Збірник праць Інституту математики НАН України 2017, т. 14, № 2, 42–55

УДК 517.983.27

Модальне керування механічною системою “резервуар – рідина з вільною поверхнею” *

О. В. Константінов , В. В. Новицький

Інститут математики НАН України, Київ;
akonst.im@ukr.net, v.novytskyy@gmail.com

The paper considers an approach to control the mechanical system “reservoir–liquid with a free surface“ providing the system to move by a prescribed trajectory. Due to a multimodal method to the sloshing liquid adapted, the approximate governing equations of the system have twelve (12) degrees of freedom. The control action contains two components, i.e., the program control and the feedback control. For the feedback control coefficients, analytical dependencies are found in an explicit form. The quality of transient processes in the controlled system is analysed.

В роботі розглянуто один із підходів до побудови керування механічною системою “резервуар – рідина з вільною поверхнею“. Під дією керування система повинна рухатись за заданим законом. Динаміка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі, яка описує сумісний рух резервуару та рідини під дією керуючих сил. Керування складається із двох компонентів: програмного керування та керування із зворотним зв’язком. Для коефіцієнтів зворотного зв’язку знайдено аналітичні залежності в явному вигляді. Проаналізовано якість перехідних процесів в системі при наявності керування.

В работе рассмотрен один из подходов к построению управления механической системой “резервуар – жидкость со свободной поверхностью“. Под действием управления система должна двигаться по заданному закону. Поведение системы рассматривается на основе нелинейной многомодовой (12 форм колебаний) модели, которая описывает совместное движение резервуара и жидкости под действием управляющих сил. Управляющее воздействие содержит две компоненты: программное управление и управление с обратной связью. Для коэффициентов обратной связи найдены в явном виде аналитические зависимости. Проанализировано качество переходных процессов в системе при наличии управления.

---

*Робота виконана за частковою підтримкою НДР № 0117U004077.

Вступ

Інженерні конструкції, що містять у своєму складі резервуари, частково заповнені рідиною, широко використовуються у різних галузях техніки. Резервуари з рідиною є невід'ємною складовою частиною космічних апаратів з рідинним ракетним двигуном, літаків, гелікоптерів, нафтосховищ та реакторів, що використовуються у хімічній та нафтохімічній промисловості. Останнім часом поширюється інтерес до задач динаміки та керування обмеженими об'ємами рідини у зв'язку з проблемами транспортування та збереження у складних умовах дії вібраційних, імпульсних, сейсмічних, вітрових та інших навантажень. З практики відомо, що баки з рідиною у літаках, танкерах, залізничних та автомобільних цистернах суттєво впливають на стійкість та якість керування транспортними засобами.

Проблемам керування рухомими об'єктами, які містять маси рідини з вільною поверхнею, зокрема, ракетами-носіями та супутниками, присвячені роботи [1,5,6,11,12,18]. У них розглядались задачі побудови автомату стабілізації на основі лінійної моделі динаміки системи та апарату теорії передавальних функцій. У колективній монографії [19] розглядались задачі керування обертанням твердого тіла, яке має порожнину, частково заповнену ідеальною або в'язкою рідиною, на основі лінеаризованих моделей.

У роботі розглянуто один з підходів до побудови керування механічною системою “резервуар – рідина з вільною поверхнею“ для забезпечення заданого закону руху. Поведінка системи розглядається на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі [7], яка описує сумісний рух резервуару та рідини під впливом керуючих сил. Використана модель побудована на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. Нелінійні моделі для випадку заданого руху резервуару на основі варіаційного принципу Бейтмена побудовані у роботах І.О. Луковського [8–10, 13].

