Збірник праць Інституту математики НАН України 2016, т. 13, № 3, 158–173

УДК 511.72

Найпростіші функції, пов'язані з оператором лівостороннього зсуву елементів ланцюгового зображення чисел

М.В. Працьовитий [1,2]***, А.С. Чуйков*** [3]

[1] *Інститут математики НАН України, Київ;*
[2] *Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ*
[3] *Інститут математики НАН України, Київ;*
chyikov.artem@gmail.com

Properties of functions of type

$$\tau_f(x) = [f(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \ldots],$$

where $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ is regular continued fraction expansion of $x \in (0; 1]$ and $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ is a natural function of natural arguments $a_1, a_2, \ldots, a_k$ are studied. Their relation with left-shift $T(x)$ and right-shift $\delta_i(x)$ continued fractions elements operators are examined. It is shown that this function are correctly defined, piecewise continuous and piecewise monotonic. Differential and integral properties of these function are also studied. Continuous transformation of a segment $[0; 1]$ is constructed.

Изучаются свойства функций вида

$$\tau_f(x) = [f(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \ldots],$$

где $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ — разложение аргумента $x \in (0; 1]$ в элементарную цепную дробь, а $f(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ — натуральная функция натуральных аргументов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Рассматривается их связь с операторами левостороннего $T(x)$ и правостороннего $\delta_i(x)$ сдвигов элементов цепной дроби. Показано, что эти функции корректно определены, кусочно-непрерывны и кусочно-монотонны. Изучаются также дифференциальные и интегральные свойства этих функций. Строится непрерывное преобразование отрезка $[0; 1]$.

1 Вступ

Нагадаємо, що *елементарним ланцюговим дробом* називають вираз вигляду

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} \equiv [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \tag{1}$$

де $a_0 \in Z, a_n \in N, n = 1, 2, \dots$, при цьому число a_n називається n-м його елементом. Ланцюговий дріб зі скінченною кількістю елементів називається скінченним. Будь-яке ірраціональне число можна представити нескінченним ланцюговим дробом єдиним чином. Причому, число можна подати у вигляді нескінченного періодичного ланцюгового дробу тоді і лише тоді, коли воно є ірраціональним розв'язком квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами. Кожне раціональне число має два ланцюгові зображення, кожне з яких є скінченним.

Представлення чисел ланцюговими дробами має широке застосування у різних галузях математики, зокрема у теорії діофантових наближень та теорії чисел. Воно використовується також у моделюванні математичних об'єктів з нетривіальними локальними властивостями, зокрема, фрактальними (множин, функцій, мір, розподілів випадкових величин, динамічних систем тощо).

Функції з всюди щільною множиною особливостей (максимумів, мінімумів, недиференційовності, сингулярності тощо) не виражаються формулами зі скінченною множиною «елементарних» операцій. Геометрично-описовий спосіб їх задання має суттєві змістовні недоліки, і його можна вважати сьогодні архаїчним. Вони задаються також методом згущення особливостей, системами функціональних рівнянь, перетворювачами символів одного зображення числа в інше тощо. Їх дослідженню значно сприяють знання геометрії самого зображення (геометричного змісту цифр, властивостей циліндричних та хвостових множин, метричних співвідношень тощо). Вона може бути відносно простою, а саме: «самоподібною», «N-самоподібною», автомодельною або не володіти жодною з цих властивостей.

Зображення чисел елементарними ланцюговими дробами має несамоподібну геометрію та породжує складні метричні відношення. Це ускладнює вивчення функцій, які визначені у термінах ланцюгових дробів і мають непросту локальну структуру (континуальну множину особливостей).

Метричні, ймовірнісні, фрактальні та інші властивості математичних об'єктів, заданих за допомогою представлення чисел ланцюговими дробами, вивчались багатьма вітчизняними та закордонними вченими, зокрема, М.В. Працьовитим [11], [9], О.Л. Лещинським [8], C. Faivre [2], S. Kalpazidou [4]. Широко відомими і загальновизнаними є монографії О.Я. Хінчина [12], В.І. Арнольда [7], C.D. Olds [5].

