функция f_n зависит только от переменной x_n; координатная функция f_{n-1} зависит только от x_{n-1} и x_n; координатная функция f_{n-2} зависит только от $x_{n-2},\ldots,x_n$ и т. д.

Тогда для r'_0 и r'_1 выполнены соотношения

$$r'_0 + 1 + C_0 \min\left(\{r'_0\}, 1 - \{r'_0\}\right) = r,$$
$$r'_1 + 1 + C_1 \min\left(\{r'_1\}, 1 - \{r'_1\}\right) = r.$$

Запишем r'_i, $i \in \{0, 1\}$, как сумму целой $\lfloor r'_i \rfloor$ и дробной $\{r'_i\}$ частей:

$$\lfloor r'_i \rfloor + \{r'_i\} + 1 + C_i \min\left(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\}\right) = \lfloor r \rfloor + \{r\}.$$

Функция $d(r, \varphi)$ подобрана так, чтобы отображение $r + d(r, \varphi)$ при любом значении φ являлось гомеоморфизмом отрезка $[0, 1]$ на себя, поэтому всегда $\lfloor r'_i \rfloor + 1 = \lfloor r \rfloor$. Отсюда следует, что

$$\{r'_i\} + C_i \min\left(\{r'_i\}, 1 - \{r'_i\}\right) = \{r\}.$$

Тогда $\{r'_i\}$ разрешается через $\{r\}$ следующим образом:

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \frac{\{r\}}{1+C_i} & \{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\} \\ \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i} & \{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}. \end{cases}$$

Поскольку условия $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$ и $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$ выражены в терминах искомой величины $\{r'_i\}$, их удобнее переписать в терминах сравнения $\{r\}$ с некоторым пороговым значением. Если $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \leq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$. И наоборот, если $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \geq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$. Тогда, зная φ'_i, r'_i можно однозначно вычислить через r и φ'_i:

$$\lfloor r'_i \rfloor = \lfloor r \rfloor - 1,$$
$$\{r'_i\} = \begin{cases} \frac{\{r\}}{1+C_i} & \{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i \\ \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i} & \{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i. \end{cases} \tag{5.2}$$

Заметим, что поскольку φ может принимать значения на отрезке $[0, 1)$, то выражения $C_i = \frac{1}{4}\min\left(\{\varphi'_i\}, 1 - \{\varphi'_i\}\right)$ принимают значения на отрезке $[0, \frac{1}{8}]$. При этом, если $C_i = 0$, то график выражения (5.2) есть график тождественного отображения, а если $C_i > 0$, то график выражения (5.2) представляет собой ломаную из двух звеньев, которая строго ниже графика тождественного отображения на внутренности отрезка $[0,1]$ и пересекается с графиком тождественного отображения в точках $(0,0)$ и $(1,1)$. Как следствие, для любой точки цилиндра, у которой дробная часть ее r-координаты $\{r\} \neq 0$, если ее прообраз под действием f не лежит на прямой $\varphi = 0$, то у ее прообраза дробная часть ее r-координаты будет строго меньше, чем у исходной точки.

Нейтральные итерации прямой $\varphi = \text{const}$ всюду плотны в цилиндре. Кроме того, окружности $r = 0 \bmod 1$ инвариантны, и на них отображение совпадает со стандартным растягивающим отображением 2φ. Следовательно, окружности $r = 0 \bmod 1$ являются нейтральным предельным множеством для своих точек.

Легко проверить, что отображение f топологически сопряжено само с собой с помощью гомеоморфизма сдвига $r \mapsto r+1$. Как следствие, на всех замкнутых кольцах U_k между окружностями $r = k$ и $r = k+1$ динамика одинакова с точностью до сдвига $r \mapsto r+1$. Поэтому достаточно рассмотреть только одно кольцо.

Рассмотрим замкнутое кольцо U_0, ограниченное окружностями $r = 0$ и $r = 1$. По построению все точки цилиндра блуждающие, а кольца между окружностями $r = 0 \bmod 1$ являются нейтрально инвариантными. Поэтому U_0 является фундаментальной окрестностью второго рода[1] и для любой точки $x \in U_0$, $O_f^{\perp}(x) \subset U_0$. Поскольку U_0 замкнуто, то и $\perp(x) \subset U_0$. Для точек $x \in \text{Int}(U_0)$ конкретный вид множеств $\perp(x)$ зависит от свойств отображения f.

Для любого отрезка I_{ϕ_0}, образованного пересечением координатной прямой $\varphi = \phi_0$ с замкнутым кольцом U_0, множество $\bigcup\limits_m f^{-m}(f^m(I_{\phi_0}))$ плотно в замкнутом кольце U_0.

