Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 214–226

УДК 517.51

Д. А. Найко

(Вінницький національний аграрний університет)

Про деякі апроксимаційні властивості q-параметричних многочленів Бернштейна

dmnaiko@ukr.net

In 1997 Phillips [1] introduced generalized Bernstein polynomials $B_n(f,q;x)$ based on the q–integers and q–binomial coefficients for any $q>0$. For $q=1$, generalized Bernstein polynomials $B_n(f,q;x)$ coincide with the classical ones $B_n(f;x)$. For $q \neq 1$, one gets a new class of polynomials having many interesting properties. In this paper we obtain the asymptotic formulae on the approximation of function $f(t)=t^i \ \ (i \in Z)$ by the generalized Bernstein polynomials $B_n(f,q;x)$ in the case q is fixed as $n \to +\infty$.

У 1997 році Філіпс (Fhillips) ввів узагальнені поліноми Бернштейна $B_n(f,q;x)$, побудовані на q–біноміальних коефіцієнтах $(q>0)$. При $q=1$ поліноми $B_n(f,q;x)$ збігаються з класичними многочленами Бернштейна $B_n(f;x)$, але у випадку $q \neq 1$ — це новий клас поліномів, що мають цілий ряд цікавих властивостей. Ми встановлюємо асимптотичну формулу наближення q–поліномами Бернштейна степеневої функції при фіксованому q.

Наведемо означення q–поліномів Бернштейна, введених Філіпсом [1], та деякі їхні властивості, пов'язані в тій чи іншій мірі з нашим дослідженням. Деякі результати досліджень цих операторів можна знайти, зокрема, в роботах [1–10].

Нехай $q>0$. Для будь–якого $n=0,1,2,...$ у вигляді

$$[n]_q := 1+q+...+q^{n-1} \quad (n\in N), \quad [0]_q := 0,$$

визначається q–число $[n]_q$. Вводимо q–факторіал $[n]_q!$ за допомогою рівності

$$[n]_q! = [1]_q[2]_q...[n]_q \quad (n\in N), \quad [0]_q! := 0.$$

q–біноміальними коефіцієнтами називаються числа

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}, \ 0\le k\le n.$$

Означення. *Нехай $f\in C[0,1]$. Узагальненим поліномом Бернштейна, побудованим на q–числах, називаєтьcя поліном*

$$B_n(f,q;x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k}(1-q^s x), \tag{1}$$

$n=1,2,\dots$. (Вважаємо, що порожній добуток дорівнює одиниці). Ці поліноми ввів Філіпс [1] у 1997 році.

Оскільки параметр q вводиться в номери членів послідовності $\{B_n(f,q;x)\}$, то зміна параметра q призводить до зміни швидкості збіжності цієї послідовності. Якщо $q=1$, то $B_n(f,q;x) = B_n(f;x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k}$ — класичний многочлен Бернштейна.

З (1) випливає, що $B_n(f,q;0)=f(0)$, $B_n(f,q;1)=f(1)$ при всіх $q>0$ та $n\in N$.

В [1] показано, що

$$B_n(at+b,q;x) = ax+b \tag{2}$$

для всіх $q>0$ та $n\in N$ і доведено таку теорему (див. також [2]).

Теорема 1. *Нехай послідовність $\{q_n\}$ така, що $0 < q_n < 1$ і $q_n \to 1$ при $n \to \infty$. Тоді для будь–якої функції $f \in C[0,1]$*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f, q_n; x) = f(x) \text{ рівномірно відносно } x \in [0,1].$$

Позначимо через $p_{nk}(q;x) := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-1-k} (1 - q^s x), \quad n \in N.$

Очевидно, що $p_{nk}(q;x) \geq 0$ при $q \in (0,1)$ та $x \in [0,1]$. З (2) при $a = 0$, $b = 1$ одержуємо, що $\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(q;x) = 1 \;\; \forall n \in N$. Легко бачити, що $\lim_{n\to\infty} \frac{[k]_q}{[n]_q} = 1 - q^k$.

Позначимо через

$$p_{\infty k}(q;x) := \lim_{n\to\infty} p_{nk}(q;x) = \frac{x^k}{(1-q)^k [k]_q!} \prod_{s=0}^{\infty} (1 - q^s x).$$

Очевидно, що $p_{\infty k}(q;x) \geq 0$ для $x \in [0,1]$, крім того (див. [11]) $\sum_{k=0}^{\infty} p_{\infty k}(q;x) = 1$.