Елементи ланцюгового дробу (1) визначаються з рівності:

$$a_n = a_n(x) = \left[\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right], \quad T^{n-1}(x) \neq 0,$$

де $T : [0;1) \to [0;1)$ — *перетворення Гаусса*, задане формулою:

$$T(x) := \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], \quad 0 < x < 1, \quad T(0) := 0, \quad a_1(x) = [1/x]. \tag{2}$$

Це перетворення «стирає» перший елемент ланцюгового дробу:

$$T([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) = [0; a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots],$$

і ми називаємо його *оператором лівостороннього зсуву* елементів ланцюгового дробу. Оператор T грає важливу роль у теорії динамічних систем і фігурує у працях багатьох дослідників, таких як: F. Schweiger [6], Арнольд [7] та ін. Зокрема, доведено, що оператор T володіє ергодичною інваріантною мірою, яка є абсолютно неперервною відносно міри Лебега:

$$\mu = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

Застосування до цієї міри ергодичної теореми Біркгофа-Хінчина дає існування *сталої Хінчина*, яка означає наступне: середнє геометричне перших n елементів елементарного ланцюгового дробу майже скрізь прямує при $n \to \infty$ до абсолютної сталої [12]:

$$\sqrt[n]{a_1 a_1 \cdots a_n} \to \prod_{r=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{r(r+2)}\right)^{\log_2 r} \approx 2,6.$$

Крім того, зі сталою Хінчина тісно пов'язана *теорема Кузьміна*, яка стверджує, що ймовірність появи числа k на місці a_n дається наступною формулою [7]:

$$p_k = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(1 + \frac{1}{k(k+2)}\right).$$

На основі оператора T можливою є побудова нових видів ланцюгових дробів. Так, відображення $T_E : [0;1) \to [0;1)$, задане формулою

$$T_E(x) = \frac{1}{a_1(x)} T(x), \;\; x \neq 0, T_E(0) := 0, \tag{3}$$

породжує ланцюгові дроби вигляду

$$\cfrac{1}{b_1 + \cfrac{b_1}{b_2 + \cfrac{b_2}{b_3 + \ddots}}} = [[0; b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots]], \quad b_n \in N, \; b_n \leq b_{n+1}, \tag{4}$$

які називаються *ланцюговими дробами Енгеля.* Вони є узагальненнями рядів Енгеля. В силу останньої нерівності періодичні ланцюгові дроби такого виду мають у своєму періоді лише одне число. Причому існує нескінченно багато квадратичних ірраціональностей, які розкладаються у неперіодичні ланцюгові дроби.

Розклад (4) отримується за формулами:

$$b_1 = b_1(x) := [1/x], \quad b_n = b_n(x) := b_1\left(T_E^{n-1}(x)\right), \tag{5}$$

де $n \geq 2$, $\quad T_E^{n-1}(x) \neq 0$. Наприклад, розкладемо у ланцюговий дріб Енгеля число $x = -\frac{3}{14} + \frac{3}{7}\sqrt{2}$. Використовуючи формули (3) та (5), послідовно отримуємо:

$$b_1(x) = \left[\frac{1}{x}\right] = \left[\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2}\right] = 2,$$

$$T_E^1(x) = \frac{1}{b_1} T(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} - 2\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

$$b_2(x) = b_1\left(T_E^1(x)\right) = 3, \; T_E^2(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} - 3\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2},$$

$$b_3(x) = b_1\left(T_E^2(x)\right) = 4, \; T_E^3(x) = \frac{1}{4}\left(2 + 2\sqrt{2} - 4\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = T_E^2(x),$$

і далі процес зациклюється. Отже, $-\frac{3}{14} + \frac{3}{7}\sqrt{2} = [[0; 2, 3, \overline{4}]]$. Причому, розклад у елементарний ланцюговий дріб має вигляд: $[0; 2, \overline{1, 1, 4, 3}]$.