[1]См. раздел 4.6 в [2].

Рассмотрим отрезок $I_0 = U_0 \cap \{\varphi = 0\}$. Этот отрезок удобен тем, что для любой его внутренней точки $x \in \mathrm{Int}(I_0)$ образы этой точки под действием последовательности нейтральных отображений $f^{-n} \circ f^n$ накапливаются по направлению к окружности $r = 0$. Докажем этот факт.

Функция $d(r,\varphi)$ выбрана так, что когда $\varphi = 0$, то $d(r,\varphi) = 0$. Поэтому $f^n((r,0)) = (r+n,0)$ для любой точки вида $(r,0)$ и $n \geq 0$. В частности, точки из I_0 также имеют вид $(r,0)$.

Рассмотрим вышеприведенное выражение (5.2) для вычисления прообразов точки под действием f^{-1}. Применяя его к вычислению f^{-n} из точек $(r+n,0)$ легко видеть, что для других точек нейтрального сечения точки $(r,0)$ $\varphi \neq 0$, поэтому, как уже было отмечено выше, из выражения (5.2) следует, что дробная часть ее r-координаты будет строго меньше, чем у исходной точки.

Таким образом, точки из внутренности отрезка I_0 не являются $\perp$-рекуррентными, и для любой точки из внутренности отрезка I_0 ее нейтральные итерации все дальше сдвигаются по направлению к окружности $r = 0$. Возникает вопрос: как устроено нейтрально предельное множество этих точек? Состоит ли оно из окружности $r = 0$, или туда входят и другие точки?

Используя определение f и выражение (5.2), нейтральные итерации точек можно явно и точно вычислить. К примеру, рассмотрим нейтральное сечение точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$.

Нейтральное сечение состоит из точек $f^{-n}(f^n(A))$. Его можно представить как объединение непересекающихся “нейтральных итераций”, множеств $\Delta_k = f^{-k}(f^k(A)) \setminus f^{-(k-1)}(f^{k-1}(A))$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 = \{A\} = \left\{(\tfrac{1}{2}, 0)\right\}, \\
&\Delta_1 = f^{-1}(f^1(A)) \setminus \{A\} = \left\{(\tfrac{4}{9}, \tfrac{1}{2})\right\}, \\
&\Delta_2 = \left\{(\tfrac{64}{153}, \tfrac{1}{4}), (\tfrac{64}{153}, \tfrac{3}{4})\right\}, \\
&\Delta_3 = \left\{(\tfrac{2048}{5049}, \tfrac{1}{8}), (\tfrac{2048}{5355}, \tfrac{3}{8}), (\tfrac{2048}{5355}, \tfrac{5}{8}), (\tfrac{2048}{5049}, \tfrac{7}{8})\right\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что отображение f симметрично по φ относительно инволюции $\varphi \mapsto 1 - \varphi$, поэтому нейтральное сечение и множества Δ_k также симметричны. Соответственно, достаточно указать только половину этих множеств. В частности,

$$\Delta_4 = \big\{ (\tfrac{131072}{328185}, \tfrac{1}{16}), (\tfrac{131072}{358785}, \tfrac{3}{16}), (\tfrac{131072}{369495}, \tfrac{5}{16}), (\tfrac{131072}{358479}, \tfrac{7}{16}), \dots \big\},$$
$$\Delta_5 = \big\{ (\tfrac{16777216}{42335865}, \tfrac{1}{32}), (\tfrac{16777216}{47000835}, \tfrac{3}{32}), (\tfrac{16777216}{49142835}, \tfrac{5}{32}), (\tfrac{16777216}{48394665}, \tfrac{7}{32}),$$
$$(\tfrac{16777216}{49111623}, \tfrac{9}{32}), (\tfrac{16777216}{51359805}, \tfrac{11}{32}), (\tfrac{16777216}{50588685}, \tfrac{13}{32}), (\tfrac{16777216}{46930455}, \tfrac{15}{32}), \dots \big\}.$$

Как мы видим, с каждой новой “нейтральной итерацией” множеством Δ_k, максимальное значение r-координаты точек множества Δ_k уменьшается, что подтверждает рассуждения выше. Однако этот максимум не сходится к нулю. К примеру, среди точек нейтрального сечения точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$ есть подпоследовательности, которые сходятся к некоторой точке $B = (0.393208\dots, 0) \in I_0$.

