Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2016, т. 13, № 2, 281–300

УДК 517.956.223

І. С. Чепурухіна

(Інститут математики НАН України, Київ)

Теореми типу Лінса-Мадженеса для еліптичних за Лавруком крайових задач

Chepuruhina@mail.ru

We investigate elliptic boundary-value problems with additional unknown functions in boundary-conditions introduced by Lawruk. We prove that these problems are Fredholm in some Sobolev spaces of order $s < 2q$, where $2q$ is the order of the corresponding elliptic equation. Thus, we establish certain versions of the Lions-Magenes theorems for these problems.

Досліджено еліптичні крайові задачі з додатковими невідомими функціями у крайових умовах, введені Лавруком. Доведено, що ці задачі є нетеровими у деяких просторах Соболєва порядку $s < 2q$, де $2q$ — порядок відповідного еліптичного рівняння. Тим самим встановлено деякі версії теорем Ліонса-Мадженеса для цих задач.

1. Вступ

У 1963 році Б. Лавруком [1–3] був введений важливий клас еліптичних крайових задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Цей клас природно виникає при переході від загальної (нерегулярної) еліптичної крайової до формально спряженої задачі і є замкненим відносно такого переходу. Як з'ясувалося, до цього класу належать різні крайові задачі, які виникають у теорії пружності і гідродинаміці [4–6].

Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком були досліджені у соболєвських просторах В. О. Козловим, В. Г. Маз'єю, Й. Россманом [7, розд. 3] та І. Я. Ройтберг [8,9] (див. також монографію [10, розд. 2]). Ключовим результатом цих досліджень є теорема про нетеровість обмежених операторів, що відповідають зазначеним задачам на двобічній шкалі просторів, введених Я. А. Ройтбергом [11–13]. Для показника регулярності $s \geq 2q$, де $2q$ — порядок еліптичного рівняння, ці простори збігаються з просторами Соболєва у евклідовій області, для інших значень s вони відрізняються від соболєвських просторів і складаються з елементів, які, взагалі кажучи, не є розподілами.

Мета цієї статті — довести теореми про нетеровість еліптичних за Лавруком крайових задач у просторах Соболєва з показником регулярності $s < 2q$. Для цього буде використано підхід, запропонований Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом [14–17] і розвинутий у роботах [18–21]. Тому ці теореми природно називати теоремами типу Ліонса-Мадженеса. У них областю визначення оператора задачі служить частина простору Соболєва порядку $s < 2q$, яка переводиться еліптичним диференціальним оператором у деякій спеціально вибраний функціональний простір.

Відмітимо [22–26], що еліптичні за Лавруком крайові задачі були досліджені також у інших класах функціональних просторів, ніж простори Соболєва-Ройтберга.

2. Постановка задачі

Нехай Ω є довільна обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де ціле $n \geq 2$. Припускаємо, що її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є замкненим (тобто компактним і без краю) орієнтовним і нескінченно гладким многовидом вимірності $n-1$ (при цьому C^∞-структура на Γ породжена простором

$\mathbb{R}^n$). Позначимо через $\nu(x)$ орт внутрішньої нормалі до межі Γ у точці $x \in \Gamma$, а через ν нескінченно гладке векторне поле цих ортів, задане на Γ.

Виберемо довільно цілі числа $q \geq 1$, $\varkappa \geq 1$, $m_1, \ldots, m_{q+\varkappa} \leq 2q-1$ і $r_1, \ldots, r_\varkappa$. Розглянемо в області Ω крайову задачу із $\varkappa$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$Au = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1}$$

$$B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j = 1, ..., q+\varkappa. \tag{2}$$

Тут $A := A(x, D)$ — лінійний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ парного порядку $2q \geq 2$, кожне $B_j := B_j(x, D)$ — крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку m_j, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ — дотичний лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord} C_{j,k} \leq m_j + r_k$. Усі коефіцієнти цих диференціальних операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями, заданими на $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ і Γ відповідно. Як зазвичай, $B_j = 0$ при $m_j < 0$ і $C_{j,k} = 0$ при $m_j + r_k < 0$.

У крайовій задачі (1), (2) функція u на Ω, і $\varkappa$ функцій $v_1, \ldots, v_\varkappa$ на Γ є шуканими. Усі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними.

У роботі припускаємо, що крайова задача (1), (2) є еліптичною в області Ω за Б. Лавруком [2, п. 1]. Слідуючи [7, п. 3.1.3], подамо означення еліптичності цієї задачі у такій еквівалентній формі.

Позначимо через $A^\circ(x, \xi)$ і $B_j^\circ(x, \xi)$ головні символи диференціальних операторів $A(x, D)$ і $B_j(x, D)$ відповідно, причому останні розглядаються як поліноми відносно частинних похідних, помножених на уявну одиницю i. Для кожної точки $x \in \overline{\Omega}$ вони є однорідними поліномами аргументу $\xi \in \mathbb{C}^n$ порядків $2q$ і m_j відповідно. Позначимо також через $C_{j,k}^\circ(x, \tau)$ головний символ дотичного диференціального оператора $C_{j,k}(x, D_\tau)$, якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} = m_j + r_k$. Для кожної точки $x \in \Gamma$ вираз $C_{j,k}^\circ(x, \tau)$ є однорідним поліномом порядку $m_j + r_k$ змінної τ, де τ— довільний дотичний вектор до межі Γ у точці x. Якщо $\operatorname{ord} C_{j,k} < m_j + r_k$, то покладаємо $C^{\circ}_{j,k}(x,\tau) := 0$.

