Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 105–116

УДК 517.972.2

Задачи вариационного исчисления с подвижными концами и производными высших порядков

М.А. Елишевич[1]

[1] *Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина;* `m_a_e@bk.ru`

The necessary conditions for the existence of a weak local extremum in the Lagrange, Mayer, and Bolt problems with moving ends, derivatives of higher orders, and the boundary condition are determined. An example is given.

Визначено необхідні умови існування слабкого локального екстремуму в задачах Лагранжа, Майера, Больцах з рухомими кінцями, похідними вищих порядків і граничною умовою. Наведено приклад.

1 Постановка задачи

В данной работе рассматривается задача определения необходимых условий существования слабого локального экстремума функционалов

$$I_1 = \int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x(t)\right) dt, \tag{1}$$

$$I_2 = G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x(t_1)\right), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} I_3 = &\int_{t_0}^{t_1} F\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x(t)\right) dt + \\ &+ G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x(t_1)\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $x(t)$ — искомая действительная вектор-функция размерности n, для нее выполняется краевое условие

$$h\left(t_0, x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right)\right) = 0, \qquad (4)$$

F, G, h — заданные действительные функции, имеющие непрерывные частные производные по каждому из аргументов при $t \in \Delta$, $\Delta \subset R$ — фиксированный отрезок, t_0 и t_1 не заданы, но $[t_0; t_1] \subset \Delta$, F имеет непрерывные частные производные по t до порядка m включительно, F, G — скалярные функции, h — вектор-функция размерности l.

Задачи Лагранжа, Майера, Больца с подвижными концами рассматривались для случая, когда интегральный член функционала зависит от искомой функции и ее производной, а терминальный член — от искомой функции [1, с. 190–202]. Задача Больца с производными высших порядков, когда условие (4) отсутствует, t_0 и t_1 не заданы, $p_0 = p_1 = m - 1$, рассматривалась в [2, с. 310–314].

2 Полученный результат

Обозначим α — числовой параметр, $\delta x(t)$, δt_0, δt_1 — фиксированные вариации искомой функции и концов отрезка соответственно.

Теорема 2.1. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Лагранжа (1), (4) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона*

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt^j} x(t)} F\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x(t)\right) = 0, \quad t \in [t_0; t_1] \qquad (5)$$

и выполнение условий трансверсальности

$$\left\{\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1-j} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}} x(t)} F\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x(t)\right) \times \right.$$
$$\times \frac{d^j}{dt^j} \delta x(t + \delta t) + \left[F\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x(t)\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1-j} (-1)^k \times \right.$$
$$\left.\left. \times \frac{d^k}{dt^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}} x(t)} F\left(t, x(t), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x(t)\right) \frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} x(t)\right] \delta t \right\}\Bigg|_{t_0}^{t_1} = 0, \qquad (6)$$

$$\sum_{i=0}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t_i}h\left(t_0,x\left(t_0\right),t_1,x\left(t_1\right)\right)\delta t_i+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x\left(t_i\right)}h\left(t_0,x\left(t_0\right),t_1,x\left(t_1\right)\right)\delta x\left(t_i+\delta t_i\right)\right]=0. \tag{7}$$

Доказательство. Построим первую вариацию функционала I_1 (1):

$$\delta I_1=\frac{d}{d\alpha}\int_{t_0+\alpha\delta t_0}^{t_1+\alpha\delta t_1}F\left(t,x\left(t\right)+\alpha\delta x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}\left(x\left(t\right)+\alpha\delta x\left(t\right)\right)\right)\times$$
$$\times dt\Big|_{\alpha=0}=\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=0}^{m}\frac{\partial}{\partial\frac{d^j}{dt^j}x\left(t\right)}F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\frac{d^j}{dt^j}\delta x\left(t\right)dt+$$
$$+F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\delta t\Big|_{t_0}^{t_1}, \tag{8}$$

Каждое из слагаемых подинтегральной функции (8) проинтегрируем по частям столько раз, каков порядок входящей в него производной $\delta x\left(t\right)$:

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial\frac{d^j}{dt^j}x\left(t\right)}F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\frac{d^j}{dt^j}\delta x\left(t\right)dt=\sum_{k=0}^{j-1}\left(-1\right)^k\frac{d^k}{dt^k}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial\frac{d^j}{dt^j}x\left(t\right)}F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\frac{d^{j-k-1}}{dt^{j-k-1}}\delta x\left(t\right)\Big|_{t_0}^{t_1}+$$
$$+\left(-1\right)^j\int_{t_0}^{t_1}\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial}{\partial\frac{d^j}{dt^j}x\left(t\right)}F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\delta x\left(t\right)dt,\quad j=\overline{0,m}. \tag{9}$$

