

Динаміка трубопроводу з рідиною при повздовжньому обертанні

В. О. Лимарченко, О. С. Лимарченко, М. М. Сапон

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ;
olelim2010@yahoo.com*

A mathematical model of a pipeline conveying liquid is considered. The pipeline performs rotational motion around its longitudinal straight-line state. The nonlinear coupled fluid-structure interaction problem is solved. The constructed mathematical model appears as a system of ordinary differential equations governing the amplitude functions of the natural eigen modes; the system is resolved with respect to the second derivatives. For the constant angular velocity of the pipeline, the system is analysed for subcritical and supercritical ranges of the liquid flow velocities.

Розглянуто математичну модель руху трубопроводу з рідиною, що тече. Трубопровід виконує обертальний рух навколо повздовнього прямолінійного стану. Задача розв'язується в нелінійній сумісній постановці. Аналітично побудована модель представлена у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь відносно амплітудних параметрів форм коливань в розв'язаному вигляді відносно других похідних. При постійній кутовій швидкості руху трубопроводу проаналізовано поведінку системи в докритичному і закритичному діапазоні зміни швидкості течії.

1 Вступ

Розглядається задача про коливання трубопроводу з рідиною, закріпленого на рухомій основі, що обертається у повздовжньому для трубопроводу напрямку. Метою дослідження цієї роботи є вивчення впливу обертання основи трубопроводу на рух системи при різних швидкостях течії рідини, включаючи закритичні швидкості течії. Складність задачі зумовлена мішаним ейлерово-лагранжевим описом руху компонент системи, який треба брати до уваги при розгляді системи у рамках нелінійної моделі. Для різних значень швидкостей

течії рідини досліджено поведінку системи для випадку консольно закріпленого трубопроводу з вільним кінцем, для якого прояв нестійкості руху є найбільш суттєвим. Показано, що поведінка системи у докритичному і закритичних діапазонах суттєво відмінна. Зокрема, проявляється вихід на режими коливань відносно альтернативного динамічного положення рівноваги. У прикладному плані подібні задачі пов'язані з задачами буріння і розглядалися у публікаціях [?, 1, 5]. Задачі, пов'язані з обертанням трубопроводів, є до теперішнього часу набагато менш дослідженими, ніж для трубопроводів з нерухомою основою [2, 3].

2 Математична модель системи

Розглянемо динаміку системи, яка складається з рухомої основи, що обертається із заданою кутовою швидкістю ω ; трубопроводу довжиною l , який описується за моделлю балки зі згинною жорсткістю EJ , з площею поперечного перерізу F та лінійною густиною μ . У трубопроводі із заданою повздовжньою швидкістю V тече ідеальна, однорідна, нестислива рідина з лінійною густиною ρ і внутрішнім тиском P . Поперечні коливання трубопроводу описуються функцією $u(t, x)$. Труба кругового перетину консольно закріплена на рухомій основі, інший кінець труби вільний. Вважаємо ([1, 4]), що деформівний рух системи відбувається лише у меридіанальній площині.

Для дослідження руху трубопроводу з рідиною використовуємо мішаний ейлерово-лагранжовий опис руху складових системи, описаний у роботах [4, 5] та метод модальної декомпозиції. З врахуванням того, що компонента швидкості, зумовлена обертанням трубопроводу, перпендикулярна меридіанальній площині, в якій відбувається деформаційний рух системи, функція Лагранжа системи набуває вигляду

$$L = \frac{1}{2}\rho \int_0^l \left\{ V^2 + \frac{7}{2}V^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{13}{8}V^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + 4V \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2}\mu \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx -$$

$$-\frac{1}{2}EJ \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx - \frac{1}{8}EJ \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^4 dx -$$

$$-\frac{1}{2}PF \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{1}{2}(\rho + \mu)\omega^2 \int_0^l u^2 dx.$$

Для побудови дискретної моделі системи виконаємо дискретизацію функції Лагранжа за методом Канторовича. Подамо зміщення точок трубопроводу у вигляді $u(t, x) = \sum_{i=1}^N c_i(t)A_i(x)$, де N — кількість форм коливань трубопроводу. Оскільки трубопровід розглядаємо у наближенні балки, то за координатні функції $A_i(x)$ беремо форми коливань труби як балки з нерухомою рідиною.

