Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 32–41

УДК 533.6.013.42

Влияние перегрузки на осесимметричные колебания круговой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости в цилиндрическом резервуаре*

Ю. Н. Кононов, Ю. А. Джуха

Донецкий национальный университет имени Васыля Стуса, Винница; kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com

A frequency equation of axisymmetric oscillations of a circular membrane on the free surface of an ideal incompressible fluid in an upright circular cylindrical tank is derived. The frequency equation is simplified and one is shown that it can be represented in a unified invariant form with respect to the frequency which is looked for. Accounting for two terms in a series from the frequency equation, an approximate condition for the stability of the coupled axisymmetric fluid-membrane vibrations is derived. The condition is independent of the membrane mass of and the fluid depth. It is shown that instability can only be associated with a negative overload. An algorithm leading to an exact stability condition is proposed. A note is that taking two terms in series provides a sufficient practical accuracy.

Виведене частотне рівняння осесиметричних коливань кругової мембрани, розташованої на вільній поверхні ідеальної нестисливої рідини, що знаходиться у прямому круговому циліндричному резервуарі. Проведене спрощення частотного рівняння і показано, що воно може бути представлене в єдиній формі незалежно від розшукуваної частоти. Із урахуванням двох членів у ряді частотного рівняння отримана наближена умова стійкості сумісних осесиметричних коливань мембрани і рідини. Ця умова не залежить від маси мембрани і глибини заповнення рідини. Показано, що нестійкість може виникнути тільки при від'ємному перевантаженні. Запропонований алгоритм, що дозволяє отримати точну умову стійкості. Відзначається, що урахування двох членів ряду дає достатню для практики точність.

*Исследования проведены в рамках программы фундаментальных исследований Министерства образования и науки Украины (проект № 0116U002522) и при грантовой поддержке ДФФД (проект № Ф71/47-2017).

1 Введение

В настоящее время имеется достаточное число работ, в которых проведены исследования несимметричных колебаний круговой мембраны или пластины, расположенной на свободной поверхности идеальной жидкости в круговом цилиндре [1–5]. В одной из первых статей [1] было исследовано влияние перегрузки на основную частоту несимметричных собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с безинерционной круговой мембраной на свободной поверхности. В работе показано, что потеря устойчивости может наступить только при отрицательной перегрузке. Также в этой работе отмечается хорошее совпадение экспериментальных данных с теорией. Наиболее общие исследования несимметричных колебаний резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена пластина или мембрана, были проведены в статье [2], а более полное приведено в монографии [3]. В [3] отмечается, что в случае недеформируемости стенок полости и несжимаемости жидкости пластина может иметь только антисимметричные формы, ортогональные к постоянной. Однако для мембраны, при интегральном условии сохранения массы жидкости, это ограничение может быть снято. Поэтому при рассмотрении частотного уравнения (5.50) ([3], с.180) для случая осесимметричных колебаний необходимо учесть условие сохранения массы жидкости. Условия устойчивости осесимметричных колебаний круговой мембраны также не следуют из работ [6, 7].

В статье [8] проведены исследования собственных осесимметричных колебаний двухслойной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном в виде круговой пластинки, а в [9] – осесимметричных колебаний упругих оснований в виде кольцевых пластин и идеальной жидкости в жестком коаксиальном цилиндрическом резервуаре. Рассмотрены различные предельные случаи вырождения кольцевых пластин в круговые, в мембраны, в абсолютно жесткие и различные случаи закрепления пластин. В статьях [10–12] исследуются осесимметричные колебаниях упругой мембраны, разделяющей двухплотностную жидкость в жестком круговом цилиндрическом резервуаре применительно к современным капиллярным системам отбора жидкости (КСОЖ).

2 Постановка задачи

Рассмотрим осесимметричные колебания закрепленной упругой круговой мембраны, расположенной на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости плотности ρ в круговом цилиндре радиуса a. Мембрана подвержена растягивающим усилиям интенсивности T в срединной поверхности. Жидкость заполняет цилиндр до глубины h.