Остановимся на этом факте подробнее. Поскольку точные значения в виде дробей точек из нейтрального сечения точки A достаточно громоздки, воспользуемся тем, что f имеет треугольный вид, и введем короткие обозначения для точек нейтральных сечений. Поскольку для любой точки цилиндра на каждой прямой $\varphi = \mathrm{const}$ содержится не более одной точки ее нейтрального сечения, введем для точек нейтрального сечения обозначения вида A_φ, где A — точка, для которой рассматривается нейтральное сечение, φ — угловая координата обозначаемой точки нейтрального сечения точки A. К примеру, точку $(\frac{4}{9}, \frac{1}{2})$ обозначим через $A_{\frac{1}{2}}$, а исходная точка $A = (\frac{1}{2}, 0)$ получит дополнительное обозначение A_0.

В этих обозначениях сходящиеся к B подпоследовательности можно записать как $(A_{\frac{1}{2^n}})$ и $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$. Эти две подпоследовательности симметричны и переходят друг в друга с помощью инволюции $\varphi \mapsto 1 - \varphi$.

Покажем, что эти подпоследовательности действительно сходятся к точке B. Из-за симметрии достаточно показать это только для подпоследовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$.

Отметим, что поскольку f самосопряжено с помощью сдвига $r \mapsto r+1$, то для f существует эффективный алгоритм вычисления итераций нейтрального сечения, отличный от последовательного вычисления множеств $f^{-n}(f^n(x))$. Именно, пусть у нас вычислено множество $f^{-n}(f^n(x))$. Сдвинем его точки отображением $r \mapsto r+1$. В силу самосопряженности, полученные точки принадлежат множеству $f^{-n}(f^{n+1}(x))$, и мы за один шаг можем получить множество $f^{-(n+1)}(f^{n+1}(x))$, просто применив выражение (5.2). При этом сдвиг $r \mapsto r+1$ и шаг $\lfloor r_i' \rfloor = \lfloor r \rfloor - 1$ из выражения (5.2) взаимно компенсируют друг друга, поэтому там достаточно использовать только выражение для вычисления $\{r_i'\}$, добавляя целую часть, взятую из исходных точек. В частности, для точек замкнутого цилиндра U_0 целая часть равна нулю, поэтому для них выражение для вычисления $\{r_i'\}$ можно использовать напрямую. К примеру, точки $A_{\frac{1}{8}}$ и $A_{\frac{5}{8}}$ можно напрямую получить из точки $A_{\frac{1}{4}}$, используя (5.2). Этот способ вычислений существенно упрощает дальнейшие рассуждения.

Вернемся к вышеприведенным точным значениям точек A_φ первых 5 итераций нейтрального сечения точки A. Уже начиная с 4-й итерации, у этих точек, кроме точек $A_{\frac{1}{16}}$ и $A_{\frac{15}{16}}$, которые принадлежат последовательностям $(A_{\frac{1}{2^n}})$ и $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$, значение r-координаты меньше 0.38, что меньше, чем у точки B. Следовательно, вычисленные из них с помощью (5.2) последующие итерации точек нейтрального сечения точки A будут иметь еще меньшее значение r-координаты. Выше значения 0.38 могут быть только точки, вычисленные из $A_{\frac{1}{16}}$ и $A_{\frac{15}{16}}$.

$A_{\frac{15}{16}}$ и другие точки последовательности $(A_{1-\frac{1}{2^n}})$ мы рассматривать не будем, так как они симметричны последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$ и для них справедливо все то же, что и для точек последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$.

Рассмотрим, что можно вычислить из $A_{\frac{1}{16}}$. Это точки $A_{\frac{1}{32}}$ и $A_{\frac{17}{32}}$. $A_{\frac{1}{32}}$ принадлежат последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$. Рассмотрим $A_{\frac{17}{32}}$. $A_{\frac{17}{32}}$ вычислена из $A_{\frac{1}{16}}$. Сравним ее с $A_{\frac{9}{16}}$, которая вычислена из $A_{\frac{1}{8}}$. Для этих точек выражение (5.2) имеет вид $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$. По сравнению с $A_{\frac{9}{16}}$, у $A_{\frac{17}{32}}$ значение исходной r-координаты меньше, так как взято у $A_{\frac{1}{16}}$, а не $A_{\frac{1}{8}}$, а выражение $1 + C_i$ больше, так как $\frac{17}{32}$ ближе к $\frac{1}{2}$, чем $\frac{9}{16}$. Поэтому r-координата точки $A_{\frac{17}{32}}$ меньше, чем у точки $A_{\frac{9}{16}}$, следовательно, также меньше 0.38. Рассуждая по индукции, это же справедливо и для всех точек последовательности $(A_{\frac{2^{n-1}+1}{2^n}})$, вычисляемых их точек последовательности $(A_{\frac{1}{2^{n-1}}})$.