Нехай

$$B_\infty(f,q;x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f(1-q^k) p_{\infty k}(q;x), & x \in [0,1); \\ f(1), & x = 1. \end{cases} \tag{3}$$

О. Ільїнським та С. Островською [2] встановлено такі результати.

Теорема 2. *Для будь–якої функції $f \in C[0,1]$*

$$\lim_{q\to 1-o} B_\infty(f,q;x) = f(x) \text{ рівномірно по } x \in [0,1].$$

Теорема 3. *Якщо f — многочлен, то $B_\infty(f,q;x)$ теж многочлен, причому*

$$\deg B_\infty(f,q;x) = \deg f.$$

Теорема 4. *Нехай f є многочлен. У такому разі $B_\infty(f,q;x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $f = 0$.*

Теорема 5. *Нехай* $f \in C[0,1]$*, фіксоване* $q \in (0,1)$*. То* $B_\infty(f,q;x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$ *тоді і тільки тоді, коли* $f(x) = ax + b, \ a, b \in R$*.*

З (1) випливає, що при $0 < q \le 1$ $B_n(f,q;x)$ є лінійним додатним оператором на $[0,1]$.

У випадку $q \ge 1$ Філіпс [1] показав, що

$$B_n(t^2,q;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]_q}. \tag{4}$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(t^2,q;x) = x^2$ тоді і тільки тоді, коли $q \ge 1$.

Дослідження операторів $B_n(f,q;x)$ у випадку $q \ge 1$ можна знайти, наприклад, в [3].

Теорема 6. *Нехай* $q \ge 1$ *— фіксоване дійсне число. Тоді для будь–якого многочлена* $p(x)$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(p,q;x) = p(x).$$

Теорема 7. *Нехай* $q \in (1,\infty)$*, а функція* f *— аналітична в деякому* ε*–околі з відрізка* $[0,1]$*. Тоді для будь–якої компактної множини* $K \subset D_\varepsilon := \{z : |z| < \varepsilon\}$

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,q;z) = f(z), \ \ \forall z \in K.$$

Наступна теорема описує поведінку оператора $B_n(f,q;x)$ при $q \to +\infty$ та достатній гладкості функції f.

Теорема 8. *Нехай* $f \in C^{n-1}[0,1]$*. Тоді для будь–якої компактної множини* $K \subset C$

$$\lim_{q\to+\infty} B_n(f,q;z) = B_n(f,\infty;x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} +$$

$$+ z^n \left\{ f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right\}$$

рівномірно по $z \in K$*.*

Наслідок 1. *Якщо f аналітична в крузі D_R, $R > 1$, то*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f,\infty;z) = f(z), \quad |z| \le 1, \textit{ рівномірно по } z.$$

Отже, взявши q нескінченно великим, ми отримуємо послідовність $\{B_n(f,q;x)\}$ з хорошими аппроксимаційними властивостями.

Наслідок 2. *Якщо p — многочлен степеня $\le n$, то $B_n(p,\infty;z) = p(z)$.*

Встановимо теорему про асимптотичне подання $B_n(t^i,q;x)$, $i = 0,1,2,\dots$, за степенями $[n]_q$.

В [5] показано, що

$$B_n(t^i,q;x) = \sum_{j=0}^{i} \alpha_j(q,n)[n]_q^{j-i} S_q(i,j)x^j, \tag{5}$$

де

$$\alpha_j = \alpha_j(q,n) = \prod_{r=0}^{j-1}\left(1 - \frac{[r]_q}{[n]_q}\right) \tag{6}$$

(вважаємо, що порожній добуток дорівнює 1); функції $S_q(i,j)$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$S_q(i+1,j) = S_q(i,j-1) + [j]_q S_q(i,j),$$

де $S_q(0,0) := 1$, $S_q(i,0) := 0$ при $i > 0$, $S_q(i,j) := 0$ при $i < j$.