Відомий аналогічний розклад Ейлера числа e: $e = [2; 1, 2, 3, 4, \ldots]$.

Далі вивчаються оператори, які «зберігають хвости» зображення чисел елементарними ланцюговими дробами.

2 Оператори лівостороннього та правостороннього зсуву елементів ланцюгового дробу

Надалі будемо розглядати лише числа з півінтервалу $(0; 1]$, при цьому їх розклад у елементарний ланцюговий дріб позначатимемо

$$x = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \quad \text{або} \quad x = [a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$$

для раціональних та ірраціональних чисел відповідно.

Важливим в геометрії зображення чисел ланцюговими дробами є поняття циліндра. Нагадаємо, що *циліндром рангу m з основою* $c_1 c_2 \cdots c_m$ називається множина

$$\Delta^{c.f.}_{c_1 c_2 \cdots c_m} = \{x | x = [a_1, a_2, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots], a_i(x) = c_i, i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Циліндром є півінтервал

$$([a_1, a_2, \ldots, a_m + 1], [a_1, a_2, \ldots, a_m]]\,, \text{якщо m − непарне},$$

$$([a_1, a_2, \ldots, a_m], [a_1, a_2, \ldots, a_m + 1]]\,, \text{якщо m − парне}.$$

Лема 2.1. *Оператор зсуву $T(x)$ є кусково-неперервною функцією, яка на циліндрах першого рангу аналітично задається формулою:*

$$T(x) = \frac{1}{x} - a_1(x). \tag{6}$$

В кожній точці виду $\frac{1}{i+1}, i \in N$ функція має розрив першого роду зі стрибком 1.

Доведення. Дійсно, оскільки $x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots}} = \dfrac{1}{a_1(x) + T(x)}$,

то $T(x) = \dfrac{1}{x} - a_1(x)$. Стрибок функції у точках виду $x = [i+1], i \in N$ дорівнює:

$$\Delta T([i+1]) = \left| \lim_{x \to \frac{1}{i+1} - 0} T(x) - \lim_{x \to \frac{1}{i+1} + 0} T(x) \right| =$$

$$= \left| \lim_{x \to \frac{1}{i+1} - 0} a_1(x) - \lim_{x \to \frac{1}{i+1} + 0} a_1(x) \right| = (i+1) - i = 1.$$

□

Застосування оператора зсуву T n разів породжує оператор T^n:

$$T^n([a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]) = [a_{n+1}, a_{n+2}, \dots] = \frac{q_n x - p_n}{p_{n-1} - q_{n-1} x},$$

де $\frac{p_n}{q_n} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ – піхідний дріб порядку n. Зокрема,

$$T^2(x) = -\frac{(a_1(x) a_2(x) + 1)x - a_2(x)}{x a_1(x) - 1}. \tag{7}$$

Нехай i – натуральний параметр. Означимо клас функцій, визначених у раціональних та ірраціональних точках півнінтервалу $(0;1]$ рівностями:

$$\delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \delta_i(x) = [i, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots], \quad i = 1, 2, \dots.$$

відповідно, причому, за неперервністю покладемо $\delta_i(0) := \frac{1}{i}$. Очевидними є рівності: $T(\delta_i(x)) = x$ і $\delta_{a_1(x)}(T(x)) = x$.

Лема 2.2. *Функція $\delta_i(x)$ має аналітичний вираз:*

$$\delta_i(x) = \frac{1}{i+x}$$

і є стискуючим відображенням з коефіцієнтом $\frac{1}{i^2}$ та нерухомою точкою $x = [\bar{i}]$.