Крайова задача (1), (2) називається еліптичною в області Ω, якщо виконуються такі три умови:

(i) Диференціальний оператор $A(x,D)$ є еліптичним у кожній точці $x \in \overline{\Omega}$, тобто $A^{\circ}(x,\xi) \neq 0$ для довільного вектора $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Диференціальний оператор $A(x,D)$ є правильно еліптичним у кожній точці $x \in \Gamma$, тобто для довільного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, многочлен $A^{\circ}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ комплексної змінної ζ має q коренів з додатною уявною частиною і стільки ж коренів з від'ємною уявною частиною (підрахованих з урахуванням їх кратності).

(iii) Система крайових умов (2) накриває рівняння (1) у кожній точці $x \in \Gamma$. Це значить, що для кожного вектора $\tau \neq 0$, дотичного до межі Γ у точці x, крайова задача

$$A^{\circ}(x, \tau + D_t\,\nu(x))\theta(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$B^{\circ}_j(x, \tau + D_t\,\nu(x))\theta(t)\big|_{t=0} + \sum_{k=1}^{\varkappa} C^{\circ}_{j,k}(x,\tau)\lambda_k = 0,$$

$$j = 1, ..., q + \varkappa,$$

має лише тривіальний (нульовий) розв'язок. Ця задача розглядається відносно невідомої функції $\theta \in C^{\infty}([0,\infty))$, що задовольняє умову $\theta(t) \to 0$ при $t \to \infty$, і невідомих комплексних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\varkappa}$. Тут $A^{\circ}(x, \tau + D_t\,\nu(x))$ і $B^{\circ}_j(x, \tau + D_t\,\nu(x))$ є диференціальні оператори відносно $D_t := i\partial/\partial t$, які отримуємо, поклавши $\zeta := D_t$ у відповідно многочленах $A^{\circ}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ і $B^{\circ}_j(x, \tau + \zeta\nu(x))$ змінної ζ.

Відмітимо, що умова (ii) є наслідком умови (i) у випадку, коли $n \geq 3$.

Приклад 1. Простим прикладом еліптичної крайової задачі (1), (2), де $n = 2$ і $\varkappa = 1$, служить така задача:

$$\begin{gathered}\Delta u = f \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u + v = g_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,\\ \partial_\nu u + \partial_\tau v = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma.\end{gathered}$$

Тут і далі Δ — оператор Лапласа, $\partial_\nu := \partial/\partial\nu$ є похідна вздовж орта ν, а $\partial_\tau := \partial/\partial\tau$ є похідна вздовж кривої Γ, яку обходимо так, щоб область Ω завжди була ліворуч.

Приклад 2. У випадку $\varkappa = 2$ розглянемо таку крайову задачу вигляду (1), (2):

$$\begin{gathered}Au = f \quad \text{в} \quad \Omega,\\ u + v_1 = g_1, \quad \partial_\nu u + v_2 = g_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,\\ \partial_\nu^2 u + \Delta_\Gamma v_1 = g_3, \quad \partial_\nu^3 u + \Delta_\Gamma v_2 = g_4 \quad \text{на} \quad \Gamma.\end{gathered}$$

Тут диференціальний оператор A, що задовольняє умови (i), (ii) означення, має четвертий порядок, а Δ_Γ є оператор Бельтрамі-Лапласа на Γ, при цьому на Γ введена ріманова метрика, індукована простором $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що для довільної точки $x \in \Gamma$ і вектора $\tau \neq 0$, дотичного до Γ у точці x, многочлен $A^{(0)}(x, \tau + \zeta\nu(x))$ не має кратних ζ-коренів. Це припущення виконується, наприклад, якщо $A = \partial_\nu^4 + \Delta_\Gamma^2$ на Γ. Безпосередньо перевіряється, що ця крайова задача є еліптичною за Лавруком в області Ω.

Пов'яжемо із задачею (1), (2) лінійне відображення

$$\begin{gathered}\Lambda : (u, v_1, ..., v_\varkappa) \mapsto\\ \mapsto \left(Au,\ B_1 u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{1,k} v_k, ..., B_{q+\varkappa} u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{q+\varkappa,k} v_k\right), \qquad (3)\\ \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma).\end{gathered}$$

Для опису області значень оператора, породженого цим відображенням, знадобиться спеціальна формула Гріна для задачі (1), (2), отримана Б. Лавруком [1, п. 4] (див. також монографію [7, теорема 3.1.2]):

$$(Au,w)_\Omega+\sum_{j=1}^{q+\varkappa}\Bigl(B_j u+\sum_{k=1}^{\varkappa}C_{j,k}v_k,h_j\Bigr)_\Gamma=(u,A^+w)_\Omega+$$
$$+\sum_{j=1}^{2q}\Bigl(D_\nu^{j-1}u,K_jw+\sum_{k=1}^{q+\varkappa}Q^+_{k,j}h_k\Bigr)_\Gamma+\sum_{j=1}^{\varkappa}\Bigl(v_j,\sum_{k=1}^{q+\varkappa}C^+_{k,j}h_k\Bigr)_\Gamma.$$