Систему координат $Oxyz$ расположим так, чтобы плоскость Oxy находилась на невозмущённой срединной поверхности мембраны, а ось Oz была направлена вдоль оси цилиндра противоположно вектору ускорения силы тяжести $\overrightarrow{g}$. Колебания мембраны и жидкости будем рассматривать в линейной постановке, считая совместные колебания пластины и жидкости безотрывными, а движение жидкости – потенциальным.

Уравнения осесимметричных колебаний мембраны и жидкости имеют вид [6, 9]:

$$k_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - T\Delta_2 W + \rho g W = \rho \left(Q - \left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=0} \right) - P_0 = 0, \tag{1}$$

$$\Delta \Phi = 0, \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=-h} = 0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{\partial W}{\partial t}, \tag{4}$$

$$W|_{r=a} = 0, \tag{5}$$

$$\int\limits_S W dS = 0, \tag{6}$$

$$W(0,t) < \infty. \tag{7}$$

Здесь $k_0 = \rho_0 \delta_0$; W, ρ_0 и δ_0 – соответственно прогиб, плотность и толщина мембраны; Φ – потенциал скоростей жидкости; Q – произвольная функция времени; $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ и $\Delta = \Delta_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – соответственно двухмерный и трехмерный операторы Лапласа для осесимметричного случая; P_0 – внешнее давление на мембрану; S – сечение кругового цилиндра.

3 Метод решения

Представим функцию $\Phi(r,z,t)$ в виде обобщенного ряда Фурье по собственным функциям $\psi_n(r)$:

$$\Phi(r,z,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(t)\mathrm{e}^{k_n z}+B_n(t)\mathrm{e}^{-k_n z}\right]\psi_n(r), \tag{8}$$

где собственные функции $\psi_n(r)$ и соответствующие им собственные числа k_n находятся из решения следующей краевой задачи:

$$\Delta_2\psi_n+k_n^2\psi_n=0 \text{ на } [0,\ a]\,,\ \left.\frac{d\psi_n}{dr}\right|_{r=a}=0 \tag{9}$$

и вместе с произвольной константой образуют на $[0,\ a]$ полную и ортогональную систему функций. Из-за осевой симметрии эти функции имеют вид $\psi_n(r)=J_0(k_n r)$, а собственные числа k_n находятся из уравнения $J_1(\xi_n)=0$ ($\xi_n=k_n a$, J_0 и J_1 – функции Бесселя первого рода).

Подставив выражения (9) в граничные условия (4) – (5), получим:

$$A_n=\frac{\dot{W}_n\mathbf{e}^{\kappa_n}}{2k_n\sinh\kappa_n},\quad B_n=\frac{\dot{W}_n\mathbf{e}^{-\kappa_n}}{2k_n\sinh\kappa_n}\quad(\kappa_n=k_n h).$$

Здесь

$$W_n=\frac{1}{N_n^2}\int\limits_0^a rW\psi_n dr, \tag{10}$$

$$N_n^2=\int\limits_0^a r\psi_n^2 dr=\frac{a^2}{2}J_0^2(\xi_n)\,.$$

С учетом соотношений (9) – (10) уравнение (1) примет вид:

$$k_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}-T\Delta_2 W+\rho g W=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\ddot{W}_n}{k_n}\psi_n+\rho Q-P_0, \tag{11}$$

где $a_n=\rho\coth\kappa_n$.

Таким образом, совместные колебания упругой мембраны и жидкости находятся из системы интегро-дифференциальных уравнений (10) – (11), граничных условий (6), условий сохранения объема несжимаемой жидкости (7), ограниченности прогиба в нуле (8) и заданных начальных условий.