Доведення. Оскільки

$$|\delta_i(x_1) - \delta_i(x_2)| = \left| \frac{1}{i+x_1} - \frac{1}{i+x_2} \right| =$$

$$= \left| \frac{x_2 - x_1}{(i+x_1)(i+x_2)} \right| = \frac{1}{(i+x_1)(i+x_2)} |x_1 - x_2|,$$

та $(i+x_1)(i+x_2) \geq i^2$, то

$$|\delta_i(x_1) - \delta_i(x_2)| \leq \frac{1}{i^2}|x_1 - x_2| \text{ і } \delta_i([\bar{i}]) = [\bar{i}].$$

□

Наслідок 2.1. *Функція $\delta_i(x)$ є неперервною та строго спадною, причому множиною її значень є проміжок:*

$$\left[\frac{1}{i+1}; \frac{1}{i}\right).$$

Лема 2.3. *Якщо i — фіксоване натуральне число, то рівняння*

$$\delta_i(x) = T(x) \tag{8}$$

має зліченну множину розв'язків:

$$x_n^{(i)} = [n, i, n, i, \ldots] = [\overline{n, i}],\ n \in N,$$

кожен з яких є ірраціональним числом.

Доведення. На множині ірраціональних чисел рівняння (8) можна записати у вигляді

$$[i, a_1(x), a_2(x), \ldots] = [a_2(x), a_3(x), \ldots]. \tag{9}$$

З єдиності зображення ірраціонального числа елементарним ланцюговим дробом, маємо одночасне виконання рівностей:

$$i = a_2, \quad a_1 = a_3, \quad a_2 = a_4 = i, \quad a_3 = a_5 = a_1, \quad \ldots,$$

система яких рівносильна (9). Звідки бачимо, що при довільному натуральному $a_1 = n$ число $x = [\overline{n, i}]$ є розв'язком рівняння (8).

Скінченний ланцюговий дріб не може бути розв'язком рівняння (8), оскільки неможливою є рівність

$$[i, a_1, a_2, \ldots, a_n] = [a_2, \ldots, a_n],$$

права частина якої містить на два елементи менше, ніж ліва. □

Лема 2.4. *Функція*

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & \text{якщо } \ 0 < x \leq x_1^{(1)}; \\ T(x), & \text{якщо } \ x_1^{(1)} \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{10}$$

є неперервною та строго спадною на $[0; 1]$, причому $f(0) = 1$ та $f(1) = 0$.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що функція $\delta_1(x)$ є неперервною та строго спадною на відрізку $[0;1]$, а $T(x)$ є неперервною і строго спадною на циліндрах першого рангу, причому $\delta_1(0) = 1$, $T(1) = 0$ і $x_1^{(1)} \in \Delta_1^{c.f.}$. □

Означення Кажуть, що функція $\varphi(x)$, яка визначена на відрізку $[0;1]$ і набуває значень з $[0;1]$, *зберігає хвости ланцюгового зображення чисел*, якщо для будь-якого $x \in (0;1]$ існують такі цілі невід'ємні числа $k = k(x)$ та $m = m(x)$, що мають місце рівності $a_{k+j}(x) = a_{m+j}(\varphi(x))$ для кожного $j \in N$.

Найпростішими функціями, що зберігають хвости ланцюгового зображення є функції $f(x) = x$, $T(x)$ і $\delta_i(x)$. Для них числа k і m є абсолютними константами, причому для першої з них $k = 0 = m$, для другої $k = 1, m = 0$, для третьої $k = 0, m = 1$.

Нагадаємо, що *перетворенням* непорожньої множини X називається бієктивне відображення цієї множини на себе. Кожне перетворення відрізка $[0;1]$ є функцією, але не кожна функція є перетворенням. Неперервні перетворення відрізка $[0;1]$ вичерпуються строго монотонними функціями з множиною значень $[0;1]$.

Функції $T(x)$ та $\delta_i(x)$ не є перетвореннями відрізка $[0;1]$, але функція, визначена рівністю (10) є неперервним перетворенням $[0;1]$.