Подставив (8), (9) в равенство $\delta I_1=0$, получим:

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{j=0}^{m}\left(-1\right)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial}{\partial\frac{d^j}{dt^j}x\left(t\right)}F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\delta x\left(t\right)dt=0, \tag{10}$$

$$\left[\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1-j}\left(-1\right)^k\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial}{\partial\frac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}}x\left(t\right)}F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d^j}{dt^j}\delta x\left(t\right)+F\left(t,x\left(t\right),\ldots,\frac{d^m}{dt^m}x\left(t\right)\right)\delta t\right]\Big|_{t_0}^{t_1}=0. \tag{11}$$

Из (10) следует (5) согласно основной лемме вариационного исчисления [1, с. 181]. Подставив в (11)

$$\delta x\left(t_i\right) \cong \delta x\left(t_i+\delta t_i\right)-\frac{d}{dt_i} x\left(t_i\right) \delta t_i, \quad i=0,1, \tag{12}$$

эти равенства выполняются с точностью до бесконечно малых большего порядка, чем порядок малости входящих в них вариаций, получим (6).

Построим первую вариацию функции $h\left(t_0, x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right)\right)$ (4):

$$\begin{gathered}
\delta h\left(t_0, x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right)\right)=\frac{d}{d\alpha} h\left(t_0+\alpha \delta t_0, x\left(t_0+\alpha \delta t_0\right)+\right. \\
\left.\left.+\alpha \delta x\left(t_0+\alpha \delta t_0\right), t_1+\alpha \delta t_1, x\left(t_1+\alpha \delta t_1\right)+\alpha \delta x\left(t_1+\alpha \delta t_1\right)\right)\right|_{\alpha=0}= \\
=\sum_{i=0}^{1}\left\{\frac{\partial}{\partial t_i} h\left(t_0, x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right)\right) \delta t_i+\frac{\partial}{\partial x\left(t_i\right)} h\left(t_0, x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right)\right) \times\right. \\
\left.\times\left[\delta x\left(t_i\right)+\frac{d}{dt_i} x\left(t_i\right) \delta t_i\right]\right\} .
\end{gathered} \tag{13}$$

Подставив (12) в (13), с учетом (4) получим (7). □

Теорема 2.2. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Майера (2), (4) необходимо выполнение условий трансверсальности (7),*

$$\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t_i} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) \delta t_i+\right. \\
+\sum_{j=0}^{p_i} \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x\left(t_i\right)} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots,\right. \\
\left.\left.\frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) \frac{d^j}{dt_i^j} \delta x\left(t_i+\delta t_i\right)\right]=0 .
\end{gathered} \tag{14}$$

Доказательство. Построим первую вариацию функционала I_2 (2):

$$\delta I_2 = \frac{d}{d\alpha} G\left(t_0 + \alpha\delta t_0, x\left(t_0 + \alpha\delta t_0\right) + \alpha\delta x\left(t_0 + \alpha\delta t_0\right), \ldots,\right.$$
$$\frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}}\left[x\left(t_0 + \alpha\delta t_0\right) + \alpha\delta x\left(t_0 + \alpha\delta t_0\right)\right], t_1 + \alpha\delta t_1, x\left(t_1 + \alpha\delta t_1\right) +$$
$$\left. \left. + \alpha\delta x\left(t_1 + \alpha\delta t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}}\left[x\left(t_1 + \alpha\delta t_1\right) + \alpha\delta x\left(t_1 + \alpha\delta t_1\right)\right]\right)\right|_{\alpha=0}$$

$$= \sum_{i=0}^{1}\left\{\frac{\partial}{\partial t_i} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right)\delta t_i + \right.$$
$$+ \sum_{j=0}^{p_i} \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x\left(t_i\right)} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots,\right.$$
$$\left.\left.\frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right)\frac{d^j}{dt_i^j}\left[\delta x\left(t_i\right) + \frac{d}{dt_i} x\left(t_i\right)\delta t_i\right]\right\}. \tag{15}$$

Подставив (15), (12) в равенство $\delta I_2 = 0$, получим (14). Из (4) следует (7) согласно теореме 1. □