4 Собственные частоты совместных колебаний упругой мембраны и жидкости

Для нахождения собственных частот совместных колебаний упругой мембраны и жидкости положим:

$$W(r,t) = w(r)\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\omega\mathbf{t}},\ \rho Q = C_0\mathbf{e}^{\mathbf{i}\omega\mathbf{t}},\ P_0 = 0. \tag{12}$$

Подставив (12) в (10)–(11), (6)–(8), получим:

$$\Delta_2 w + qw = -\frac{\omega^2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n w_n}{k_n}\psi_n + C, \tag{13}$$

$$w_n = \frac{1}{N_n^2}\int_0^a rw\psi_n dr, \tag{14}$$

$$w|_{r=a} = 0, \tag{15}$$

$$\int_0^a rwdr = 0, \tag{16}$$

$$w(0) < \infty. \tag{17}$$

Здесь $q = \big(k_0\omega^2 - g\rho\big)/T$, $C = -C_0/T$.

Общее решение уравнения (13) будем искать в виде общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного [3]. Из-за условия (17) будем иметь:

$$w = A^0 w^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{C}_n\psi_n + w_0, \tag{18}$$

где A^0, $\tilde{C}_n$ и w_0 – неизвестные константы, а ограниченное решение w^0 находится из однородного уравнения $\Delta_2 w^0 + qw^0 = 0$.

Подставив (18) в уравнение (13), и воспользовавшись соотношением $\Delta_2\psi_n = -k_n^2\psi_n$ из (9), получим:

$$\tilde{C}_n = \frac{\omega^2 a_n}{k_n d_n}w_n,\ C = qw_0, \tag{19}$$

где $d_n = Tk_n^2 + g\rho - k_0\omega^2$.

Подставив (18) в (14), и принимая во внимание (19), найдем выражение для w_n через неизвестную константу A^0:

$$w_n = \frac{k_n d_n}{k_n d_n - \omega^2 a_n} A^0 E_n^0. \tag{20}$$

Здесь

$$E_n^0 = \frac{1}{N_n^2} \int\limits_0^a r w^0 \psi_n dr. \tag{21}$$

С учетом (16), (19) и (20) окончательное выражение для формы прогиба мембраны w примет вид:

$$w = \left(w^0 - \tilde{w}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} E_n^0 \psi_n \right) A^0, \tag{22}$$

где $\tilde{w}^0 = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a r w^0 dr$, $\tilde{a}_n = a_n + k_n k_0$, $\tilde{d}_n = T k_n^2 + g\rho$.

Из граничных условий закрепления мембраны (15) следует частотное уравнение собственных совместных колебаний упругой мембраны и жидкости:

$$w^0\big|_{r=a} - \tilde{w}^0 - \omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_n^0 J_0(\xi_n) = 0. \tag{23}$$

Здесь $\alpha_n = a_n \big/ \left(\omega^2 a_n - k_n d_n\right) = a_n \Big/ \left(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n\right)$.

Воспользовавшись разложением функции w^0 в ряд по полной и ортогональной системе функций ψ_n, условием $\int\limits_0^a r\psi_n dr = 0$ и обозначением (21), уравнение (23) можно переписать так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n E_n^0 J_0(\xi_n) = 0, \tag{24}$$

Здесь $\beta_n = 1 - \omega^2 \alpha_n = -k_n d_n \Big/ \left(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n\right)$.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2, являющихся корнями характеристических уравнений (23) и (24), а соответствующие им собственные функции $w_l\,(r)$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[0,\ a]$. Однако, следует отметить, что при определенных соотношениях параметров механической системы частотные уравнения могут не иметь положительных корней, т.е. плоская форма равновесия упругой мембраны может быть неустойчивой. Как, например, при отрицательной перегрузке [1, 6-7].

Решения однородного уравнения w^0 и значения коэффициента E_n^0 зависят от знака величины q.