Теорема 9. *При фіксованому i q–поліном Бернштейна $B_n(t^i,q;x)$ має таке асимптотичне подання*

$$\begin{aligned} B_n(t^i,q;x) = \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i,p)\times \\ \times \sum_{(s_1,\dots,s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \dots [s_{p+m-i}]_q, \end{aligned} \tag{7}$$

де сума $\sum\limits_{(s_1,\dots,s_r)}^{k}[s_1]_q...[s_r]_q$ *береться за всіма можливими комбінаціями* $(s_1,...,s_r)$ *з перших* k *чисел послідовності* $1,2,\dots,$ $i-1$ *по* r *чисел; крім того,* $\sum\limits_{(s_1,\dots,s_0)}^{k}[s_1]_q...[s_0]_q := 1$, *коли* $k=-1,0,1,2,...;$ $\sum\limits_{(s_1,\dots,s_r)}^{k}[s_1]_q...[s_r]_q := 0$, *коли* $r>k$.

Доведення. Спочатку знайдемо асимптотичне подання за степенями $[n]_q$ чисел α_j з (6). А саме, покажемо, що

$$\alpha_j(q,n)=\sum_{r=0}^{j-1}(-1)^r\frac{1}{[n]_q^r}\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1}[s_1]_q...[s_r]_q. \tag{8}$$

Доведення цього факту проведемо індукцією по j. Справді, з (6) маємо

$$\alpha_1(q,n)=1,\;\;\alpha_2(q,n)=\alpha_1(q,n)\left(1-\frac{[1]_q}{[n]_q}\right)=1-\frac{[1]_q}{[n]_q},$$

$$\alpha_3(q,n)=\alpha_2(q,n)\left(1-\frac{[2]_q}{[n]_q}\right)=\left(1-\frac{[1]_q+[2]_q}{[n]_q}+\frac{[1]_q[2]_q}{[n]_q^2}\right),$$

$$\alpha_4(q,n)=\alpha_3(q,n)\left(1-\frac{[3]_q}{[n]_q}\right)=\left(1-\frac{[1]_q+[2]_q+[3]_q}{[n]_q}+\right.$$

$$\left.+\frac{[1]_q[2]_q+[1]_q[3]_q+[2]_q[3]_q}{[n]_q^2}-\frac{[1]_q[2]_q[3]_q}{[n]_q^3}\right).$$

Припустимо, що рівність (8) виконується для $j\in N$ і доведемо її виконання для $j+1$. Справді,

$$\alpha_{j+1}(q,n) = \alpha_j(q,n)\left(1 - \frac{[j]_q}{[n]_q}\right) = \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q + \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^{r+1} \frac{1}{[n]_q^{r+1}} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q [j]_q =$$

$$= \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q + \sum_{m=0}^{j} (-1)^m \frac{1}{[n]_q^m} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_m)}^{j} [s_1]_q \dots [s_m]_q = (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^0} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_0]_q +$$

$$+ \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q + \sum_{m=1}^{j-1} (-1)^m \frac{1}{[n]_q^m} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_m)}^{j} [s_1]_q \dots [s_m]_q + (-1)^j \frac{1}{[n]_q^j} \sum_{(s_1,\dots,s_j)}^{j} [s_1]_q \dots [s_j]_q = (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^0} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{j} [s_1]_q \dots [s_0]_q + \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \left(\sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q + \right.$$

$$\left. + \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j} [s_1]_q \dots [s_r]_q \right) + (-1)^j \frac{1}{[n]_q^j} \sum_{(s_1,\dots,s_j)}^{j} [s_1]_q \dots [s_j]_q =$$

.

$$= (-1)^0 \frac{1}{[n]_q^0} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{j} [s_1]_q \dots [s_0]_q + \sum_{r=1}^{j-1} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j} [s_1]_q \dots [s_r]_q +$$

$$+(-1)^j \frac{1}{[n]_q^j} \sum_{(s_1,\dots,s_j)}^{j} [s_1]_q \dots [s_j]_q = \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^r} \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j} [s_1]_q \dots [s_r]_q.$$

Рівність (8) доведено.