Теорема 2.1. *Якщо s – фіксоване натуральне число, $(n_1, n_2, \dots, n_s)$, $(m_1, m_2, \dots, m_s)$ – задані набори натуральних чисел, що задовольняють умови*

$$1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_s, \quad m_1 > m_2 > \ldots > m_s > 1,$$

то функція

$$f(x) = \begin{cases} \delta_1(x), & 0 \le x \le x_{m_1}^{(1)}; \\ T(x), & x_{m_1}^{(1)} < x \le x_{m_1}^{(n_1)}; \\ \delta_{n_1}(x), & x_{m_1}^{(n_1)} < x \le x_{m_2}^{(n_1)}; \\ T(x), & x_{m_2}^{(n_1)} < x \le x_{m_2}^{(n_2)}; \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n_s}(x), & x_{m_s}^{(n_s)} < x \le x_1^{(n_s)}; \\ T(x), & x_1^{(n_s)} < x \le 1. \end{cases} \tag{11}$$

є неперервним строго спадним перетворенням $[0;1]$, *що зберігає хвости зображення чисел елементарними ланцюговими дробами і фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича борелівських множин.*

Доведення. Дане твердження випливає з того, що функція $\delta_i(x)$ є неперервною та строго спадною на відрізку $[0;1]$, а функція $T(x)$ є неперервною та строго спадною на циліндрах першого рангу. Причому, розв'язком рівняння $\delta_i(x) = T(x)$ на циліндрі рангу m є число $x_m^{(i)}$. Функції $T(x)$ і $\delta_i(x)$ зберігають фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича борелівських множин, тобто кожна борелівська підмножина $[0;1]$ і її образ мають однакову розмірність, що випливає з аналітичних виразів цих функцій і результатів роботи [10]. Тому такою є і функція $f(x)$, яка є «скінченною комбінацією» функцій $T(x)$ і $\delta_i(x)$. □

Наслідок 2.2. *Функція $F(x) = 1 - f(x)$ є абсолютно неперервною функцією розподілу ймовірностей на відрізку $[0;1]$.*

3 Інші функції, пов'язані з оператором $T(x)$

Нехай k — деяке фіксоване натуральне число, $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ — натуральна функція натуральних змінних $a_1, a_2, \dots, a_k$. Простими прикладами таких функцій при $k = 2$ є:

$$f_1(n,m) = n + m, \quad f_2(n,m) = n \cdot m, \quad f_3^i(n,m) = |n - m| + i, \ i \in N.$$

Означимо клас функцій рівністю:

$$\tau_f(x) = \tau_f\left([a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots]\right) =$$

$$= [f(a_1(x), a_2(x), \dots, a_k(x)), a_{k+1}(x), a_{k+2}(x), \dots].$$

Лема 3.1. *Функція $\tau_f(x)$ задається формулою:*

$$\tau_f(x) = \frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k) + T^k(x)} \tag{12}$$

і є неперервною та монотонно зростаючою (спадною) на кожному із циліндрів k -го рангу при непарному (парному) значенні k, множиною значень якої є півінтервал

$$\left(\frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k) + 1}, \frac{1}{f(a_1, a_2, \dots, a_k)}\right].$$

Доведення. Рівність (12) є очевидною. Враховуючи, що функція $f(a_1(x), a_2(x), \ldots, a_k(x))$ на кожному із циліндрів k-го рангу є сталою, а функція $T^k(x)$ є зростаючою (спадною) при парному (непарному) k, отримуємо, що функція $\tau_f(x)$ є зростаючою (спадною) при непарному (парному) k. Неперервність функції $\tau_f(x)$ випливає з неперервності оператора зсуву $T^k(x)$. Множина значень випливає з рівностей:

$$T^k\left([a_1, a_2, \ldots, a_k]\right) = 0, \quad T^k\left([a_1, a_2, \ldots, a_k + 1]\right) = 1.$$

□

Лема 3.2. *Якщо f та g — натуральні функції натуральних аргументів $a_1(x)$, $a_2(x)$, …, $a_k(x)$, то зв'язок між функціями $\tau_f(x)$ та $\tau_g(x)$ встановлюється рівністю:*

$$\tau_f(x) = \frac{\tau_g(x)}{(f-g)\tau_g(x) + 1}.$$

Доведення. Оскільки $\tau_g(x) = \dfrac{1}{g + T^k(x)}$, то $T^k(x) = \dfrac{1}{\tau_g(x)} - g$. Тоді

$$\tau_f(x) = \frac{1}{f + \dfrac{1}{\tau_g(x)} - g} = \frac{\tau_g(x)}{(f-g)\tau_g(x) + 1}.$$