Для забезпечення мети керування спочатку будується так зване програмне керування, яке обчислюється для резервуару із “затверділою“ рідиною при відсутності будь-яких збурень у системі [3]. Оскільки збурення у системі – коливання вільної поверхні рідини – присутні, то на другому етапі будується керування зі зворотним зв'язком за збуреннями [?, 2, 17]. Керування зі зворотним зв'язком будується на основі лінійної моделі з використанням фазових змінних – переміщення та швидкості резервуару і амплітуди та швидкості вільної поверхні рідини. У роботах В.В. Новицького розроблено методи побудови зворотного зв'язку для загального випадку лінійних нестаціонарних систем [17]. Ці методи використовують підходи на основі модального принципу, завдання функції Ляпунова або мінімізації середньоквадратичного функціоналу. Для отримання коефіцієнтів зворотного зв'язку використовується один з таких методів [14–17]: рівняння системи у збуреннях послідовно перетворюються у форму, канонічну за керуванням, потім у канонічну форму Гессенберга і, нарешті, у канонічну форму Фробеніуса. Для матриці, представленої у канонічній формі Фробеніуса, коефіцієнти характеристичного поліному мають найпростішу залежність від параметрів системи. Співставлення шуканих коефіцієнтів характеристичного поліному з коефіцієнтами характеристичного поліному еталонної системи дозволяє в аналітичному вигляді отримати формули для знаходження коефіцієнтів зворотного зв'язку, а значить, забезпечити відповідну якість перехідних процесів у системі під час керованого руху.

1 Математична модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею"

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи О.С. Лимарченко [7], математична модель механічної системи "резервуар – рідина з вільною поверхнею" будується на основі варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського

$$\delta I = 0, \quad \text{где} \quad I = \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt,$$

при цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона - Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергією системи

$$L = \frac{1}{2}\rho \int\limits_{\tau} (\vec{\nabla}\varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z -$$

$$-\frac{1}{2}\rho g \int\limits_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F}\cdot\vec{\varepsilon},$$

де ρ – щільність рідини; τ – область, яку займає рідина; $d\tau = rdrd\theta dz$ – циліндричні координати, при цьому вісь Oz має напрямок, протилежний напрямку вектора прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla} = \vec{i}_1\frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \vec{i}_3\frac{\partial}{\partial z}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні рідини; S – поперечний переріз циліндричного резервуару; M_T та M_F – маса резервуару та рідини відповідно; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуару у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно точки O.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуару з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [7], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r,\theta,t) = \sum_i a_i(t)\psi_i(r,\theta), \varphi = \sum_i b_i(t)\varphi_i(r,\theta,z), \qquad (1)$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ. Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh\kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh\kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [7] та мають вигляд

$$\psi_n(r,\theta) = J_n\left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R}r\right) \begin{matrix}\sin(n\theta)\\ \cos(n\theta)\end{matrix}\ , \ n = 0,1,2,...; \ m = 1,2,...$$

У роботі [7] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею“ мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [7] побудована математична модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею“ при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\sum_i \ddot{a}_i \cdot \left\{ \beta^q_{ri} + \sum_j a_j \gamma^q_{ij} + \sum_{i,j} a_i a_j \delta^q_{rijk} \right\} + \tag{2}$$

$$+\ddot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}^1_r + \sum_i a_i \vec{B}^2_{ri} + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}^3_{rij} + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}^4_{rijk} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma^q_{ijr} - \gamma^q_{rij}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta^q_{ijkr} - 2\delta^q_{rijk}) -$$

$$-\frac{1}{2} g \alpha^s_r - \alpha^p_r \dot{a}_r - g N_r a_r + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \left\{ \vec{B}^1_r + \sum_i a_i (\vec{B}^2_{ir} - \vec{B}^2_{ri}) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\vec{B}^3_{ijr} - \vec{B}^3_{rij}) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\vec{B}^4_{ijkr} - \vec{B}^4_{rijk}) \right\},$$

$$\rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i [\vec{B}^1_i + \sum_{i,j} a_j \vec{B}^2_{i,j} + \sum_{i,j,k} a_j a_k \vec{B}^3_{ijk}] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\vec{\varepsilon}} = \tag{3}$$

$$= \vec{F} - (M_T + M_F) g \vec{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}^2_{ij} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}^3_{ijk} \right\}.$$

Система (2) – (3) містить $N + 3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуару та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (2) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (3) – динаміку резервуару, однак ці рівняння взаємозв’язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (2) – (3), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі із визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta^q_{ir}, \gamma^q_{ijr}, \delta^q_{ijkr}, \alpha^s_r, N_r$ відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\vec{B}^1_r, \vec{B}^2_{ri}, \vec{B}^3_{rij}, \vec{B}^4_{rijk}$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуару.