Осталось проверить, действительно ли у точек последовательности $(A_{\frac{1}{2^n}})$ r-координата не стремится к нулю. Вычислим явно эту последовательность. φ-координата точки $A_{\frac{1}{2^n}}$ – это $\frac{1}{2^n}$. В соотношении $\{r'_0\} = \frac{\{r\}}{1+C_0}$, $C_0 = \frac{1}{4}\min(\{\varphi'_0\}, 1 - \{\varphi'_i\}) = \frac{1}{4}\varphi'_0$, так как $\varphi'_0 \leq \frac{1}{2}$. Поэтому $C_0 = \frac{1}{2^{n+2}}$ и $\frac{1}{1+C_0} = \frac{2^{n+2}}{2^{n+2}+1}$. r-координата точки $A_{\frac{1}{2}}$ равна $\frac{4}{9}$, как следствие, из соотношения (5.2) r-координата точки $A_{\frac{1}{2^n}}$ имеет вид $\frac{4}{9}\prod_{k=2}^{n}\frac{2^{k+2}}{2^{k+2}+1}$. Это выражение не сходится к нулю, поэтому последовательность точек $(A_{\frac{1}{2^n}})$ нейтрального сечения точки A действительно сходится к некоторой точке, лежащей выше окружности $r = 0$, которую мы обозначим как

$$B = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{4}{9}\prod_{k=2}^{n}\frac{2^{k+2}}{2^{k+2}+1}, 0\right) = (0.393208\ldots, 0).$$

Поскольку у оставшихся точек нейтрального сечения точки A значение r-координаты меньше 0.38, то и у их предельных точек значение r-координаты также меньше 0.38.

Следовательно, B — изолированная точка нейтрального предельного множества $\perp(A)$.

Выше мы рассмотрели нейтральное сечение единственной точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$ из внутренности отрезка I_0. Однако если r-координата точки отрезка I_0 меньше либо равна $\frac{1}{2}$, то выражение (5.2) для вычисления r-координат их нейтральных итераций имеет вид $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$, а, следовательно, линейно зависит от начальной точки, находящейся на отрезке I_0. Соответственно, у точек отрезка I_0 с r-координатой в интервале $(0, \frac{1}{2}]$ их нейтральное предельное множество в точности подобно вышеописанному нейтральному предельному множеству $\perp(A)$, только сжатому по r-координате пропорционально расположению этих точек между точкой $A = (\frac{1}{2}, 0)$ и окружностью $r = 0$.

Отсюда следует, что точки отрезка I_0 между точкой B и окружностью $r = 0$ принадлежат множеству нейтрально предельных точек $\mathrm{Lim}^{\perp}(f)$.

На самом деле можно показать, что все точки отрезка I_0 принадлежат множеству нейтрально предельных точек $\mathrm{Lim}^{\perp}(f)$. Для точек, расположенных выше точки $(\frac{1}{2}, 0)$, рассуждения несколько усложняются, так как полное выражение (5.2) для вычисления r-координат имеет два варианта, в зависимости от того, выше или ниже r-координата значения $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_i$. Однако, если взять достаточно высоко расположенную точку, например, точку $(\frac{3}{4}, 0)$, то точки ее нейтрального сечения с φ-координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, будут иметь r-координату, большую, чем $\frac{1}{2}$. Это можно доказать, полностью повторив для точки $(\frac{3}{4}, 0)$ рассуждения, которые использовались для $(\frac{1}{2}, 0)$, только заменив там выражение для вычисления r-координат нейтральных итераций с $\{r'_i\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$ на $\{r'_i\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$. Как следствие, получим, что точки нейтрального сечения точки $(\frac{3}{4}, 0)$ с φ-координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, сходятся к некоторой точке, также принадлежащей внутренности отрезка I_0. Из линейности отображения $\{r'_i\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$ этот же факт имеет место и для всех точек внутренности отрезка I_0, расположенных выше точки

$(\frac{3}{4},0)$, а также для точек, расположенных ниже точки $(\frac{3}{4},0)$, но выше некоторого предела.