Тут функції $u,w\in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $v_1,\dots,v_\varkappa,h_1,\dots,h_{q+\varkappa}\in C^\infty(\Gamma)$ довільні, а $(\cdot,\cdot)_\Omega$ і $(\cdot,\cdot)_\Gamma$ є скалярні добутки у гільбертових просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ функцій квадратично інтегровних на Ω і Γ відповідно. Окрім того, тут A^+ є формально спряжений диференціальний оператор до A відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$, а $C^+_{k,j}$ і $Q^+_{k,j}$ є формально спряжені (дотичні) диференціальні оператори до відповідно $C_{k,j}$ і $Q_{k,j}$ відносно скалярного добутку в $L_2(\Gamma)$, причому дотичні диференціальні оператори $Q_{k,j}$ узяті із зображення крайових операторів B_j у вигляді

$$B_j(x,D)=\sum_{k=1}^{2q}Q_{j,k}(x,D_\tau)D_\nu^{k-1},$$

де $D_\nu:=i\partial/\partial\nu$. (Звісно, якщо $k>m_j$, то $Q_{j,k}=0$). Нарешті, $K_j:=K_j(x,D)$ є деякий крайовий лінійний диференціальний оператор на Γ порядку $\operatorname{ord}K_j\le 2q-j$.

З огляду на спеціальну формулу Гріна розглянемо в області Ω таку крайову задачу із $q+\varkappa$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$A^{+}w=\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{4}$$

$$K_j w+\sum_{k=1}^{q+\varkappa} Q^{+}_{k,j}h_k=\chi_j \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j=1,...,2q, \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{q+\varkappa} C^{+}_{k,j}h_k=\chi_{2q+j} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad j=1,...,\varkappa. \tag{6}$$

Ця задача формально спряжена до задачі (1), (2) відносно зазначеної формули Гріна. Відмітимо [7, теорема 3.1.2], що еліптичність задачі (1), (2) рівносильна еліптичності формально спряженої задачі (4), (5), (6).

Приклад 3. Запишемо спеціальну формулу Гріна для крайової задачі з прикладу 1 і відповідну формально спряжену задачу. Використовуючи другу класичну формулу Гріна для оператора Лапласа, напишемо таке:

$$\begin{gathered}(\Delta u,w)_\Omega+(u+v,h_1)_\Gamma+(\partial_\nu u+\partial_\tau v,h_2)_\Gamma=\\ =(u,\Delta w)_\Omega-(\partial_\nu u,w)_\Gamma+(u,\partial_\nu w)_\Gamma+\\ +(u+v,h_1)_\Gamma+(\partial_\nu u+\partial_\tau v,h_2)_\Gamma=\\ =(u,\Delta w)_\Omega+(u,\partial_\nu w+h_1)_\Gamma+\\ +(\partial_\nu u,-w+h_2)_\Gamma+(v,h_1-\partial_\tau h_2)_\Gamma\end{gathered}$$

для довільних функцій $u,w\in C^\infty(\overline{\Omega})$ і $v,h_1,h_2\in C^\infty(\Gamma)$. У результаті отримали спеціальну формулу Гріна

$$\begin{gathered}(\Delta u,w)_\Omega+(u+v,h_1)_\Gamma+(\partial_\nu u+\partial_\tau v,h_2)_\Gamma=\\ =(u,\Delta w)_\Omega+(u,\partial_\nu w+h_1)_\Gamma+\\ +(D_\nu u,-iw+ih_2)_\Gamma+(v,h_1-\partial_\tau h_2)_\Gamma.\end{gathered}$$

Отже, для розглянутої крайової задачі формально спряжена задача відносно цієї формули набирає вигляду

$$\begin{gathered}\Delta w=\omega \quad \text{в} \quad \Omega,\\ \partial_\nu w+h_1=\chi_1 \quad \text{на} \quad \Gamma,\\ -iw+ih_2=\chi_2 \quad \text{на} \quad \Gamma,\\ h_1-\partial_\tau h_2=\chi_3 \quad \text{на} \quad \Gamma.\end{gathered}$$

Остання задача містить на одну крайову умову більше, ніж вихідна задача. Відмітимо, що отримана формально спряжена задача еквівалентна еліптичній крайовій задачі

$$\Delta w=\omega \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (\partial_\nu+\partial_\tau)w=\chi \qquad \text{на} \quad \Gamma,$$

яка не містить додаткових невідомих функцій у крайовій умові. Справді, якщо вектор (w,h_1,h_2) є розв'язком формально спряженої задачі, то безпосередньо перевіряється, що функція w є розв'язком останньої задачі, де $\chi:=\chi_1+i\partial_\tau\chi_2-\chi_3$. Зворотно, якщо функція w є розв'язком цієї задачі, то, наприклад, вектор (w,h_1,h_2), де $h_1:=h_2:=0$, є розв'язком формально спряженої задачі з правими частинами

$$\chi_1:=\chi-(\partial_\tau w)\restriction\Gamma, \quad \chi_2:=-iw\restriction\Gamma, \quad \chi_3:=0.$$