Следствие 2.1. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Больца (3), (4) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности (7),*

$$\left\{\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1-j}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}} x\left(t\right)} \times\right.$$
$$\times F\left(t, x\left(t\right), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x\left(t\right)\right)\frac{d^j}{dt^j}\delta x\left(t + \delta t\right) +$$
$$+ \left[F\left(t, x\left(t\right), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x\left(t\right)\right) - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1-j}(-1)^k \frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt^{j+k+1}} x\left(t\right)} \times\right.$$
$$\left.\left.\left. \times F\left(t, x\left(t\right), \ldots, \frac{d^m}{dt^m} x\left(t\right)\right)\frac{d^{j+1}}{dt^{j+1}} x\left(t\right)\right]\delta t\right\}\right|_{t_0}^{t_1}$$

$$+\sum_{i=0}^{1}\left[\frac{\partial}{\partial t_i}G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots,\right.\right.$$

$$\left.\frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}}x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}}x\left(t_1\right)\right)\delta t_i + \sum_{j=0}^{p_i}\frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j}x\left(t_i\right)}G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots,\right.$$

$$\left.\left.\frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}}x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}}x\left(t_1\right)\right)\frac{d^j}{dt_i^j}\delta x\left(t_i+\delta t_i\right)\right] = 0.$$

Рассмотрим частные случаи краевого условия (4).

1. Условие (4) распадается на начальное и конечное:

$$h_i\left(t_i, x\left(t_i\right)\right) = 0, \quad i = 0, 1, \tag{16}$$

где h_i, $i = 0, 1$ — заданные действительные вектор-функции размерности l_i, имеющие непрерывные частные производные по каждому из аргументов при $t_i \in \Delta$. В этом случае вариации δt_0, $\delta x\left(t_0+\delta t_0\right)$ не связаны с вариациями δt_1, $\delta x\left(t_1+\delta t_1\right)$.

Следствие 2.2. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Лагранжа (1), (16) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности*

$$\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1-j}(-1)^k\frac{d^k}{dt_i^k}\frac{\partial}{\partial\frac{d^{j+k+1}}{dt_i^{j+k+1}}x\left(t_i\right)}F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m}x\left(t_i\right)\right)\frac{d^j}{dt_i^j}\times$$

$$\times\,\delta x\left(t_i+\delta t_i\right) + \left[F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m}x\left(t_i\right)\right) - \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-1-j}(-1)^k\frac{d^k}{dt_i^k}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\frac{d^{j+k+1}}{dt_i^{j+k+1}}x\left(t_i\right)}F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m}x\left(t_i\right)\right)\frac{d^{j+1}}{dt_i^{j+1}}x\left(t_i\right)\right]\delta t_i = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_i}h_i\left(t_i, x\left(t_i\right)\right)\delta t_i + \frac{\partial}{\partial x\left(t_i\right)}h_i\left(t_i, x\left(t_i\right)\right)\delta x\left(t_i+\delta t_i\right) = 0, \quad i = 0, 1. \tag{17}$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Май-

ера (2), (16) необходимо выполнение условий трансверсальности (17),

$$\frac{\partial}{\partial t_i} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) \delta t_i +$$

$$\sum_{j=0}^{p_i} \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x\left(t_i\right)} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) \times$$

$$\times \frac{d^j}{dt_i^j} \delta x\left(t_i + \delta t_i\right) = 0, \quad i = 0, 1.$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Больца (3), (16) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности (17),

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1-j} (-1)^k \frac{d^k}{dt_i^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt_i^{j+k+1}} x\left(t_i\right)} F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x\left(t_i\right)\right) \frac{d^j}{dt_i^j} \times$$

$$\times \delta x\left(t_i + \delta t_i\right) + \left[F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x\left(t_i\right)\right) - \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1-j} (-1)^k \frac{d^k}{dt_i^k} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt_i^{j+k+1}} x\left(t_i\right)} F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x\left(t_i\right)\right) \frac{d^{j+1}}{dt_i^{j+1}} x\left(t_i\right)\right] \delta t_i + (-1)^{i+1} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial}{\partial t_i} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) \delta t_i + \right.$$

$$+ \sum_{j=0}^{p_i} \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x\left(t_i\right)} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right)$$

$$\left.\frac{d^j}{dt_i^j} \times \times \delta x\left(t_i + \delta t_i\right)\right] = 0, \quad i = 0, 1.$$

2. Равенства (16) разрешимы относительно $x\left(t_i\right)$:

$$x\left(t_i\right) = g_i\left(t_i\right), \quad i = 0, 1, \tag{18}$$

где g_i, $i = 0, 1$ — заданные действительные вектор-функции размерности n, имеющие непрерывные производные при $t_i \in \Delta$ до порядка q_i включительно, $q_i = \max\left(m, p_i + 1\right)$. В этом случае

$$\delta x\left(t_i + \delta t_i\right) \cong \frac{d}{dt_i} g_i\left(t_i\right) \delta t_i, \quad i = 0, 1,$$

вариации δt_i, $i = 0, 1$ произвольны.