□

Лема 3.3. *Аналітично функції $\tau_{f_1}(x), \tau_{f_2}(x), \tau_{f_3^i}(x)$ задаються формулами:*

$$\tau_{f_1}(x) = \frac{1 - x \cdot a_1(x)}{a_1(x) + x(1 - a_1^2(x))},$$

$$\tau_{f_2}(x) = \frac{a_1 x - 1}{(a_1^2 a_2 - a_1 a_2 - 1)x - a_1 a_2 + a_2},$$

$$\tau_{f_3^i}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{i + T^2(x)}, & \textit{якщо } a_1 = a_2; \\ \dfrac{T(x)}{(a_1 - 2a_2 + i)T(x) + 1}, & \textit{якщо } a_1 > a_2; \\ \dfrac{T(x)}{(i - a_1)T(x) + 1}, & \textit{якщо } a_1 < a_2. \end{cases}$$

Доведення. Дійсно, маючи аналітичний вираз оператора $T(x)$, отримуємо

$$\tau_{f_1}(x) = \cfrac{1}{a_1(x) + a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + \ddots}} = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{T(x)}} =$$

$$= \frac{1 - x \cdot a_1(x)}{a_1(x) + x(1 - a_1^2(x))}.$$

Аналогічно, за допомогою рівності (7), отримується вираз функції $\tau_{f_2}(x)$. Вираз для функції $\tau_{f_3^i}(x)$ отримується в результаті розкриття модуля. □

Теорема 3.1. *Функція $\tau_{f_1}(x)$:*

1. *коректно визначена;*
2. *неперервна на кожному із циліндрів першого рангу;*
3. *спадна на кожному із циліндрів першого рангу;*
4. *опукла вгору на циліндрах першого рангу при $a_1 \neq 1$.*

Доведення. 1. Маємо два представлення числа $x \in Q \cap [0; 1]$ у вигляді ланцюгового дробу:

$$x_1 = [a_1, a_2, ...a_{n-1}, 1] \equiv [a_1, a_2, ...a_{n-1} + 1] = x_2.$$

Значення функції в цих точках

$$\tau_{f_1}(x_1) = [a_1 + a_2, ..., a_{n-2}, 1],$$

$$\tau_{f_1}(x_2) = [a_1 + a_2, ..., a_{n-2} + 1]$$

є представленнями одного й того ж числа, що й т. д.

2. Якщо $x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ то $a_1 = n$ і $\tau_{f_1}(x) = \dfrac{1 - xn}{n + x(1 - n^2)}$. Знаменник функції $\sigma\tau_{f_1}(x)$ обертається в нуль при $x = \frac{n}{n^2-1}$, але оскільки $x \in \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ і $\frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$, то $x \neq \frac{n}{n^2-1}$.

3. Знайдемо $\tau'_{f_1}(x)$:

$$\tau'_{f_1}(x) = \frac{(1-xn)'(n+x(1-n^2)) - (1-xn)(n+x(1-n^2))'}{(n+x(1-n^2))^2} =$$

$$\frac{-n^2 - nx(1-n^2) - (1-n^2-xn+xn^3)}{(n+x(1-n^2))^2} = \frac{-1}{(n+x(1-n^2))^2} < 0,$$

отже, функція $\tau_{f_1}(x)$ – спадна.