Рассмотрим точки внутренности отрезка I_0, расположенные между точками $(\frac{1}{2},0)$ и $(\frac{3}{4},0)$. Спускаясь от точки $(\frac{3}{4},0)$ к точке $(\frac{1}{2},0)$, сначала все точки нейтрального сечения точки $(x,0)$ с φ-координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, будут иметь r-координату, большую, чем $\frac{1}{2}$ и доказательство сводится к случаю точки $(\frac{3}{4},0)$. Затем, начиная с некоторого значения r-координаты, только конечное число точек будет вычисляться с помощью выражения $\{r_i'\} = \frac{\{r\}-C_i}{1-C_i}$, а бесконечное число точек — с помощью выражения $\{r_i'\} = \frac{\{r\}}{1+C_i}$. В этом случае сходимость точек нейтрального сечения точки $(x,0)$ с φ-координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$ к некоторой точке, принадлежащей внутренности отрезка I_0, доказывается аналогично случаю точки $(\frac{1}{2},0)$.

Получим, что произвольной точке с координатами $(x,0)$ из внутренности отрезка I_0 можно единственным образом сопоставить наивысшую по r-координате точку ее нейтрально предельного множества, причем эта наивысшая точка нейтрально предельного множества также находится во внутренности отрезка I_0 и причем строго ниже исходной точки. Обозначим r-координату наивысшей точки через $\max^{\perp}(x)$. $\max^{\perp}(x)$ можно рассматривать как монотонное отображение отрезка $[0,1]$ в себя.

Покажем, что $\max^{\perp}(x)$ непрерывно зависит от x. Зафиксируем точку $(x,0)$ во внутренности отрезка I_0. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ обе точки $(x \pm \varepsilon, 0)$ также принадлежат внутренности отрезка I_0. Образы отрезка I_0 под действием отображений $f^{-n} \circ f^n$ представляют собой конечные наборы отрезков I_φ, где φ — некоторый прообраз 0 относительно отображения $2^n\varphi$. Каждый из отрезков I_φ является гомеоморфным образом отрезка I_0 под действием некоторой ветви отображения $f^{-n} \circ f^n$. Поэтому на каждом из отрезков I_φ будет в точности по одной точке нейтрального сечения точек $(x,0)$ и

$(x \pm \varepsilon, 0)$, причем в том же порядке, что и на I_φ. Как следствие, нейтральное сечение точки $(x,0)$ и любые его подмножества мажорируются соответствующими подмножествами нейтральных сечений выше и ниже расположенных точек $(x \pm \varepsilon, 0)$.

В частности, поскольку подпоследовательности точек нейтрального сечения точки $(x,0)$ и точек $(x \pm \varepsilon, 0)$ с φ-координатами, принадлежащими последовательности $(\frac{1}{2^n})$, сходятся, из этого следует непрерывность зависимости r-координаты $\max^\perp(x)$ наивысшей точки нейтрального предельного множества точки $(x,0)$ от выбора исходной точки $(x,0)$.

Отображение $\max^\perp(x)$ отрезка $[0,1]$ в себя монотонно и непрерывно, следовательно, это гомеоморфизм. Отсюда следует, что все точки внутренности отрезка I_0 принадлежат множеству нейтрально предельных точек $\mathrm{Lim}^\perp(f)$. А так как точки окружности $r = 0$ $\perp$-рекуррентные, то они по определению тоже принадлежат $\mathrm{Lim}^\perp(f)$. Из сопряженности сдвигом $r \mapsto r+1$ следует, что вся прямая $\varphi = 0$ принадлежит $\mathrm{Lim}^\perp(f)$. Поскольку множество $\mathrm{Lim}^\perp(f)$ замкнуто, а нейтральные образы прямой $\varphi = 0$ всюду плотны в цилиндре, отсюда следует, что множество нейтрально предельных точек $\mathrm{Lim}^\perp(f)$ совпадает со всем цилиндром.

Заметим, что нейтральные итерации $f^{-n} \circ f^n$, $n \geq 1$, переводят нейтральные сечения в нейтральные сечения, а сходящиеся подпоследовательности точек нейтрального сечения в сходящиеся подпоследовательности. Поэтому нейтральные предельные множества естественным образом самоподобны и обладают фрактальной структурой. К примеру, у нейтрального сечения точки $A = (\frac{1}{2}, 0)$ подпоследовательность $(A_{\frac{1}{2^n}})$ сходятся к точке $B = (0.393208\ldots, 0)$. Следовательно, для каждой точки нейтрального сечения точки B найдется подпоследовательность точек нейтрального сечения точки A, которая к ней сходится.