З (5) та (8) маємо

$$B_n(t^i, q; x) = \sum_{j=0}^{i} x^j S_q(i,j) \sum_{r=0}^{j} (-1)^r \frac{1}{[n]_q^{i+r-j}} \times \\ \times \sum_{(s_1,\dots,s_r)}^{j-1} [s_1]_q \dots [s_r]_q. \tag{9}$$

Міняючи в (9), де потрібно, порядок сум, одержимо

$$B_n(t^i, q; x) = x^0 S_q(i,0) \{(-1)^0 \frac{1}{[n]_q^i} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{-1} [s_1]_q \dots [s_0]_q\} +$$

$$+x^1 S_q(i,1) \{(-1)^0 \frac{1}{[n]_q^{i-1}} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{0} [s_1]_q \dots [s_0]_q + (-1)^1 \frac{1}{[n]_q^i} \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{0} [s_1]_q \dots [s_1]_q\} + x^2 S_q(i,2) \{(-1)^0 \frac{1}{[n]_q^{i-2}} \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{1} [s_1]_q \dots [s_0]_q +$$

$$+(-1)^1 \frac{1}{[n]_q^{i-1}} \sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{1} [s_1]_q \dots [s_1]_q + (-1)^2 \frac{1}{[n]_q^i} \sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{1} [s_1]_q \dots [s_2]_q\} +$$

$$+x^3S_q(i,3)\{(-1)^0\frac{1}{[n]_q^{i-3}}\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{2}[s_1]_q...[s_0]_q+(-1)^1\frac{1}{[n]_q^{i-2}}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{2}[s_1]_q...[s_1]_q+(-1)^2\frac{1}{[n]_q^{i-1}}\sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{2}[s_1]_q...[s_2]_q+$$

$$+(-1)^3\frac{1}{[n]_q^{i}}\sum_{(s_1,\dots,s_3)}^{2}[s_1]_q...[s_3]_q\}+\ldots+x^iS_q(i,i)\{(-1)^0\frac{1}{[n]_q^0}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{i-1}[s_1]_q...[s_0]_q+(-1)^1\frac{1}{[n]_q}\sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{i-1}[s_1]_q...[s_1]_q+(-1)^2\frac{1}{[n]_q^2}\times$$

$$\times\sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{i-1}[s_1]_q...[s_2]_q+...+(-1)^i\frac{1}{[n]_q^i}\sum_{(s_1,\dots,s_i)}^{i-1}[s_1]_q...[s_i]_q\}=$$

$$=\frac{1}{[n]_q^0}\{(-1)^0x^iS_q(i,i)\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{i-1}[s_1]_q...[s_0]_q\}+\frac{1}{[n]_q}\{(-1)^0x^{i-1}\times$$

$$\times S_q(i,i-1)\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{i-2}[s_1]_q...[s_0]_q+(-1)^1x^iS_q(i,i)\sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{i-1}[s_1]_q...[s_1]_q\}+$$

$$+\frac{1}{[n]_q^2}\{(-1)^0x^{i-2}S_q(i,i-2)\sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{i-3}[s_1]_q...[s_0]_q+$$

$$+(-1)^1x^{i-1}S_q(i,i-1)\sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{i-2}[s_1]_q...[s_1]_q+(-1)^2x^iS_q(i,i)\times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_2]_q \} + ... + \frac{1}{[n]_q^i} \{ (-1)^0 x^0 S_q(i,0) \sum_{(s_1,\dots,s_0)}^{-1} [s_1]_q ... [s_0]_q +$$

$$+(-1)^1 x^1 S_q(i,1) \sum_{(s_1,\dots,s_1)}^{0} [s_1]_q ... [s_1]_q + (-1)^2 x^2 S_q(i,2) \times$$

$$\times \sum_{(s_1,\dots,s_2)}^{1} [s_1]_q ... [s_2]_q + ... + (-1)^i x^i S_q(i,i) \sum_{(s_1,\dots,s_i)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_i]_q \} =$$

$$= \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k x^{i-m+k} S_q(i, i-m+k) \sum_{(s_1,\dots,s_k)}^{i-m+k-1} [s_1]_q ... [s_k]_q =$$

$$= \{ p := i-m+k \Rightarrow k = p+m-i; \quad k=0 \Rightarrow p = i-m;$$

$$k = m \Rightarrow p = i \} =$$

$$= \sum_{m=0}^{i} \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i,p) \sum_{(s_1,\dots,s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q ... [s_{p+m-i}]_q .$$

Теорему доведено.