Оскільки функція $\tau_{f_1}(x)$ є неперервною і спадною на кожному з півінтервалів $\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$, то

$$\min_{x\in\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right]} \tau_{f_1}(x) = \tau_{f_1}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1-\frac{1}{n}n}{n+\frac{1}{n}(1-n^2)} = 0;$$

$$\sup_{x\in\left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right]} \tau_{f_1}(x) = \tau_{f_1}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1-\frac{n}{n+1}}{n+\frac{1}{n+1}(1-n^2)} = \frac{1}{n+1}.$$

4. Знайдемо другу похідну функції $\tau_{f_1}(x)$:

$$\tau''_{f_1}(x) = \left(\frac{-1}{(n+x(1-n^2))^2}\right)' = \frac{2(n+x(1-n^2))'}{(n+x(1-n^2))^3} =$$

$$= \frac{2(1-n^2)}{(n+x(1-n^2))^3}.$$

Тут чисельник від'ємний, а знаменник - спадна функція. Її мінімум на півінтервалі $\left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$ рівний $\frac{1}{n}$ при $x = \frac{1}{n}$, тому знаменник приймає лише додатні значення. Отже, функція опукла вгору на кожному з вказаних інтервалів.

□

Лема 3.4. *Визначений інтеграл від функції $\tau_{f_1}(x)$ має вигляд:*

$$\int_0^1 \tau_{f_1}(x)dx = \frac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1-\ln n}{(n^2-1)^2}.$$

Доведення. Проінтегруємо функцію $\tau_{f_1}(x)$ на півінтервалі $(0;1]$. За адитивною властивістю визначеного інтегралу:

$$\int\limits_0^1 \tau_{f_1}(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{1-xn}{n+x(1-n^2)}dx.$$

Підінтегральний вираз при $n \neq 1$ можна записати наступним чином:

$$\frac{1-xn}{n+x(1-n^2)} = \frac{n}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2} \cdot \frac{1}{n+x(1-n^2)}.$$

Тоді, при $n = 1$ маємо:

$$\int\limits_{1/2}^1 \tau_{f_1}(x)dx = \int\limits_{1/2}^1 (1-x)dx = \frac{1}{8},$$

а при $n = 2, 3, \ldots$ отримуємо:

$$\int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} \left(\frac{n}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2} \cdot \frac{1}{n+x(1-n^2)}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{ndx}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2} \int\limits_{1/(n+1)}^{1/n} \frac{dx}{n+x(1-n^2)} = \frac{1}{(n^2-1)(n+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(1-n^2)^2} \left(\ln\left(n+(1-n^2)\frac{1}{n}\right) - \ln\left(n+(1-n^2)\frac{1}{n+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{(n^2-1)(n+1)} + \frac{-\ln n}{(1-n^2)^2} = \frac{n-1-\ln n}{(n^2-1)^2}.$$

Суму цього ряду знайдено наближено:

$$\frac{1}{8} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1-\ln n}{(n^2-1)^2} \approx 0,1952. \qquad \square$$

Лема 3.5. *Функція $\tau_{f_1}(x)$, з областю визначення $D(f) = \left(\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$, $n \in N$ і множиною значень $E(f) = \left(0; \frac{1}{n+1}\right]$, $n \in N$ є оберненою до самої себе.*

Доведення. Дійсно, розв'язавши рівняння $\tau_{f_1}(x) = \dfrac{1 - x \cdot a_1(x)}{a_1(x) + x(1 - a_1^2(x))}$ відносно x і зробивши заміну $x := \tau_{f_1}^{-1}(x)$ отримаємо, що $\tau_{f_1}(x) = \tau_{f_1}^{-1}(x)$. □

Лема 3.6. *Зв'язок між функціями $\tau_{f_1}(x)$ і $T(x)$ визначається формулою:*

$$\tau_{f_1}(x) = \frac{T(x)}{a_1(x)T(x) + 1}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\tau_{f_1}(x) = \cfrac{1}{a_1(x) + a_2(x) + \cfrac{1}{a_3(x) + \ddots}} = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{T(x)}} = \frac{T(x)}{a_1(x)T(x) + 1}.$$

□

Певним узагальненням оператора τ_{f_1} є оператор $\tau_{f_1}^n$:

$$\tau_{f_1}^n(x) = \cfrac{1}{a_1(x) + \ldots + a_n(x) + \cfrac{1}{a_{n+1}(x) + \ddots}} = [a_1(x)+\ldots+a_n(x), r_n(x)].$$