У результаті дискретизації функції Лагранжа рівняння Лагранжа 2-го роду відносно амплітудних параметрів $c_i(t)$ набудуть вигляду

$$\ddot{c}_r = -\frac{EJ}{\rho + \mu} \chi_r^A c_r + \frac{7}{2} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 + \frac{2\rho V}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i (\beta_{ri}^1 - \beta_{ir}^1) -$$

$$-\frac{PF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_i c_i \beta_{ir}^2 - \frac{1}{2} \sum_{ijk} \ddot{c}_i c_j c_k \frac{d_{jkir}^2}{N_r} - \sum_{ijk} \dot{c}_i \dot{c}_j c_k \frac{\left(d_{jkir}^2 - \frac{1}{2} d_{krij}^2 \right)}{N_r} -$$

$$-\frac{EJ}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijkl}^6 - \frac{2EF}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^3 -$$

$$-\frac{13}{4} \frac{\rho V^2}{(\rho + \mu) N_r} \sum_{ijk} c_i c_j c_k d_{ijk}^4 + \omega^2 c_r. \quad (1)$$

У рівняннях введені індексні величини є квадратурами від відомих форм коливань $A_i(x)$ по відомій області $[0, l]$ та визначаються чисельно. Виключення другої похідної амплітудного параметру в правій частині рівняння виконується на основі заміни цього значення з лінійного наближення.

Звернемо увагу на внесок окремих членів системи рівнянь (1) у формування динамічних процесів. Перший і четвертий члени у правій частині рівняння характеризують поновлюючу силу і зумовлені пружністю балки і внутрішнім тиском рідини. Саме ці фактори сприяють відновленню прямолінійної форми трубопроводу. Другий і

останній члени у правій частині рівняння навпаки сприяють подальшому викривленню трубопроводу. Вони зумовлені відцентровими силами, які виникають при русі рідини по криволінійній траєкторії, а також обертанням трубопроводу. Третій член у правій частині рівняння представляє собою силу Кориоліса. За своїм характером ця сила у різних фазах руху допомагає або уповільнює дію сил пружності. Проте специфіка цієї сили полягає у тому, що вона на лінійному рівні бере участь в перерозподілі енергії між формами коливань, що значно переважає подібний механізм, який виникає внаслідок дії нелінійних механізмів. Роль нелінійних членів зводиться до підсилення або послаблення цих головних ефектів.

З рівнянь руху можна встановити критичну швидкість руху рідини, яка відповідає нульовій поновлюючій силі, тобто динамічному положенню рівноваги. Для першої форми коливань буде

$$V_{cr}^1 = \sqrt{\frac{2}{7\rho\beta_{11}^2} [EJN_1 + PF\beta_{11}^2 - \omega^2(\rho + \mu)N_1]}.$$

Відповідно, при розгляді чисельних прикладів важливо розглянути випадки поведінки системи при докритичних і закритичних швидкостях течії рідини.

3 Аналіз числових прикладів

Розглянемо чисельний приклад коливання трубопроводу при повільному обертанні з постійною швидкістю $\omega = 2\pi$ для різних швидкостей течії рідини, які охоплюють до- і зарезонансні швидкості. У початковий момент часу задавалося збурення $c_1(0) = 0,01$. На Рис. 1 представлено зміну в часі коливань вільного кінця трубопроводу. При цьому на малюнку крива 1 відповідає $V = 0$; крива 2 — $V = 5$ м/с; крива 3 — $V = 9$ м/с; крива 4 — $V = 15$ м/с; крива 5 — $V = 17$ м/с; крива 6 — $V = 20$ м/с. Як видно з рисунка, в усіх режимах швидкостей течії відбувається коливальний рух трубопроводу.

Перші три криві відповідають докритичному діапазону. При збільшенні швидкості течії частота коливань трубопроводу зменшується. Коливання трубопроводу відбуваються відносно прямолінійного стану. Прояв вищих гармонік спектру незначний. Проте при подальшому збільшенні швидкості течії (криві 4, 5) картина коливань суттєво змінюється. Насамперед коливання відбуваються вже не відносно прямолінійного стану, а відносно альтернативного положення рівноваги.

Тут збільшення швидкості призводить до росту частоти. Одночасно при незначному перевершенні критичної швидкості спостерігається прояв вищих гармонік спектру, який згасає при подальшому зростанні швидкості. За такий прояв вищих гармонік відповідають сили Кориоліса. Подальше зростання швидкості течії призводить практично до відсутності прояву вищих гармонік і, що є головним, до втрати стійкості коливань відносно альтернативного положення рівноваги і до переходу до коливань із значними амплітудами. Характер нестійкого режиму показує крива 6.

