Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 128–160

УДК 517.948

Н. Ш. Искендеров, Л. Н. Джафарова

Бакинский Государственный Университет, Баку
nizameddin_isgenderov@mail.ru, cafarov.90@bk.ru

Прямая и обратная задачи рассеяния для гиперболической системы шести уравнений первого порядка на полуоси

We investigate the direct and inverse scattering problems for a hyperbolic system of six equations of first order on a semi-axis when there are four incident and two scattering waves. We prove the theorem about existence and uniqueness of solution of the inverse scattering problem under joint consideration of four problems with different boundary conditions.

Досліджено пряму і обернену задачі розсіювання для системи шести рівнянь першого порядку на півосі у ситуації, коли є чотири падаючі та дві розсіяні хвилі. Доведено теорему існування та єдиності розв'язку оберненої задачі розсіювання за умови спільного розгляду чотирьох задач з різними крайовими умовами.

Рассмотрим на полуоси $x \geq 0$ гиперболическую систему шести уравнений первого порядка вида

$$\xi_i \frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi_i(x,t)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{6} c_{ij}(x,t)\psi_j(x,t),\ i = \overline{1,6}, \qquad (1)$$

где $\{\psi_1(x,t),...\psi_6(x,t)\}$ — искомая функция, $\xi_1 > ... > \xi_4 > 0 > \xi_5 > \xi_6, -\infty < t < +\infty$, $c_{ij}(x,t)$ — комплекснозначные, измеримые по x и t функции, удовлетворяющие условию

$$|c_{ij}(x,t)| \leq c[(1+|x|)(1+|t|)]^{-1-\varepsilon}, \tag{2}$$

$c > 0, \varepsilon > 0$ — постоянные, причем $c_{ii}(x,t) \equiv 0,\ i = \overline{1,6},\ j = \overline{1,6}$.

Обратные задачи рассеяния для гиперболической системы двух уравнений на всей оси и на полуоси изучены в $[1,2]$, а для гиперболической системы $n \geq 3$ уравнений на всей оси — в [3], обратная задача рассеяния для гиперболической системы трех уравнений на полуоси изучена в [4], для системы n уравнений, когда имеются $(n-1)$ падающие и одна рассеянная волна, или когда имеются одна падающая и $(n-1)$ рассеянные волны изучены в $[5,6]$, когда имеются равные числа падающих и рассеянных волн — в $[7,8]$, для системы пяти уравнений с двумя падающими или тремя падающими волнами — в $[9,10]$.

Обратные задачи рассеяния для различных систем гиперболических уравнений также изучены в работах $[11-13]$ и др.

В данной работе рассматривается случай, когда имеются четыре падающие и две рассеянные волны.

1. Задача рассеяния

Всякое существенно ограниченное решение системы (1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (2), допускает на полуоси $x \geq 0$ следующие асимптотические представления

$$\begin{aligned} &\psi_k(x,t) = a_k(t+\xi_k x) + 0(1), \quad k = \overline{1,4}, \quad x \to +\infty, \\ &\psi_k(x,t) = b_k(t+\xi_k x) + 0(1), \quad k = 5,6, \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $a_k(s) \in L_\infty(R), \quad R = (-\infty,\infty), k = \overline{1,4}$ определяют падающие волны, а $b_k(s) \in L_\infty(R), \quad k = 5,6$ — рассеянные.

Задача рассеяния на полуоси состоит в нахождении решения системы (1) по заданным падающим волнам $a_i(s), \quad i = \overline{1,4}$ и граничным условиям при $x = 0$. Будем совместно рассматривать четыре задачи. Каждая задача состоит в нахождении решения системы уравнений (1), удовлетворяющего одному из следующих условий:

$$\begin{aligned} 1.\quad & \psi_5^1(0,t) = \psi_1^1(0,t) + \psi_2^1(0,t) + \psi_3^1(0,t),\\ & \psi_6^1(0,t) = \psi_4^1(0,t); \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} 2.\quad & \psi_5^2(0,t) = \psi_1^2(0,t) + \psi_2^2(0,t) + \psi_4^2(0,t),\\ & \psi_6^2(0,t) = \psi_3^2(0,t); \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 3.\quad & \psi_5^3(0,t) = \psi_1^3(0,t) + \psi_3^3(0,t) + \psi_4^3(0,t),\\ & \psi_6^3(0,t) = \psi_2^3(0,t); \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} 4.\quad & \psi_5^4(0,t) = \psi_2^4(0,t) + \psi_3^4(0,t) + \psi_4^4(0,t),\\ & \psi_6^4(0,t) = \psi_1^4(0,t). \end{aligned} \tag{7}$$

Совместное рассмотрение этих четырех задач будем называть задачей рассеяния для системы уравнений (1) на полуоси.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты $c_{i,j}(x,t)$, $i,j = \overline{1,6}$ системы уравнений* (1) *удовлетворяют условиям* (2). *Тогда существует единственное решение задачи рассеяния на полуоси $x \geq 0$ для системы* (1) *с заданными падающими волнами $a_i(s) \in L_\infty(R), i = \overline{1,4}$. Каждое решение допускает в пространстве $L_\infty(R)$ асимптотику:*

$$\psi_i^k(x,t) = b_i^k(t+\xi_i x) + 0(1), \quad x \to +\infty, \ i = 4,5; \ k = \overline{1,4}. \tag{8}$$