Далее, для точки B наивысшей точкой ее нейтрально предельного множества является точка $B' = (0.309225\ldots, 0)$, к которой сходится подпоследовательность $(B'_{\frac{1}{2^n}})$ точек ее нейтрального сечения. Следовательно, B' и все точки ее нейтрального сечения также входят в множество $\perp(A)$ и т.д. Рисунок 5.1 дает некоторое представление, как устроено множество $\perp\left(\left(\frac{3}{4}, 0\right)\right)$.

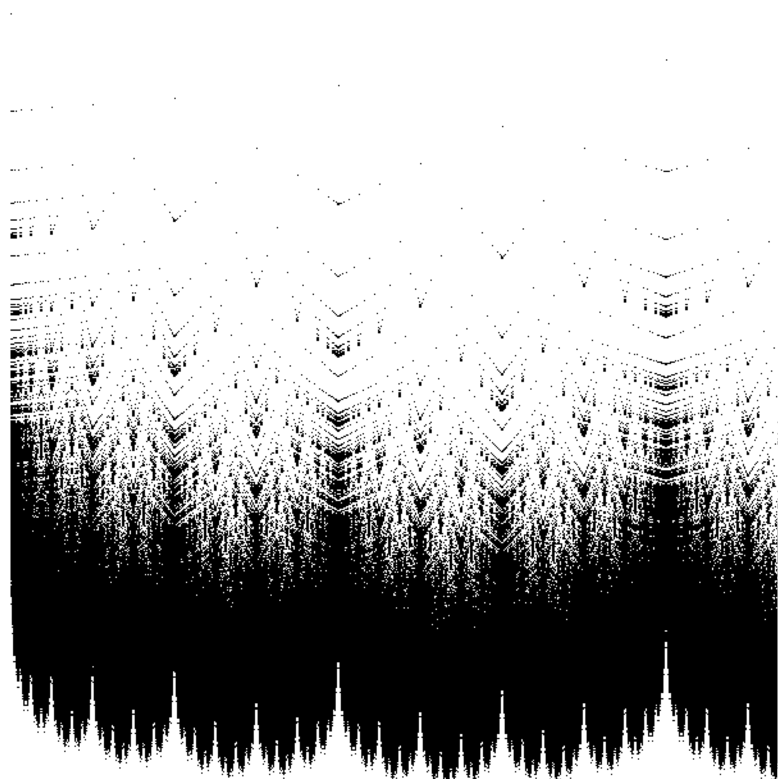

Рис. 5.1. Первые 20 итераций нейтрального сечения точки $(\frac{3}{4}, 0)$. Левый нижний угол U_0.

Покажем теперь, что точки внутренности отрезка I_0 нейтрально неблуждающие. Для этого рассмотрим малую окрестность D_ε произвольной точки $(x,0)$, являющуюся внутренностью квадрата, образованного точками $(x-\varepsilon,-\varepsilon)$, $(x+\varepsilon,-\varepsilon)$, $(x+\varepsilon,+\varepsilon)$, $(x-\varepsilon,+\varepsilon)$.

Как показано выше, для произвольной точки $C^2=(x_2,0)$ из внутренности отрезка I_0 найдутся $C^1=(x_1,0)$ и $C^0=(x_0,0)$, $x_0>x_1>x_2$, такие, что подпоследовательность $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$ нейтральных сечений точки C^1 стремится к $C^2=(x_2,0)$, а подпоследовательность $(C^0_{\frac{1}{2^n}})$ нейтральных сечений точки C^0 стремится к $C^1=(x_1,0)$.

Тогда в произвольно малой окрестности U точки C^2 содержится некоторая подпоследовательность последовательности точек $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$ нейтрального сечения точки C^1, сходящаяся к C^2, и некоторый набор подпоследовательностей нейтрального сечения точки C^0, сходящиеся к точкам последовательности точек $(C^1_{\frac{1}{2^n}})$, содержащимся в окрестности U. Обозначим множество угловых координат точек этих подпоследовательностей нейтрального сечения точки C^0 через $E(U)$.

Как следствие, для любой произвольно малой окрестности U точки C^2 можно выбрать два двоично-рациональных числа (обозначим их $\frac{d_1}{2^{m_1}}$ и $\frac{d_2}{2^{m_2}}$), которые принадлежат $E(U)$ и, следовательно, такие, что точки $C^0_{\frac{d_i}{2^{m_i}}}\in U$.