При $q < 0$ будем иметь

$$w^0 = \mathrm{I}_0(pr),\ E_{1n}^0 = \frac{2p_1 \mathrm{I}_1(p_1)}{a^2\,(p^2 + k_n^2)\,J_0(\xi_n)}$$

и частотное уравнение (24) запишется так:

$$\frac{2p_1 I_1(p_1) T}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n = 0. \tag{25}$$

Здесь $p^2 = -q$, $p_1 = pa$, $\tilde{\beta}_n = k_n \Big/ \Big(\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n\Big)$.

При $q > 0$ получим

$$w^0 = J_0(\tilde{p}r),\ E_{1n}^0 = \frac{2\tilde{p}_1 J_1(\tilde{p}_1)}{a^2\,(\tilde{p}^2 - k_n^2)\,J_0(\xi_n)}$$

и частотное уравнение (24) примет вид

$$\frac{2\tilde{p}_1 J_1(\tilde{p}_1) T}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n = 0, \tag{26}$$

где $\tilde{p}^2 = q$, $\tilde{p}_1 = pa$.

Так как $I_1(p_1) \neq 0$ и $J_1(\tilde{p}_1) \neq 0$, то из вида уравнений (25) и (26) следует, что частотное уравнение (24) не зависит от условий $k_0\omega^2 - -g\Delta\rho > 0$ или $k_0\omega^2 - g\Delta\rho < 0$ и может быть записано в единой форме $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tilde{\beta}_n = 0$ или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{\omega^2 \tilde{a}_n - k_n \tilde{d}_n} = 0. \tag{27}$$

Несложно показать, что нули знаменателя левой части уравнения (27) описывают частоты колебаний незакрепленной мембраны.

Следует отметить, что такого упрощения удалось достигнуть за счет разложения функции w^0 в ряд по полной и ортогональной системе собственных функций ψ_n и рассмотрении уравнения (24). При численных расчетах уравнение (23) имеет лучшую сходимость, чем уравнение (27). Однако, для аналитических исследований удобнее использовать уравнение (27).

Левая часть уравнения (27) является монотонно возрастающей функцией параметра ω^2 на интервале $\left(k_n\tilde{d}_n\Big/\tilde{a}_n,\ k_{n+1}\tilde{d}_{n+1}\Big/\tilde{a}_{n+1}\right)$ $(n = 1, 2, ...)$, принимающая на нем значения от $-\infty$ до ∞. Следовательно, между двумя последовательными значениями $k_n\tilde{d}_n\Big/\tilde{a}_n$ лежит только один корень уравнения (27). Этим заранее определяются интервалы, в которых находятся собственные частоты.

Таким образом, рассматриваемая задача имеет бесконечный дискретный спектр собственных значений ω_l^2, являющихся корнями характеристических уравнений (23) и (27), а соответствующие им собственные функции $w_l\,(r)$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[0,\, a]$.

5 Устойчивость осесимметричных колебаний упругой мембраны при перегрузке

Пусть $g = g_0 n_x$, где n_x – величина перегрузки. Если в ряде уравнения (27) удержать два члена, то из неравенства $\omega^2 > 0$ следует условие устойчивости плоской формы равновесия мембраны $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 > 0$ или

$$\tilde{T} > 0.03130\tilde{n}_x. \tag{28}$$

Здесь безразмерная величина $\tilde{T} = T\big/g_0\rho a^2, \tilde{n}_x = -n_x$.

Из неравенства (28) следует, что при неотрицательной перегрузке $(n_x \geqslant 0)$ осесимметричные колебания всегда устойчивые. Неустойчивость может возникнуть только при отрицательной перегрузке. Условие устойчивости (28) не зависит от глубины заполнения жидкости и массы мембраны. Неравенство (28) можно уточнить с учетом трех и более членов ряда, но при этом придется воспользоваться условиями положительности корней полиномов n - ой степени, что значительно усложнит аналитические исследования.

Для уточнения условия устойчивости (28) при $n_x < 0$ поступим следующим образом: в частотном уравнении (27) положим $\omega^2 = 0$.