2 Побудова програмного керування та керування зі зворотним зв'язком

Якщо зовнішня сила $\vec{F}$, яка діє на систему “резервуар – рідина з вільною поверхнею“, має за мету здійснення необхідного закону руху або мінімізацію заданого функціоналу, то таку силу прийнято називати керуванням.

Побудуємо керування, яке забезпечить системі набір швидкості за заданий час t_1 зі стану спокою до заданого значення V_1 та подальший поступальний рух з цією постійною швидкістю в напрямку Oy. Шукане керування складається з двох складових: програмного керування та керування зі зворотним зв'язком.

Програмне керування будується на основі моделі руху резервуару із “затверділою“ рідиною при відсутності будь-яких збурень. За вказаними вище кінематичними умовами руху закон зміни швидкості резервуару буде мати вигляд

$$\dot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_1}{t_1}t, \ 0 \le t \le t_1, \\ V_1, \ t > t_1, \end{cases}$$

тоді прискорення відповідно буде мати вираз

$$\ddot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_1}{t_1}, \ 0 \le t \le t_1, \\ 0, \ t > t_1, \end{cases}$$

і за другим законом Ньютона програмне керування буде мати вигляд $F_y = M\ddot{\varepsilon}_y$, де $M = M_T + M_F$ – загальна маса системи. Таким чином, побудоване програмне керування при відсутності будь-яких збурень і відповідності наявних початкових умов до заданих повинне буде здійснювати рух системи за програмним законом

$$\varepsilon_y = \begin{cases} \frac{V_1}{2t_1}t^2, \ 0 \le t \le t_1, \\ V_1 t, \ t > t_1, \end{cases} \quad \dot{\varepsilon}_y = \begin{cases} \frac{V_1}{t_1}t, \ 0 \le t \le t_1, \\ V_1, \ t > t_1, \end{cases} \tag{4}$$

$$\xi(t) = 0, \ \dot{\xi}(t) = 0.$$

Оскільки у системі присутні збурення – коливання вільної поверхні рідини, введемо у систему керування зі зворотним зв'язком, яке буде корегувати наявні похибки – відхилення наявних значень параметрів руху $\varepsilon_y, \dot{\varepsilon}_y, \xi, \dot{\xi}$ від заданих програмних значень (4). Керування зі зворотним зв'язком побудуємо на основі лінеаризованної системи рівнянь руху (2) – (3), в якій буде враховано коливання вільної поверхні рідини по першій антисиметричній формі a_1 з можливістю горизонтального переміщення резервуару по горизонтальній координаті y. Відповідні рівняння мають вигляд

$$\ddot{a}_1 \beta_{11}^q + B_1^{1y} \ddot{\varepsilon}_y + g N_1 a_1 = 0,$$

$$\frac{\rho B_1^{1y}}{M_T + M_F} \ddot{a}_1 + \ddot{\varepsilon}_y = 0,$$

або, з урахуванням позначень, $\nu_1 = \frac{B_1^{1y}}{\beta_{11}^q}$, $\nu_2 = \rho B_1^{1y}$, частота першої антисиметричної форми $\omega_1^2 = \frac{gN_1}{\beta_{11}^q}$, у вигляді

$$\ddot{a}_1 + \nu_1 \ddot{\varepsilon}_y + \omega_1^2 a_1 = 0, \tag{5}$$

$$\nu_2 \ddot{a}_1 + M \ddot{\varepsilon}_y = F_y. \tag{6}$$

Введемо також позначення для фазових змінних $x_1 = a_1$, $x_2 = \dot{a}_1$, $x_3 = \varepsilon_y$, $x_4 = \dot{\varepsilon}_y$, $u = F_y$ та приведемо систему диференціальних рівнянь (5) – (6) до нормальної форми Коші

$$\dot{x} = Fx + Gu, \tag{7}$$

де x – вектор фазових змінних $[x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, u – керування, а матриця F та вектор G мають вигляд