Позначимо через N і N^+ лінійні простори усіх нескінченно гладких розв'язків відповідно задач (1), (2) і (4)–(6) з нульовими правими частинами. А саме, N складається з усіх розв'язків

$$(u,v_1,\ldots,v_\varkappa)\in C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^\varkappa$$

задачі (1), (2) у випадку, коли $f=0$ в Ω і всі $g_j=0$ на Γ. Аналогічно, N^+ складається з усіх розв'язків

$$(\omega,h_1,\ldots,h_{q+\varkappa})\in C^\infty(\overline{\Omega})\times(C^\infty(\Gamma))^{q+\varkappa}$$

задачі (4)–(6) у випадку, коли $\omega=0$ в Ω і всі $\chi_j=0$ та $\chi_{2q+j}=0$ на Γ. Оскільки задача еліптична в Ω, то простори N і N^+ скінченновимірні [7, лема 3.4.2].

3. Результати

Слідуючи [20] або [21, п. 4.4], введемо гільбертові функціональні простори, потрібні для формулювання результатів статті. Нехай $s \in \mathbb{R}$. Позначимо через $H^s(\mathbb{R}^n)$ гільбертів простір Соболєва порядку s, заданий на $\mathbb{R}^n$. Його елементами є повільно зростаючи розподіли на $\mathbb{R}^n$, які ми трактуємо як *анти*лінійні функціонали на просторі основних функцій.

У теорії функціональних просторів (див., наприклад, [27, п. 4.2.1]), простір Соболєва в області Ω означається за формулами

$$\begin{gathered} H^s(\Omega) := \bigl\{u := w \restriction \Omega : w \in H^s(\mathbb{R}^n)\bigr\}, \\ \|u\|_{H^s(\Omega)} := \inf\bigl\{\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : w \in H^s(\mathbb{R}^n),\ w = u \text{ на } \Omega\bigr\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Ж.-Л. Ліонс і Е. Мадженес [14–17] використовують це означення лише при $s \geq 0$, а для $s < 0$ як простір Соболєва порядку s у області Ω беруть антидуальний простір $(H_0^{-s}(\Omega))'$. Тут $H_0^{-s}(\Omega)$ — замикання множини $C_0^\infty(\Omega)$ в просторі $H^{-s}(\Omega)$, а дуальність простору розглядається відносно скалярного добутку в $L_2(\Omega)$.

У даній статті ми використовуємо означення простору Соболєва в області Ω, дане Ж.-Л. Ліонсом і Е. Мадженесом, тобто покладаємо

$$\mathrm{H}^s(\Omega) := \begin{cases} H^s(\Omega) & \text{при } s \geq 0, \\ (H_0^{-s}(\Omega))' & \text{при } s < 0. \end{cases}$$

У лівій частині цієї формули використовується пряме написання букви H, а не курсивне, як в означенні (7).

Нехай $s < 0$. Функціонали з простору $\mathrm{H}^s(\Omega)$ однозначно визначаються за своїми значеннями на пробних функціях з простору $C_0^\infty(\Omega)$. Тому коректно ототожнювати ці функціонали з розподілами в області Ω. При цьому

$$\begin{gathered} \mathrm{H}^s(\Omega) = \bigl\{w \restriction \Omega : w \in H^s_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)\bigr\}, \\ \|u\|_{\mathrm{H}^s(\Omega)} = \inf\bigl\{\|w\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} : w \in H^s_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n),\ w = u \text{ в } \Omega\bigr\}. \end{gathered}$$

Тут $H^s_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ позначає простір усіх розподілів $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}$, причому $H^s_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$ розглядається як підпростір простору $H^s(\mathbb{R}^n)$. Звідси випливає неперервне вкладення $\mathrm{H}^s(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega)$ і щільність множини $C_0^\infty(\Omega)$ в $\mathrm{H}^s(\Omega)$. Відмітимо, що

$$\mathrm{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega) \Leftrightarrow s \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2, -3/2, -5/2, \ldots\}.$$

Отже, якщо $s < 0$ напівціле, то простір $\mathrm{H}^s(\Omega)$ вужчий, ніж простір $H^s(\Omega)$.

Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varepsilon > 0$ виконується компактне і щільне вкладення $\mathrm{H}^{s+\varepsilon} \hookrightarrow \mathrm{H}^s(\Omega)$.