Оно примет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2 - \alpha^2} = 0, \tag{29}$$

где $\alpha^2 = \tilde{n}_x \Big/ \tilde{T} > 0$.

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1\big/\big(\xi_n^2 - \alpha^2\big)$ может быть представлен следующим образом [13]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^2 - \alpha^2} = -\frac{J_0(\alpha)}{2\alpha J_1(\alpha)}. \tag{30}$$

Первый положительный корень уравнения (29), с учетом (30), имеет вид $\alpha = 5.520078110$, который даст следующее точное условие устойчивости:

$$\tilde{T} > 0.03282\tilde{n}_x. \tag{31}$$

Следует отметить близость приближенного значения и точного, т.е. учет двух членов ряда дает достаточную для практики точность.

Проведенные численные расчеты частотных уравнений (23) и (27) подтвердили достоверность полученных условий устойчивости.

[1] *Самодаев В. Е.* Влияние перегрузки на частоты собственных колебаний жидкости в жестком цилиндрическом баке с мембраной на свободной поверхности // Труды семинара «Динамика упругих и твердых тел, взаимодействующих с жидкостью». — 1972. — С. 180–186.

[2] *Докучаев Л. В.* О колебании резервуара с жидкостью, на свободной поверхности которой расположена мембрана // Строительная механика и расчет сооружений. — 1972. — № 1. — С. 49–54.

[3] *Докучаев Л. В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. — М.: Машиностроение, 1987. — 232 с.

[4] *Троценко В. А., Богун Р. И.* Колебания жидкости в осесимметричном резервуаре с мембраной на свободной поверхности // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2008. — **5**, № 2. — С. 304–343.

[5] *Троценко В. А., Богун Р. І.* Вимушені коливання рідини в руховому резервуарі з мембраною на її вільній поверхнію // Аналітична механіка та її застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2010. — **7**, № 3. — С. 62–77.

[6] *Кононов Ю. Н., Федорчук А. И.* Влияние перегрузки на собственные колебания кольцевой невесомой мембраны, расположенной на свободной поверхности жидкости // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2015. — № 1-2. — С. 109–115.

[7] *Кононов Ю. М., Федорчук О. І.* Вплив перевантаження на вільні коливання кільцевої мембрани, розміщеної на вільній поверхні рідини // Конференція молодих учених «Підстригачівські читання - 2016» [Електронний ресурс] . — Режим доступу: http://iapmm.lviv.ua/chyt2016/theses/Fedorchuk.pdf (дата обращения: 19.02.2014).

[8] *Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А.* Осесимметричные колебания двухслойной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2015. — **7**, № 1-2. — С. 116–125.

[9] *Кононов Ю. Н., Джуха Ю. А.* Осесимметричные колебания двухслойной жидкости со свободной поверхностью в жестком круговом цилиндрическом резервуаре с упругим дном // Вісн. Запорізького національного ун-ту. Сер. Физ.-мат. наук. — 2016. — № 1. — С. 103–115.

[10] *Гончаров Д. А.* Осесимметричные колебания двухплотностной жидкости в цилиндрическом баке — Электронное научно-техническое издание: Наука и образование [Электронный ресурс], 2012. — № 4. — Режим доступу: http://technomag.bmstu.ru/doc/362856.html (дата обращения: 19.02.2014).

[11] *Гончаров Д. А.* Динамика двухслойной жидкости, разделенной упругой перегородкой с учетом сил поверхностного натяжения — Электронное научно-техническое издание: Наука и образование [Электронный ресурс], 2013. — № 11. — Режим доступу: http://technomag.bmstu.ru/doc/619258.html (дата обращения: 19.02.2014).

[12] *Пожалостин А. А., Гончаров Д. А.* Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения — // Инженерный журнал: наука и инновации. [Электронный ресурс], 2013. — № 12. — Режим доступу: http://engjournal.ru/catalog/eng/teormach/1147.html (дата обращения: 19.02.2014).

[13] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М: Наука, 1966. — 296 с.