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ G = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

де $\lambda_1 = -\frac{M\omega_1^2}{M-\nu_1\nu_2}$, $\lambda_2 = \frac{\nu_2\omega_1^2}{M-\nu_1\nu_2}$, $\beta_1 = -\frac{\nu_1}{M-\nu_1\nu_2}$, $\beta_2 = \frac{1}{M-\nu_1\nu_2}$. У системі (7) фазові змінні $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ мають сенс збурень, тобто відхилень дійсних значень параметрів руху системи від програмних.

Побудоване керування зі зворотним зв'язком повинне забезпечити асимптотичну стійкість руху системи у збуреннях. Для його побудови будемо використовувати метод, розроблений В.В. Новицьким [?]: рівняння системи у збуреннях (7) послідовно перетворюються у форму, канонічну за керуванням, потім у канонічну форму Гессенберга і, нарешті, у канонічну форму Фробеніуса.

Оскільки у системі (7) вектор керування має розмірність 1, після перетворення система (7) у формі, канонічній за керуванням, повинна мати вигляд

$$\dot{y} = Ay + Bu, B = [0\ 0\ 0\ 1]^T. \tag{9}$$

Відповідно до [17] побудуємо неособливе перетворення $y = Tx$, де пряма та обернена матриця перетворення T мають вигляд

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{\beta_1}{\beta_2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta_2} \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Застосовуючи перетворення T до системи (7), тобто

$$A = TFT^{-1}, \ B = TG,$$

отримаємо вирази для A та B у системі (9) у формі, канонічній щодо керування

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \lambda_1 - \frac{\beta_1\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \frac{\lambda_2}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Другим етапом буде зведення системи (9) до канонічної форми Гессенберга. Матриці A та B у канонічній формі Гессенберга будуть мати вигляд

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто матриця A буде мати нижньотрикутну форму, а вектор B після перетворень залишається незмінним. Відповідно до методу [17], перехід матриці A системи (9) буде виглядати як серія неособливих перетворень

$$A^{(i)} = R^{(i)} A^{(i-1)} R^{(i)-1}, \ i = 1, 2, 3, 4,$$

при цьому $A^{(0)} = A$. Введемо позначення $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1 \lambda_2}{\beta_2}, \gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$ для відповідних елементів матриці A і отримаємо крок за кроком вигляд матриці A

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta_1 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \\ \gamma_1 \beta_1 & 0 & \gamma_1 \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix}, A^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, система (9) у канонічній формі Гессенберга має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2 \beta_1 \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \beta_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Третім етапом буде зведення системи (9) до канонічної форми Фробеніуса. Матриці A та B у канонічній формі Фробеніуса будуть мати вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

тобто у матриці A тільки у нижньому рядку можуть бути довільні значення, а вектор B після перетворень знову залишається незмінним. Як і на другому етапі, відповідно до методу [17], перехід матриці

A системи (9) до канонічної форми Фробеніуса буде виглядати як серія неособливих перетворень, які мають вигляд

$$A^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \gamma_2\beta_1\gamma_1 & 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \end{bmatrix}, \; A^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \gamma_2\beta_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \beta_1\gamma_2 + \gamma_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

З врахуванням $\gamma_1 = \lambda_1 - \frac{\beta_1\lambda_2}{\beta_2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2}{\beta_2}$, система (9) у канонічній формі Фробеніуса має вигляд