Рассмотрим ветвь нейтральной итерации, которая переводит точку C^2 в точку ее нейтрального сечения $C^2_{\frac{d_2}{2^{m_2}}-\frac{d_1}{2^{m_1}}}$. Обозначим ее через $h_{\frac{d_2}{2^{m_2}}-\frac{d_1}{2^{m_1}}}$. Это гомеоморфизм, элемент группы автоморфизмов накрытия для некоторой степени f. Эта же ветвь нейтральной итерации $h_{\frac{d_2}{2^{m_2}}-\frac{d_1}{2^{m_1}}}$ переводит точку $C^0_{\frac{d_1}{2^{m_1}}}$ в $C^0_{\frac{d_2}{2^{m_2}}}$. Но $C^0_{\frac{d_i}{2^{m_i}}}\in U$. Следовательно, для произвольной окрестности U имеем, что

$$h_{\frac{d_2}{2^{m_2}}-\frac{d_1}{2^{m_1}}}(U)\cap U\neq\varnothing.$$

Отсюда следует, что точка C^2 — нейтрально неблуждающая. Искомое утверждение следует из произвольности выбора точки C^2.

Полученное отображение f является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть $\perp$-неблуждающая точка, являющаяся $\perp$-предельной, но не являющаяся $\perp$-рекуррентной. $\square$

В предыдущем примере $\perp$-неблуждающие точки, не являющиеся $\perp$-рекуррентными, были $\perp$-предельными.

Пример 5.2. *Пример отображения, имеющего $\perp$-неблуждающие, но не $\perp$-предельные (и, следовательно, не $\perp$-рекуррентные) точки.*

Построение. Заменим в предыдущем примере 5.1 функцию $d(r,\varphi)$ на

$$d(r,\varphi) = \frac{1}{4}\sqrt[2]{\min\left(\{r\}, 1-\{r\}\right)}\sqrt[4]{\min\left(\{\varphi\}, 1-\{\varphi\}\right)}.$$

Как и в примере выше, благодаря специальному виду функции $d(r,\varphi)$, отображение f^{-1}, обратное к отображению f, можно выписать явно. Пусть $f\left((r',\varphi')\right) = (r,\varphi)$. Отображение f также имеет треугольный вид, и φ' можно разрешить через φ независимо от r и r'. Как и в примере 5.1, для φ' имеется 2 значения: $\varphi'_0 = \frac{\varphi}{2}$ и $\varphi'_1 = \left(\frac{\varphi}{2}+\frac{1}{2}\right) \bmod 1$. Аналогично обозначим $C_0 = \frac{1}{4}\sqrt[4]{\min\left(\{\varphi'_0\}, 1-\{\varphi'_0\}\right)}$ и $C_1 = \frac{1}{4}\sqrt[4]{\min\left(\{\varphi'_1\}, 1-\{\varphi'_1\}\right)}$. Тогда для r'_0 и r'_1 выполнены соотношения

$$r'_i + 1 + C_i\sqrt[2]{\min\left(\{r'_i\}, 1-\{r'_i\}\right)} = r$$

Запишем r'_i, $i \in \{0,1\}$, как сумму целой $\lfloor r'_i \rfloor$ и дробной $\{r'_i\}$ частей:

$$\lfloor r'_i \rfloor + \{r'_i\} + 1 + C_i\sqrt[2]{\min\left(\{r'_i\}, 1-\{r'_i\}\right)} = \lfloor r \rfloor + \{r\}.$$

Как и в примере выше, получим, что

$$\{r'_i\} + C_i\sqrt[2]{\min\left(\{r'_i\}, 1-\{r'_i\}\right)} = \{r\}.$$

Тогда $\{r'_i\}$ разрешается через $\{r\}$ следующим образом:

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \{r\} - C_i \left(\sqrt[2]{\frac{C_i^2}{4} + \{r\}} - \frac{C_i}{2} \right) & \{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\} \\ \{r\} - C_i \left(\frac{C_i}{2} + \sqrt[2]{\frac{C_i^2}{4} + 1 - \{r\}} \right) & \{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}. \end{cases}$$

Поскольку условия $\{r'_i\} \leq 1 - \{r'_i\}$ и $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$ выражены в терминах искомой величины $\{r'_i\}$, их удобнее переписать в терминах сравнения $\{r\}$ с некоторым пороговым значением. Если $\{r'_i\} \leq 1-\{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \leq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}C_i$. И наоборот, если $\{r'_i\} \geq 1 - \{r'_i\}$, то $\{r'_i\} \geq \frac{1}{2}$, следовательно, $\{r\} \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}C_i$. Тогда, зная φ'_i, r'_i можно однозначно вычислить через r и φ'_i:

$$\lfloor r'_i \rfloor = \lfloor r \rfloor - 1 \tag{5.3}$$

$$\{r'_i\} = \begin{cases} \{r\} - C_i \left(\sqrt[2]{\frac{C_i^2}{4} + \{r\}} - \frac{C_i}{2} \right) & \{r\} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i \\ \{r\} - C_i \left(\frac{C_i}{2} + \sqrt[2]{\frac{C_i^2}{4} + 1 - \{r\}} \right) & \{r\} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}C_i. \end{cases}$$