На замкненому многовиді Γ класу C^∞ гільбертів простір Соболєва $H^s(\Gamma)$ довільного порядку $s \in \mathbb{R}$ означається у стандартний спосіб за допомогою скінченного набору локальних карт і розбиття одиниці на Γ (див., наприклад, [27, п. 3.6.1])

Нехай $s < 2q$, а $X^{s-2q}(\Omega)$ є довільний гільбертів простір, неперервно вкладений у $\mathcal{D}'(\Omega)$. Як звичайно, $\mathcal{D}'(\Omega)$ позначає лінійний топологічний простір усіх розподілів в області Ω. Покладемо

$$\mathrm{H}^s_{A,X}(\Omega) := \bigl\{u \in \mathrm{H}^s(\Omega) : Au \in X^{s-2q}(\Omega)\bigr\}. \tag{8}$$

Тут і надалі образ Au для $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ розуміється у сенсі теорії розподілів. Лінійний простір (8) наділяємо нормою графіка

$$\|u\|_{\mathrm{H}^s_{A,X}(\Omega)} := \bigl(\|u\|^2_{\mathrm{H}^s(\Omega)} + \|Au\|^2_{X^{s-2q}(\Omega)}\bigr)^{1/2}.$$

Цей простір гільбертів і повний відносно введеної норми [21, с. 291].

Умова I_{s-2q}. Множина $X^\infty(\Omega) := X^{s-2q}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна у просторі $X^{s-2q}(\Omega)$ та існує число $c > 0$ таке, що

$$\|\mathcal{O}f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c\|f\|_{X^{s-2q}(\Omega)} \text{ для довільного } f \in X^\infty(\Omega).$$

Тут $\mathcal{O}f(x) = f(x)$ при $x \in \overline{\Omega}$ і $\mathcal{O}f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Ця умова введена О. О. Мурачем [20] (див. також монографію [21, п. 4.1.2]. Раніше дещо більш сильну умову, ніж I_{s-2q}

ввів Я. А. Ройтберг [28], який додатково вимагав, щоб $C^{\infty}(\overline{\Omega}) \subset X^{s-2q}(\Omega)$. Відмітимо, що чим менше s, тим слабша умова I_{s-2q} для одного і того ж простору $X^{s-2q}(\Omega)$.

Покладемо

$$C^{\infty}_{A,X}(\overline{\Omega}) := \bigl\{u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}) : Au \in X^{s-2q}(\Omega)\bigr\}.$$

Якщо простір $X^{s-2q}(\Omega)$ задовольняє умову I_{s-2q}, то множина $C^{\infty}_{A,X}(\overline{\Omega})$ щільна у ньому (див. [20, теорема 1] або [21, теорема 4.25]).

Із крайовою задачею (1), (2) пов'яжемо такі гільбертові простори:

$$D^{s}_{A,X}(\Omega,\Gamma) := \mathrm{H}^{s}_{A,X}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2}(\Gamma),$$

$$E^{s-2q}_{X}(\Omega,\Gamma) := X^{s-2q}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma).$$

Сформулюємо ключову теорему даної статті.

Теорема 1. *Нехай $s < 2q$, а $X^{s-2q}(\Omega)$ — довільний гільбертів простір, який неперервно вкладається в $\mathcal{D}'(\Omega)$ і задовольняє умову I_{s-2q}. Тоді відображення (3), де $u \in C^{\infty}_{A,X}(\overline{\Omega})$ і $v_1, \ldots, v_{\varkappa} \in C^{\infty}(\Gamma)$, продовжується единим чином (за неперервністю) до обмеженого і нетерового оператора*

$$\Lambda : D^{s}_{A,X}(\Omega,\Gamma) \to E^{s-2q}_{X}(\Omega,\Gamma). \tag{9}$$

Його ядро збігається з простором N, а область значень складається з усіх векторів

$$(f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in E^{s-2q}_{X}(\Omega,\Gamma),$$

які задовольняють умову

$$(f, w)_{\Omega} + \sum_{j=1}^{q+\varkappa} (g_j, h_j)_{\Gamma} = 0 \quad \text{для усіх} \quad (w, h_1, \ldots, h_{q+\varkappa}) \in N^{+}. \tag{10}$$

Якщо множина $\mathcal{O}(X^{\infty}(\Omega))$ *щільна у просторі* $H^{s-2q}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, *то індекс оператора* (9) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$.

Тут і далі через $(\cdot,\cdot)_{\Omega}$ і $(\cdot,\cdot)_{\Gamma}$ позначено продовження за неперервністю скалярних добутків у просторах $L_2(\Omega)$ і $L_2(\Gamma)$ відповідно.

Ця ключова теорема буде доведена у наступному розділі статті.

Розглянемо важливі приклади простору $X^{s-2q}(\Omega)$, який задовольняє умову I_{s-2q}. Дослідимо окремо випадки, коли у якості простору $X^{s-2q}(\Omega)$ можна узяти простір Соболєва або його ваговий аналог.