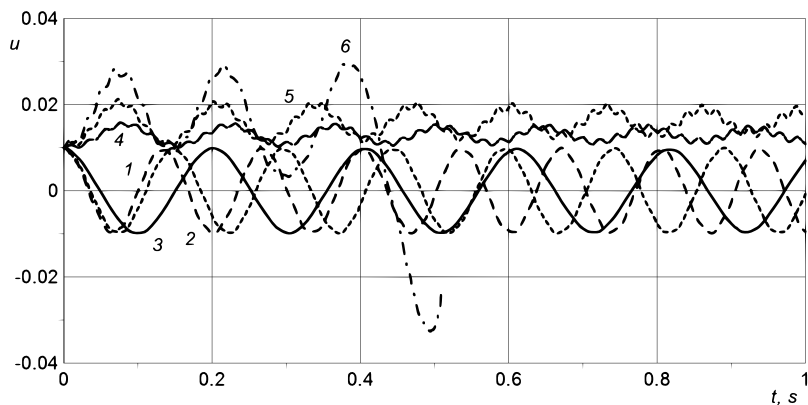


Рис. 1. Коливання кінця балки для різних значень швидкості течії.

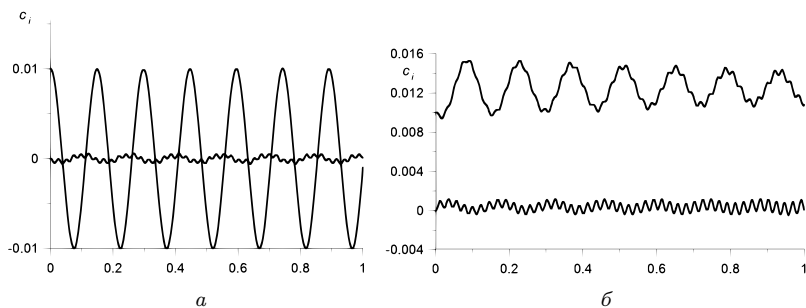


Рис. 2. Зміна у часі амплітуд перших двох форм коливань

На Рис. 2 представлено графіки зміни двох перших форм коливань у докритичному $V = 5$ м/с і закритичному $V = 15$ м/с режимах течії рідини. Рис. 2 а відповідає докритичному режиму, Рис. 2 б —

закритичному режиму. З рисунків помітна суттєва відмінність поведінки амплітуд двох форм коливань. У докритичному режимі обидві форми коливань здійснюють зміну в околі нуля (прямолінійного стану), натомість у закритичному діапазоні перша форма здійснює коливання відносно альтернативного положення рівноваги, а друга — відносно прямолінійного стану. Звернемо також увагу на те, що амплітуди коливань другої форми у закритичному режимі вищі за амплітуди цієї ж форми у докритичному режимі особливо якщо прийняти до уваги їхній відносний внесок (амплітуди першої форми значно зменшилися).

4 Висновки

У роботі розглянуто задачу динаміки трубопроводу з рідиною на основі, що обертається. Розроблено модель руху такої системи та проаналізовано поведінку системи при швидкостях течії рідини в докритичній та у закритичній областях. Показано суттєву відмінність поведінки системи через значний прояв ефекту коливань відносно альтернативного динамічного положення рівноваги. Відзначено також відмінність прояву вищих гармонік спектру і тенденції зростання частоти коливань трубопроводу в залежності від зростання швидкості течії.

- [1] Гуляев В. И., Луговой П. З., Шевчук Л. В. Динамика перекачивания выпуклого долота по криволинейной поверхности дна скважины // Прикладная механика. — 2017. — т. 53, № 4 — С. 94–105.
- [2] Ibrahim R. A. Overview of Mechanics of Pipes Conveying Fluids – Part I: Fundamental Studies // Journal of Pressure Vessel Technology. — 2010. — no. 132. — P. 034001–0340032.
- [3] Ibrahim R. A. Mechanics of Pipes Conveying Fluids – Part II: Applications and Fluidelastic Problems // Journal of Pressure Vessel Technology. — 2011. — no. 133. — P. 024001–0240030.
- [4] Limarchenko V. O. Vibrations of pipeline with liquid on combinational vibration excitation // Nonlinear Oscillations. — 2013. — v. 16, no. 3. — P. 367–373.
- [5] Limarchenko O. S., Limarchenko V. O., Majid M., Timokhin A. P. Applied problems of dynamics of pipelines, conveying liquid // Опір матеріалів і теорія споруд. — 2015. — no. 94. — P. 96–106.