Оскільки $S_q(i,i) = 1$, $\sum\limits_{(s_1,\dots,s_0)}^{i-1} [s_1]_q ... [s_0]_q = 1$, то

$$B_n(t^i, q; x) = x^i + \sum_{m=1}^{i} \frac{1}{[n]_q^m} \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i,p) \times \\ \times \sum_{(s_1,\dots,s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q ... [s_{p+m-i}]_q . \quad (10)$$

Позначимо

$$A_m(i,q,x) := \sum_{p=i-m}^{i} (-1)^{p+m-i} x^p S_q(i,p) \sum_{(s_1,\dots,s_{p+m-i})}^{p-1} [s_1]_q \dots [s_{p+m-i}]_q.$$

Тоді рівність (10) набуває вигляду

$$B_n(t^i,q;x) = x^i + \sum_{m=1}^{i} \frac{A_m(i,q,x)}{[n]_q^m}, \tag{11}$$

де $A_m(i,q,x)$ не залежать від n.

Наслідок 1. *При $i=2$ з (10) та (11) одержуємо рівність (4).*

Наслідок 2. *Оскільки при фіксованому $q \geq 1$ з умови $n \to \infty$ випливає умова $[n]_q \to \infty$, то з (11) одержуємо теорему 6.*

Наслідок 3. *Якщо $\varphi(x)$ — многочлен, то при фіксованих n та q з (11) одержуємо, що*

$$\deg B_n(\varphi(t),q;x) = \deg \varphi(x),$$

бо $A_m(i,q,x)$ є многочленом степеня $i-1$ відносно x.

Зауваження. Рівність (11) може бути використана для встановлення асимптотичних формул для центральних моментів операторів $B_n(\cdot,q;x)$, як це робилось автором [16–18] у випадку лінійних додатних операторів класу Волкова [12–15] та їх комбінацій.

Список літератури

[1] *Phillips G. M.* Bernstein polynomials based on the q–integers // Ann. Numer. Math. — 1997. — **4**. — P. 258–264.

[2] *Il'inskii A. and Ostrovska S.* Convergence of generalized Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. — 2002. — **116**. — P. 100–112.

[3] *Ostrovska S.* q–Bernstein polynomials and their iterates // J. Approx. Theory. — 2003. — **123**, № 2. — P. 232–255.

[4] *Ostrovska S.* On the improvement of analytic properties under the limit q–Bernstein operator // J. Approx. Theory. — 2006. — **138**. — P. 37–53.

[5] *Goodman T. N. T., Oruc H. and Phillips G. M.* Convexity and generalized Bernstein polynomials // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1999. — **42**, № 1. — P. 179–190.

[6] *Heping Wong and Meng Fanjun.* The rate of convergence of q–Bernstein polynomials for $0 < q < 1$ // J. Approx. Theory. — 2005. — **136**. — P. 151–158.

[7] *Heping Wong.* Korovkin-type theorem and application // J. Approx. Theory. — 2005. — **132**, № 2. — P. 133–165.

[8] *Oruc H. and Phillips G. M.* A generalization of Bernstein polynomials // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1999. — **42**, № 2. — P. 403–413.

[9] *Oruc H. and Tuncer N.* On the convergence and iterates of q–Bernstein polynomials // J. Approx. Theory. — 2002. — **117**. — P. 301–313.

[10] *Tiberiu Trif.* Meyer-König and Zeller operators based on the q–integers // Rev. Anal. Numer. Theory Approx. — 2000. — **29**, № 2. — P. 221–229.

[11] *Andrews G. E.* The theory of partitions. — Addison-Wesley: Reading, **MA**, 1976.

[12] *Волков Ю. И.* Об аппроксимационных операторах, порожденных нетрицательными мерами // ДАН СССР. — 1982. — **263**, № 2. — С. 280–282.

[13] *Волков Ю. И.* Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега-Стилтьеса // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — **47**, № 3. — С. 435–454.

[14] *Волков Ю. И.* Новые примеры аппроксимационных линейных положительных операторов // Методы теории приближения и их приложения. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. — С. 10–19.

[15] *Волков Ю. И.* О некоторых линейных положительных операторах // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 5. — С. 659–669.

[16] *Найко Д. А.* О приближении производных некоторыми комбинациями операторов класса B // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 583–587.

[17] *Найко Д. А.* Прямые и обратные теоремы приближения функций комбинациями операторов класса B. — Киев, 1987. — 52 с. — (Препринт / АН УССР. Ин–т математики; 87. 19).

[18] *Найко Д. А.* Улучшение сходимости многомерных операторов типа B // Приближение функций многих переменных операторами типа B. — Киев, 1987. — С. 36–56. — (Препринт /АН УССР. Ин–т математики, 87. 28).