Следствие 2.3. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Лагранжа (1), (18) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности*

$$F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x\left(t_i\right)\right) +$$
$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} \left(-1\right)^k \frac{d^k}{dt_i^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k}}{dt_i^{j+k}} x\left(t_i\right)} F\left(t_i, x\left(t_i\right), \ldots,\right.$$
$$\left.\frac{d^m}{dt_i^m} x\left(t_i\right)\right) \frac{d^j}{dt_i^j} \left(g_i\left(t_i\right) - x\left(t_i\right)\right) = 0, \quad i = 0, 1.$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Майера (2), (18) необходимо выполнение условий трансверсальности

$$\frac{\partial}{\partial t_i} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) +$$
$$\sum_{j=0}^{p_i} \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x\left(t_i\right)} G\left(t_0, x\left(t_0\right), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x\left(t_0\right), t_1, x\left(t_1\right), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x\left(t_1\right)\right) \times$$
$$\times \frac{d^{j+1}}{dt_i^{j+1}} g_i\left(t_i\right) = 0, \quad i = 0, 1.$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Больца (3), (18) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-

Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности

$$F\left(t_i, x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m}x(t_i)\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^k\,\frac{d^k}{dt_i^k}\frac{\partial}{\partial\frac{d^{j+k}}{dt_i^{j+k}}x(t_i)}F\left(t_i, x(t_i), \ldots,\ \frac{d^m}{dt_i^m}x(t_i)\right)\times$$
$$\times\frac{d^j}{dt_i^j}\left(g_i(t_i)-x(t_i)\right)+(-1)^{i+1}\left[\frac{\partial}{\partial t_i}G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}}x(t_0), t_1,\right.\right.$$
$$\left.x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}}x(t_1)\right)+\sum_{j=0}^{p_i}\frac{\partial}{\partial\frac{d^j}{dt_i^j}x(t_i)}G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}}x(t_0),\right.$$
$$\left.\left.t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}}x(t_1)\right)\frac{d^{j+1}}{dt_i^{j+1}}g_i(t_i)\right]=0,\quad i=0,1.$$

3. Равенства (18) имеют вид:

$$x(t_i)=x_i=\text{const},\quad i=0,1, \tag{19}$$

где x_i, $i=0,1$ — заданные действительные постоянные векторы размерности n. В этом случае $\delta x(t_i+\delta t_i)=0$, $i=0,1$, вариации δt_i, $i=0,1$ произвольны.

Следствие 2.4. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Лагранжа (1), (19) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности*

$$F\left(t_i, x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m}x(t_i)\right)-\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{m-j}(-1)^k\,\frac{d^k}{dt_i^k}\frac{\partial}{\partial\frac{d^{j+k}}{dt_i^{j+k}}x(t_i)}F\left(t_i,\right.$$
$$\left.x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m}x(t_i)\right)\frac{d^j}{dt_i^j}x(t_i)=0,\quad i=0,1. \tag{20}$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Майера (2), (19) необходимо выполнение условий трансверсальности

$$\frac{\partial}{\partial t_i}G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}}x(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}}x(t_1)\right)=0,\quad i=0,1. \tag{21}$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Больца (3), (19) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности

$$F\left(t_i, x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x(t_i)\right) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{m-j} (-1)^k \frac{d^k}{dt_i^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k}}{dt_i^{j+k}} x(t_i)} F\left(t_i,\right.$$
$$\left. x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x(t_i)\right) \frac{d^j}{dt_i^j} x(t_i) + (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial t_i} G\left(t_0, x(t_0), \ldots,\right.$$
$$\left. \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x(t_1)\right) = 0, \quad i = 0, 1. \tag{22}$$

4. t_i, $i = 0, 1$ заданы, условие (4) отсутствует. В этом случае $\delta t_i = 0$, $i = 0, 1$, вариации $\delta x(t_i)$, $i = 0, 1$ произвольны.