Воспользуемся такими же обозначениями U_0, I_0, что и в примере выше. Можно показать прямым вычислением, что для любой точки $A = (x, 0)$ внутренности отрезка I_0 подпоследовательность точек $(A_{\frac{1}{2^n}})$ нейтрального сечения точки $A = (x, 0)$ сходится к точке $(0, 0)$.

Как следствие, точки из внутренности множества U_0 не являются $\perp$-предельными точками.

Покажем, что все точки из внутренности множества U_0 $\perp$-неблуждающие. Так как нейтральные итерации отрезка I_0 всюду плотны в U_0, достаточно рассмотреть точки из внутренности отрезка I_0. Рассмотрим произвольную точку $A \in \operatorname{Int} I_0$. Рассмотрим произвольную малую открытую окрестность U точки A. Пусть точка A имеет координаты $(x, 0)$. Рассмотрим окружность $r = x$, проходящую через точку A. Так как U — открытая окружность, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что метрическая окрестность $B_\varepsilon(A)$ радиуса ε вокруг точки A полностью содержится в U.

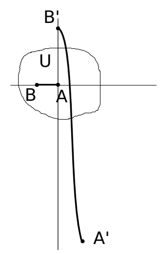

Рис. 5.2. К примеру 5.2.

Пусть $B \in B_\varepsilon(A) \cap \{r = x\} \cap \cup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(f^n(I_0))$ — точка на окружности $r = x$, которая содержится в $B_\varepsilon(A)$ и в некоторой нейтральной итерации I_0. Пусть точка B имеет координаты $(-\varphi', x)$. Поскольку B лежит на нейтральной итерации отрезка I_0, найдется $h_{\varphi'}$ — гомеоморфизм группы итерированной монодромии, который сдвигает отрезок, на котором лежит точка B, в отрезок I_0. Но тогда при этом отрезок I_0 перейдет в отрезок I'_φ. Поскольку точки отрезка I_0 выше всех своих нейтральных итераций, то точка A перейдет в точку A', которая будет ниже точки A, а точка B перейдет в точку B', которая будет выше точки A. Но тогда отрезок BA окружности $r = x$ перейдет в отрезок $B'A'$ замкнутой кривой $h_{\varphi'}(\{r = x\})$, который так же, как и отрезок BA, пересекает каждую координатную прямую $\varphi = const$ в единственной точке. Эта ситуация изображена на рисунке 5.2. Так как отрезок $B'A'$ так же, как и отрезок BA, пересекает каждую координатную прямую $\varphi = const$ в единственной точке, поскольку является его сдвигом под действием $h_{\varphi'}$, точка A' ниже точки A, а точка B' выше точки A, то отрезок $B'A'$ пересекает окружность $r = x$ в шаре

$B_\varepsilon(A)$. Но отрезок $B'A'$ по построению лежит в $h_{\varphi'}(U)$. Следовательно, $U \cap h_{\varphi'}(U) \neq \varnothing$ и U нельзя выделить из множества $\cup_{h_\varphi \in G_{f^\infty}} h_\varphi(U)$ компонентой связности.

Из произвольности выбора окрестности U следует, что точка A $\perp$-неблуждающая. Из произвольности выбора точки A следует, что все точки из внутренности I_0 $\perp$-неблуждающие.

Полученное отображение f является искомым примером внутреннего отображения, у которого есть $\perp$-неблуждающая точка, не являющаяся $\perp$-предельной и $\perp$-рекуррентной. $\square$

Список литературы

[1] *Власенко И. Ю.* Динамика внутренних отображений // *Нелінійні коливання.* — 2011. — 2. — С. 181–186.

[2] *Власенко И. Ю.* Внутренние отображения: топологические инварианты и их приложения. — Праці Інституту математики НАН України. Математика та її застосування. Інститут математики НАН України, Київ, 2014. — **101**. — С. 225.

[3] *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. — Москва–Ижевск: РХД, 2011. — С. 423.

[4] *Власенко И. Ю.* Пример нейтрально неблуждающей, но не нейтрально рекуррентной точки // *Укр. мат. журн.* — 2015. — **67**, 8. — С. 1030–1033.

[5] *Косневски Ч.* Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983. — С. 304.