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Перемноження всіх матриць перетворень, які послідовно дозволяють перейти від початкової системи (7) до канонічної щодо керування та по Фробеніусу системи (9), дає можливість отримати пряму та обернену матрицю для такої трансформації

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} & 0 \\ 0 & -\frac{\beta_2}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} & 0 & \frac{1}{\beta_1(\beta_1\lambda_2-\beta_2\lambda_1)} \\ \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_1 \\ \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \beta_1\lambda_2 - \beta_2\lambda_1 & 0 & \beta_2 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

У систему (9) підключимо зворотний зв’язок $u = -\sum\limits_i k_i x_i$ та отримаємо рівняння замкненої системи

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & \lambda_1 - k_3 & -k_4 \end{bmatrix} y. \tag{11}$$

Необхідно знайти значення коефіцієнтів k_i зворотного зв'язку, які б забезпечили асимптотичну стійкість замкненої системи (11). Як відомо [2,4], коефіцієнтами характеристичного полінома матриці у формі Фробеніуса є елементи нижнього рядка, тому характеристичний поліном системи (11) має вигляд

$$f(z) = z^4 + k_4 z^3 + (k_3 - \lambda_1)z^2 + k_2 z + k_1.$$

Для забезпечення асимптотичної стійкості системи (11) необхідно, щоб корені характеристичного полінома були дійсними негативними числами [2, 17]. Скористаємося для цього модальним принципом керування, тобто будемо задавати властивості замкненої системи через завдання значень коренів характеристичного полінома, а потім знайдемо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку. Задаємо значення коренів характеристичного полінома як $-\mu_i$ і отримуємо відповідний вигляд характеристичного полінома

$$f(z) = z^4 + (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4)z^3 +$$

$$+(\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4)z^2 +$$

$$(\mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4)z + \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4.$$

Порівнюючи значення коефіцієнтів шуканого та еталонного характеристичного полінома, отримаємо значення коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку в явному вигляді

$$k_1 = \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4,$$

$$k_2 = \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_3\mu_4 + \mu_2\mu_3\mu_4,$$

$$k_3 = \lambda_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4,$$

$$k_4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4.$$

Визначаючи значення коренів характеристичного полінома, а, значить, і коефіцієнтів підсилення k_i зворотного зв'язку, можна завдавати якість перехідних процесів у замкненій системі керування.

3 Результати чисельного моделювання

Розглядається круговий циліндричний резервуар з вертикальною поздовжньою віссю Oz, який здійснює поступальний рух у горизонтальній площині вздовж осі Oy за рахунок дії керуючої сили (керування). Резервуар радіусу $R = 1$ м та маси M_T частково заповнений водою з масою M_F до глибини $H = R$. Система рівнянь (2) – (3) зводиться чисельно до нормальної форми Коші, а потім чисельно інтегрується за допомогою стандартного методу Рунге-Кутта. При дослідженні динаміки системи резервуар – рідина у розкладах утримувалося $n_1 = n_2 = 12$ координатних функцій з точністю до квадратів амплітуд і $n_3 = 6$ з точністю до кубічних членів. Координатні функції розміщено у порядку зростання відповідних їм власних частот за винятком ψ_6 – другої осесиметричної форми. Крок чисельного інтегрування обирався $\Delta t = 0,1\pi\omega_{12}$ с, де ω_{12} – найвища власна частота у системі.

Розглянемо випадок, коли необхідно за допомогою керування $u = F_y$ забезпечити поступальний рух за законом (11), де $V_1 = 0,6\frac{\text{м}}{\text{с}}$, $t_1 = 0,2$ с. На Рис. 1 показані результати моделювання: 1) систе-