Следствие 2.5. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Лагранжа (1) на фиксированном отрезке $[t_0; t_1]$ необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности*

$$\sum_{k=0}^{m-j} (-1)^k \frac{d^k}{dt_i^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k}}{dt_i^{j+k}} x(t_i)} F\left(t_i, x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x(t_i)\right) = 0, \quad j = \overline{1, m},$$
$$i = 0, 1. \tag{23}$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Майера (2) на фиксированном отрезке $[t_0; t_1]$ необходимо выполнение условий трансверсальности

$$\frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x(t_i)} G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x(t_1)\right) = 0,$$
$$j = \overline{0, p_i}, \quad i = 0, 1. \tag{24}$$

Для существования слабого локального экстремума в задаче Больца (3) на фиксированном отрезке $[t_0; t_1]$ необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий транс-

версальности

$$\sum_{k=0}^{m-j-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt_i^k} \frac{\partial}{\partial \frac{d^{j+k+1}}{dt_i^{j+k+1}} x(t_i)} F\left(t_i, x(t_i), \ldots, \frac{d^m}{dt_i^m} x(t_i)\right) + (-1)^{i+1} \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \frac{d^j}{dt_i^j} x(t_i)} G\left(t_0, x(t_0), \ldots, \frac{d^{p_0}}{dt_0^{p_0}} x(t_0), t_1, x(t_1), \ldots, \frac{d^{p_1}}{dt_1^{p_1}} x(t_1)\right) = 0,$$
$$j = \overline{0, q_i - 1}, \quad i = 0, 1. \tag{25}$$

5. Условие (4) отсутствует. В этом случае вариации δt_i, $\delta x(t_i + \delta t_i)$, $i = 0, 1$ произвольны.

Следствие 2.6. *Для существования слабого локального экстремума в задаче Лагранжа (1) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности (20), (23).*

Для существования слабого локального экстремума в задаче Майера (2) необходимо выполнение условий трансверсальности (21), (24).

Для существования слабого локального экстремума в задаче Больца (3) необходимы разрешимость системы уравнений Эйлера-Пуассона (5) и выполнение условий трансверсальности (22), (25).

3 Пример

Рассмотрим задачу Больца (3) со скалярной искомой функцией $x(t)$:

$$I_3 = \int_0^1 \left[\left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right)^2 + 48 x(t)\right] dt +$$
$$+ x^2(0) + x^2(1) + \left(\frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=0}\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=1}\right)^2.$$

Здесь $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $n = 1$, $l = 0$, $m = 2$, $p_0 = 1$, $p_1 = 1$, $q_0 = 2$, $q_1 = 2$,

$$F = \left(\frac{d^2}{dt^2} x(t)\right)^2 + 48 x(t),$$
$$G = x^2(0) + x^2(1) + \left(\frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=0}\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} x(t)\Big|_{t=1}\right)^2.$$

Составим уравнение Эйлера-Пуассона (5):

$$2\frac{d^4}{dt^4}x\left(t\right)+48=0.$$

Оно имеет общее решение

$$x\left(t\right)=c_0+c_1t+c_2t^2+c_3t^3-t^4,$$

где c_i, $i=\overline{0,3}$ — произвольные скалярные постоянные.

Условия трансверсальности (25) имеют вид:

$$\left(-2\frac{d^3}{dt^3}x\left(t\right)-2x\left(t\right)\right)\Big|_{t=0}=0,\quad \left(-2\frac{d^3}{dt^3}x\left(t\right)+2x\left(t\right)\right)\Big|_{t=1}=0,$$
$$\left(2\frac{d^2}{dt^2}x\left(t\right)-2\frac{d}{dt}x\left(t\right)\right)\Big|_{t=0}=0,\quad \left(2\frac{d^2}{dt^2}x\left(t\right)+2\frac{d}{dt}x\left(t\right)\right)\Big|_{t=1}=0.$$

Отсюда

$$-12c_3-2c_0=0,\quad -12c_3+48+2c_0+2c_1+2c_2+2c_3-2=0,$$
$$4c_2-2c_1=0,\quad 4c_2+12c_3-24+2c_1+4c_2+6c_3-8=0,$$
$$c_0=-12,\quad c_1=-\frac{2}{3},\quad c_2=-\frac{1}{3},\quad c_3=2.$$

Рассматриваемый функционал может достигать слабого локального экстремума на функции

$$x\left(t\right)=-12-\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}t^2+2t^3-t^4.$$

[1] *Галеев Э.М.* Оптимизация: Теория, примеры, задачи: Учебное пособие / Э. М. Галеев. — М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010. — 336 с.

[2] *Алексеев В.М.* Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1979. — 432 с.