Як показано в [20, теорема 2] (див. також [21, теорема 4.26]) соболєвський простір $X^{s-2q}(\Omega) := \mathrm{H}^{\lambda}(\Omega)$, де $\lambda \in \mathbb{R}$, задовольняє умову I_{s-2q} тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda \geq \max\{s-2q, -1/2\}. \tag{11}$$

Для цього простору $X^{\infty}(\Omega) = C^{\infty}(\overline{\Omega})$ і тому множина $\mathcal{O}(X^{\infty}(\Omega))$ щільна у просторі $H^{s}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$. Отже, на підставі теореми 1 маємо такий результат:

Теорема 2. *Нехай дійсне* $s < 2q$. *Припустимо, що число* $\lambda \in \mathbb{R}$ *задовольняє умову* (11). *Тоді відображення* (3) *продовжується за неперервністю до обмеженого і нетерового оператора*

$$\begin{aligned} \Lambda : \Big\{ (u, v_1, \ldots, v_q) \in \mathrm{H}^{s}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2}(\Gamma) : \\ Au \in \mathrm{H}^{\lambda}(\Omega) \Big\} \to \mathrm{H}^{\lambda}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma), \end{aligned} \tag{12}$$

областю визначення якого є гільбертів простір відносно норми

$$\Big(\|u\|^2_{\mathrm{H}^{s}(\Omega)} + \|Au\|^2_{\mathrm{H}^{\lambda}(\Omega)} + \sum_{k=1}^{\varkappa} \|v_k\|^2_{H^{s+r_k-1/2}(\Gamma)} \Big)^{1/2}.$$

Індекс оператора (12) *дорівнює* $\dim N - \dim N^{+}$ *і не залежить від* s *і* λ.

Помітимо, що $X^{s-2q}(\Omega) \subseteq \mathrm{H}^{-1/2}(\Omega)$ за умови теореми 2. Простір $X^{s-2q}(\Omega)$, який містить широкий клас розподілів $f \notin \mathrm{H}^{-1/2}(\Omega)$ і задовольняє умову I_{s-2q}, можна отримати, використовуючи вагові соболєвські простори

$$\varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega) := \bigl\{f = \varrho v : v \in \mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)\bigr\},$$
$$\|f\|_{\varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)} := \|\varrho^{-1} f\|_{\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)}.$$

Тут ϱ — додатна функція класу $C^{\infty}(\overline{\Omega})$. Простір $\varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)$ гільбертів відносно уведеної у ньому норми.

Нехай $s < 2q - 1/2$. Як показано в [20, теорема 3] (див. також [21, теорема 4.28]), простір $X^{s-2q}(\Omega) := \varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)$ задовольняє умову I_{s-2q} тоді і тільки тоді, коли вагова функція ϱ задовольняє таку умову:

Умова II_{s-2q}. Функція ϱ є мультиплікатором у просторі $\mathrm{H}^{2q-s}(\Omega)$ і $D_{\nu}^{l}\varrho = 0$ на Γ для кожного $l \in \mathbb{Z}$ такого, що $0 \leq l < 2q - s - 1/2$.

Для простору $X^{s-2q}(\Omega) = \varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)$ множина $\mathcal{O}(X^{\infty}(\Omega))$ містить $C_0^{\infty}(\Omega)$ і тому щільна в $H_{\overline{\Omega}}^{s-2q}(\mathbb{R}^n)$. Отож на підставі теореми 1 маємо такий результат:

Теорема 3. *Нехай* $s < 2q - 1/2$ *і додатна функція* $\varrho \in C^{\infty}(\Omega)$ *задовольняє умову* II_{s-2q}. *Тоді відображення* (3), *де* $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $Au \in \varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)$ *і* $v_1, \ldots, v_{\varkappa} \in C^{\infty}(\Gamma)$, *продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого і нетерового оператора*

$$\begin{gathered}\Lambda : \Bigl\{(u, v_1, \ldots, v_q) \in \mathrm{H}^{s}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2}(\Gamma) : \\ Au \in \varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)\Bigr\} \to \varrho\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma),\end{gathered} \tag{13}$$

область визначення якого є гільбертовим простором відносно норми

$$\Bigl(\|u\|^2_{\mathrm{H}^s(\Omega)}+\|\varrho^{-1}Au\|^2_{\mathrm{H}^{s-2q}(\Omega)}+\sum_{k=1}^{\varkappa}\|v_k\|^2_{H^{s+r_k-1/2}(\Gamma)}\Bigr)^{1/2}.$$

Індекс оператора (13) *дорівнює* $\mathrm{dim}N-\mathrm{dim}N^{+}$ *і не залежить від* s *і* ϱ.

4. Доведення ключової теореми

Доведення теореми 1 спирається на результати В. А. Козлова, В. Г. Маз'ї, Й. Россмана [7, теорема 3.4.1] і І. Я. Ройтберг [8, 9] (див. також монографію [10, розд. 2]), які незалежно показали, що оператор, який відповідає еліптичній крайовій задачі (1), (2), є нетеровим на двобічній шкалі соболевських просторів, модифікованих за Я. А. Ройтбергом [11–13]. Нагадаємо означення цих модифікованих просторів, які позначаємо через $H^{s,(2q)}(\Omega)$, де $s\in\mathbb{Z}$.