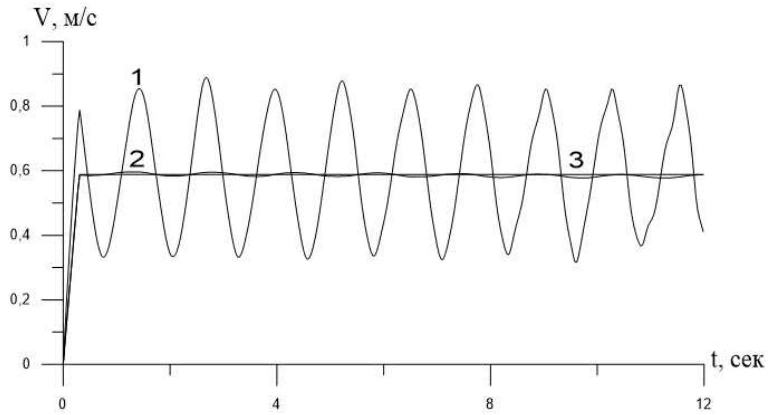

Рис. 1. Зміна швидкості резервуару у часі.

ма з рідиною рухається при відсутності зворотного зв’язку (крива 1); 2) система з рідиною рухається при наявності зворотного зв’язку (крива 2); 3) програмний ідеальний рух системи (крива 3). Як видно з графіків, підключення до системи зворотного зв’язку забезпечує прийнятне наближення до шуканого програмного руху.

Висновки

Досліджено задачу побудови керування для забезпечення руху за заданим законом механічної системи “резервуар – рідина з вільною поверхнею“ при наявності постійних збурень – коливань вільної поверхні рідини. Програмне керування системою побудовано на основі моделі твердого тіла із “затверділою“ рідиною. Для керування зі зворотним зв’язком в аналітичному вигляді отримані коефіцієнти підсилення. Для їх обчислення використовувався модальний принцип: спектр шуканої системи керування повинен співпадати зі спектром еталонної системи для забезпечення асимптотичної стійкості руху. Результати чисельних експериментів підтверджують доцільність використання такого підходу.

[1] *Абгарян К. А., Рапопорт И. М.* Динамика ракет. — М.: Машиностроение, 1969. — 378 с.

[2] *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.

[3] *Галиуллин А. С.* Построение систем программного движения. — М.: Наука, 1971. — 352 с.

[4] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — 576 с.

[5] *Колесников К. С.* Жидкостная ракета как объект регулирования. — М.: Машиностроение, 1969. — 298 с.

[6] *Колесников К. С.* Динамика ракет. — М.: Машиностроение, 1980. — 376 с.

[7] *Лимарченко О. С., Ясинский В. В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. — Киев: НТТУ КПИ, 1997. — 338 с.

[8] *Луковский И. А.* Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость. — К.: Наукова думка, 1990. — 295 с.

[9] *Луковский И. А.* Математические модели нелинейной динамики твёрдых тел с жидкостью. — К.: Наукова думка, 2010. — 408 с.

[10] *Lukovsky I. A.* Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Bodies with a Liquid. — De Gruyter, 2015. — 410 p.

[11] *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. — М.: Машиностроение, 1968. — 532 с.

[12] *Микишев Г. Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 247 с.

[13] *Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А.* Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. — М.: Машиностроение, 1977. — 208 с.

[14] *Новицкий В. В.* Модальное управление механическими системами // Вопросы устойчивости и управления навигационных систем. — Киев: Институт математики АН УССР, 1988. — с. 70-75.

[15] *Новицкий В. В.* Декомпозиция линейных систем и модальное управление // Препринт. — Киев: Институт математики АН УССР, 1990. — 27 с.

[16] *Новицкий В. В.* Обобщение метода модальной декомпозиции на нестационарные системы // Устойчивость и управление в механических системах. — Киев: Институт математики НАН Украины, 1988. — с. 36-42.

[17] *Новицкий В. В.* Декомпозиція та керування в лінійних системах. — Київ: Інститут математики НАН України, 2008. — 252 с.

[18] *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. — М.: Машиностроение, 1975. — 416 с.

[19] *Gurchenkov A., Nosov M., Tsurkov V.* Control of Fluid-Containing Rotating Rigid Bodies. — CRC Press, 2013. — 160 p.