Оскільки $T^n(x) = [a_{n+1}(x), a_{n+2}(x), \ldots]$, то зв'язок між $\tau_{f_1}^n(x)$ та $T^n(x)$ виражається формулою:

$$\tau_{f_1}^n(x) = \cfrac{1}{a_1(x) + \ldots + a_{n-1}(x) + \cfrac{1}{T^{n-1}(x)}} = \frac{T^{n-1}(x)}{T^{n-1}(x) \cdot \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i(x) + 1}.$$

Лема 3.7. *Рівняння*

$$\tau_{f_1}(x) = \delta_i(x) \tag{13}$$

має зліченну кількість розв'язків, загальний вигляд яких:

$$x = [\overline{k, i-k}],\ \ k = 1, 2, \ldots, i-1.$$

Доведення. На множині ірраціональних чисел рівняння (13) перепишеться так:

$$[a_1(x)+a_2(x), a_3(x), a_4(x), \ldots] = [i, a_1(x), a_2(x), \ldots]. \tag{14}$$

Тоді, з єдиності зображення ірраціонального числа ланцюговим дробом, маємо систему рівностей:

$$\begin{cases} i = i, \\ a_1 = a_1, \\ a_1 + a_2 = i \Rightarrow a_2 = i - a_1, \\ a_3 = a_1, \\ a_4 = a_2 = i - a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

яка еквівалентна рівнянню (14). Як і у випадку з рівнянням (8), скінченний ланцюговий дріб не може бути розв'язком рівняння (13). $\square$

Лема 3.8. *Функція $\tau_{f_3^i}(x)$ є монотонно спадною на циліндрах першого рангу при $a_2 > a_1$.*

Доведення. Дійсно, при $a_2 > a_1 = const$ функція $\tau_{f_3^i}(x)$ є неперервною на циліндрах $\Delta^{c.f.}_{a_1}$ і $\tau'_{f_3^i}(x) = \dfrac{T'(x)}{((i-a_1)T(x)+1)^2} < 0.$ $\square$

[1] *Bunder, M. W., Tognetti, K. P. Bates, B. Philip.* (2005). Continued Fractions and The Gauss Map. Academia Paedagogica Nyiregyhaziensis. Acta Mathematica, 21 (2), 113-125.

[2] *Faivre C.* On the central limit theorem for random variables related to the continued fraction expansion // Colloquium mathematicum. - 1996, Vol. 71, № 1, pp. 153-159.

[3] *Hartono Y., Kraaikamp C., Schweiger F.* Algebraic and ergodic properties of a new continued fraction algorithm with non-decreasing partial quotients. Journal de théorie des nombres de Bordeaux, 14 no. 2 (2002), p. 497-516.

[4] *Kalpazidou S.* On a problem of Gauss-Kuzmin type for continued fraction with odd partial quotients, Pacifc J. Math. 123 (1986) 103-114; MR0834141 (87k:11086).

[5] *Olds C.D.* Continued fractions, Random House, New York, 1963.

[6] *Schweiger, F.* Ergodic theory of fibred systems and metric number theory, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[7] *Арнольд В. И.* Цепные дроби. — М.: МЦНМО, 2001. — 40 с. — ISBN 5-94057-014-3.

[8] *Лещинський О.Л., Працьовитий М.В.* Один клас сингулярних розподілів випадкових величин, представлених елементарним ланцюговим дробом з незалежними елементами // Сучасні фізико-математичні дослідження молодих науковців вузів України: Зб.наук.праць. — Київ: Київ. нац. ун-т ім.Т.Г.Шевченка, 1995. — С.20-30.

[9] *Працьовитий М.В.* Сингулярність розподілів випадкових величин, заданих розподілами елементів свого ланцюгового зображення // Укр. мат. журн. - 1996. - 48, № 8. - С.1086-1095.

[10] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу – 2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77-93.

[11] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[12] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. —М.: Наука, — 1978. — 116 с.