Попередньо означимо простір $H^{s,(0)}(\Omega)$. Якщо $s\geq 0$, то $H^{s,(0)}(\Omega):=H^{s}(\Omega)$, а якщо $s<0$, то $H^{s,(0)}(\Omega)$ є поповнення множини $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ відносно гільбертової норми

$$\|u\|_{H^{s,(0)}(\Omega)}:=\sup\left\{\frac{|(u,w)_\Omega|}{\|w\|_{H^{-s}(\Omega)}}\,:\,w\in H^{-s}(\Omega),\,w\neq 0\right\}.$$

Якщо $s<0$, то відображення $u\mapsto\mathcal{O}u$, де $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізометричного ізоморфізму

$$\mathcal{O}:H^{s,(0)}(\Omega)\leftrightarrow H^{s}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n).$$

Тепер можемо означити простір $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$. Нехай $E_{2q}:=\{k-1/2:k=1,\ldots,2q\}$. Якщо $s\in\mathbb{R}\setminus E_{2q}$, то простір $H^{s,(2q)}(\Omega)$, за означенням, є поповненням множини $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ відносно гільбертової норми

$$\|u\|_{H^{s,(2q)}(\Omega)} :=$$
$$:= \left(\|u\|^2_{H^{s,(0)}(\Omega)} + \sum_{l=1}^{2q} \|(D_{\nu}^{l-1}u)\restriction\Gamma\|^2_{H^{s-l+1/2,\varphi}(\Gamma)} \right)^{1/2}.$$

Якщо $s \in E_{2q}$, простір $H^{s,\varphi,(2q)}(\Omega)$ означається за допомогою інтерполяції з функціональним параметром гільбертових просторів за формулою

$$H^{s,(2q)}(\Omega) := \left[H^{s-\varepsilon,(2q)}(\Omega), H^{s+\varepsilon,(2q)}(\Omega)\right]_{1/2}, \quad \text{де} \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Покладемо

$$D^{s,(2q)}(\Omega,\Gamma) := H^{s,(2q)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2}(\Gamma),$$
$$E^{s-2q,(0)}(\Omega,\Gamma) := H^{s-2q,(0)}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma).$$

Згаданий результат В. А. Козлова, В. Г. Маз'ї, Й. Россмана і І. Я. Ройтберг полягає у тому, що для довільного $s \in \mathbb{Z}$ відображення (3) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого і нетерового оператора

$$\Lambda : \; D^{s,(2q)}(\Omega,\Gamma) \leftrightarrow E^{s-2q,(0)}(\Omega,\Gamma). \tag{14}$$

Ядро оператора (14) збігається з N, а область значень складається з усіх векторів

$$(f, g_1, \ldots, g_{q+\varkappa}) \in E^{s-2q,(0)}(\Omega,\Gamma),$$

які задовольняють умову (10). Індекс цього оператора дорівнює $\dim N - \dim N^{+}$ і не залежить від s.

Нехай $s<2q$. Розглянемо лінійний простір

$$H^{s,(2q)}_{A,X}(\Omega):=\bigl\{u\in H^{s,(2q)}(\Omega):\,Au\in X^{s-2q}(\Omega)\bigr\},$$

наділений нормою графіка

$$\|u\|_{H^{s,(2q)}_{A,X}(\Omega)}:=\bigl(\,\|u\|^2_{H^{s,(2q)}(\Omega)}+\|Au\|^2_{X^{s-2q}(\Omega)}\bigr)^{1/2}. \tag{15}$$

Відмітимо, що тут образ $Au\in H^{s-2q,(0)}(\Omega)$ коректно означений для кожного $u\in H^{s,(2q)}(\Omega)$ за замиканням [13, лема 2.3.1]. Простір $H^{s,(2q)}_{A,X}(\Omega)$ гільбертів відносно норми (15), а множина $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в ньому [21, п. 4.4.2]. Як показано в [21, п. 4.4.2], норми у просторах $H^{s,(2q)}_{A,X}(\Omega)$ і $\mathrm{H}^{s}_{A,X}(\Omega)$ еквівалентні на $C^\infty(\overline{\Omega})$; тому ці простори збігаються як поповнення множини $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами.

Звуження обмеженого оператора (14) на простір $H^{s,(2q)}_{A,X}(\Omega)$ є обмеженим оператором

$$\begin{aligned}\Lambda:H^{s,(2q)}_{A,X}(\Omega)\oplus\bigoplus_{k=1}^{\varkappa}H^{s+r_k-1/2}(\Gamma)\to\\ \to X^{s-2q}(\Omega)\oplus\bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa}H^{s-m_j-1/2}(\Gamma).\end{aligned} \tag{16}$$

Оскільки $C^\infty(\overline{\Omega})$ щільна в $H^{s,(2q)}_{A}(\Omega)$, цей оператор є розширенням за неперервністю відображення (3). Через $\Lambda_{s,(2q)}$ позначимо оператор (14), а через Λ_s — оператор (16). Очевидно, що $\ker\Lambda_s=\ker\Lambda_{s,(2q)}$ і

$$\operatorname{Ran}\Lambda_s=\bigl\{(f,g_1,\ldots,g_{q+\varkappa})\in\operatorname{Ran}\Lambda_{s,(2q)}:f\in X^{s-2q}(\Omega)\bigr\},$$

де через Ran позначена область значень відповідного оператора. Із зазначених вище властивостей нетерового оператора $\Lambda_{s,(2q)}$ випливає, що $\ker \Lambda_s = N$ і

$$\operatorname{Ran} \Lambda_s = \{(f, g_1, \dots, g_{q+\varkappa}) \in X^{s-2q}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) : \text{ виконується } (10)\}.$$

Отже, оператор Λ_s має скінченновимірне ядро і замкнену область значень. Її ковимірність не перевищує числа $\dim N^+$ і тому є скінченною. Отже, оператор Λ_s нетерів.

Якщо множина $\mathcal{O}(X^\infty(\Omega))$ щільна у просторі $H^{s-2q}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$, то ковимірність області значень дорівнює $\dim N^+$. Справді, тоді неперервне вкладення

$$X^{s-2q}(\Omega) \oplus \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2}(\Gamma) \hookrightarrow E^{s-2q,(0)}(\Omega, \Gamma)$$

є щільним. Тому $\ker \Lambda_s^* \supseteq \ker \Lambda_{s,(2q)}^*$, де $\Lambda_{s,(2q)}^*$ і Λ_s^* є оператори, спряжені до $\Lambda_{s,(2q)}$ і Λ_s відповідно. Звідси

$$\dim \operatorname{coker} \Lambda_s = \dim \ker \Lambda_s^* \geq$$
$$\geq \dim \ker \Lambda_{s,(2q)}^* = \dim \operatorname{coker} \Lambda_{s,(2q)} = \dim N^+.$$

Таким чином, індекс оператора Λ_sдорівнює $\dim N - \dim N^+$, якщо множина $\mathcal{O}(X^\infty(\Omega))$ щільна у просторі $H^{s-2q}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1 доведена.

Література

[1] *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. I. Построение сопряженных задач // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1963. – **11**, No 5. – P. 257–267.

[2] *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. II. Граничная задача для полупространства // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1963. – **11**, No 5. – P. 269–278.

[3] *Лаврук Б.* О параметрических граничных задачах для эллиптических систем линейных дифференциальных уравнений. III. Сопряженная граничная задача для полупространства // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. – 1965. – **13**, No 2. – P. 105–110.

[4] *Aslanyan A. G., Vassiliev D. G., Lidskii V. B.* Frequences of free oscillations of thin shell interacting with fluid // Functional Anal. Appl. – 1981. – **15**, No 3. – P. 157–164.

[5] *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in ellastic multistructures. An asymptotic analysis. – Paris: Mayson, 1990. – viii+218 p.

[6] *Nazarov S., Pileckas K.* On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier–Stokes equations // J. Reine Angew. Math. – 1993. – **438**. – P. 103–141.

[7] *Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Rossmann J.* Elliptic boundary value problems in domains with point singularities. – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – 414 p.

[8] *Ройтберг И. Я.* Эллиптические граничные задачи для общих систем уравнений в полных шкалах банаховых пространств // Доклады Академии Наук. – 1997. – **354**, № 1. – С. 25–29.

[9] *Roitberg I. Ya.* Elliptic boundary value problems for general elliptic systems in complete scales of Banach spaces // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 1998. – **102**. – P. 231–241.

[10] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publisher, 1999. – x+276 p.

[11] *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Доклады АН СССР. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798–801.

[12] *Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений // Укр. матем. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 122–129.

[13] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996. — xii+415 p.

[14] *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, V // Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa. – 1962. – **16**. – P. 1–44.

[15] *Lions J.-L., Magenes E.* Problémes aux limites non homogénes, VI // J. d'Analyse Math. – 1963. – **11**. – P. 165–188.

[16] *Мадженес Э.* Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 2. – С. 169–218.

[17] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 р.

[18] *Ройтберг Я. А.* Теоремы о гомеоморфизмах, осуществляемых эллиптическими операторами // Доклады АН СССР. – 1968. – **180**, № 3. – С. 542–545.

[19] *Костарчук Ю. В., Ройтберг Я. А.* Теореми про ізоморфізми для еліптичних граничних задач з граничними умовами, які не є нормальними // Укр. матем. журн. – 1973. – **25**, № 2. – С. 271–277.

[20] *Murach A. A.* Extension of some Lions–Magenes theorems // Methods Funct. Anal. Topology. – 2009. – **15**, no. 2. – P. 152–167.

[21] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Институт математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно как arXiv:1106.3214.)

[22] *Чепурухіна І. С.* Про деякі класи еліптичних крайових задач у просторах узагальненої гладкості // Диференціальні рівняння і суміжні питання. Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 11, № 2. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. – С. 284–304.

[23] *Chepurukhina I. S., Murach A. A.* Elliptic problems in the sense of B. Lawruk on two-sided refined scale of spaces. – Methods Funct. Anal. Topology. – 2015. – **21**, No 1. – P. 6–21.

[24] *Chepurukhina I. S., Murach A. A.* Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 672–691.

[25] *Чепурухіна І. С.* Еліптичні крайові задачі за Б. Лавруком у розширеній соболєвській шкалі // Диференціальні рівняння і суміжні питання. Зб-к праць Ін-ту математики НАН України. – Т. 12, № 2. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2015. – С. 338–374.

[26] *Чепурухіна І. С.* Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями у крайових умовах / І. С. Чепурухіна // Доповіді НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. – 2015. – № 7. – С. 20 – 29.

[27] *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – Москва: Мир, 1980. – 664 с.

[28] *Ройтберг Я. А.* О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Матем. сборник. – 1971. – **86**, № 2. – С. 248–267.