Доказательство этой теоремы следует из следующей эквивалентной системы интегральных уравнений и условий (2):

$$\psi_i^p(x,t) = a_i(t+\xi_i x) +$$
$$+ \int_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{6} c_{ij}(y, t+\xi_i(x-y)) \psi_j^p(y, t+\xi_i(x-y))dy \quad i = \overline{1,4}$$

$$\psi_i^p(x,t) = b_i^p(t+\xi_i x) +$$
$$+\int\limits_x^{+\infty} \sum_{j=1}^{6} c_{ij}(y,t+\xi_i(x-y))\psi_j^p(y,t+\xi_i(x-y))dy \quad i=5,6, \tag{9}$$

где $b_5^p(t),\ b_6^p(t), (p=\overline{1,4})$ выражаются через $a_i(t)\ (i=\overline{1,4})$, коэффициенты $c_{ij}(x,t)\ (i,j=\overline{1,6})$ и решений соответственно, — первой, ..., четвертой задач.

Таким образом, можно определить операторы S^k, переводящие $(a_1(s),\cdots a_4(s)) \in L_\infty(R,C^4)$ в $(b_5^k,b_6^k) \in L_\infty(R,C^2)\ k=\overline{1,4}$.

Оператор $S=(S^1,S^2,S^3,S^4)$ называется оператором рассеяния для системы (1) на полуоси, где

$$S^k = \begin{pmatrix} S_{11}^k & S_{12}^k & S_{13}^k & S_{14}^k \\ S_{21}^k & S_{22}^k & S_{23}^k & S_{24}^k \end{pmatrix}, \quad k=\overline{1,4}. \tag{10}$$

2. Интегральные представления решений

Всякое существенно ограниченное решение системы (1) на полуоси можно выразить через их асимптотики (3), т. е. функции a_1,a_2,a_3,a_4,b_5,b_6 через значения решений при $x=0$, т. е. через $\psi_i(0,t)(i=\overline{1,6})$ или через некоторые комбинации этих величин.

С этой целью рассмотрим двенадцать вектор-функций:

$$
\begin{aligned}
&h^1(t) = \{\psi_1(0,t), \psi_2(0,t), \psi_3(0,t), \psi_4(0,t), \psi_5(0,t), \psi_6(0,t)\},\\
&h^2(t) = \{a_1(t), \psi_2(0,t), \psi_3(0,t), \psi_4(0,t), \psi_5(0,t), \psi_6(0,t)\},\\
&h^3(t) = \{a_1(t), a_2(t), \psi_3(0,t), \psi_4(0,t), \psi_5(0,t), \psi_6(0,t)\},\\
&h^4(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), \psi_4(0,t), \psi_5(0,t), \psi_6(0,t)\},\\
&h^5(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t), \psi_5(0,t), \psi_6(0,t)\},\\
&h^6(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t), b_5(t), \psi_6(0,t)\},\\
&h^7(t) = \{a_1(t), a_2(t), a_3(t), a_4(t), b_5(t), b_6(t)\},\\
&h^8(t) = \{\psi_1(0,t), a_2(t), a_3(t), a_4(t), b_5(t), b_6(t)\},\\
&h^9(t) = \{\psi_1(0,t), \psi_2(0,t), a_3(t), a_4(t), b_5(t), b_6(t)\},\\
&h^{10}(t) = \{\psi_1(0,t), \psi_2(0,t), \psi_3(0,t), a_4(t), b_5(t), b_6(t)\},\\
&h^{11}(t) = \{\psi_1(0,t), \psi_2(0,t), \psi_3(0,t), \psi_4(0,t), b_5(t), b_6(t)\},\\
&h^{12}(t) = \{\psi_1(0,t), \psi_2(0,t), \psi_3(0,t), \psi_4(0,t), \psi_5(0,t), b_6(t)\}.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Представление допустимого решения через вектор-функции $h^k(t)$ получаем с помощью следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условию* (2)*. Тогда каждое решение имеет интегральное представление*

$$
\psi_k(x,t) = h_k^1(t+\xi_k x) + \int\limits_{t+\xi_6 x}^{t+\xi_1 x} \sum_{j=1}^{6} R_{kj}^1(x,t,\xi) h_j^1(\xi)\, d\xi, \tag{11_1}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_k(x,t) = {}& h_k^2(t+\xi_k x) + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_1 x} R_{k1}^2(x,t,\xi) h_1^2(\xi)\, d\xi + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_2 x} \sum_{j=2}^{6} R_{kj}^2(x,t,\xi) h_j^2(\xi)\, d\xi,
\end{aligned}
\tag{11_2}
$$

$$\psi_k(x,t) = h_k^3(t+\xi_k x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} R_{k1}^3(x,t,\xi)h_1^3(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_2 x} R_{k2}^3(x,t,\xi)h_2^3(\xi)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_3 x} \sum_{j=3}^{6} R_{kj}^3(x,t,\xi)h_j^3(\xi)d\xi, \qquad (11_3)$$

$$\psi_k(x,t) = h_k^4(t+\xi_k x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{2} R_{kj}^4(x,t,\xi)h_j^4(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_3 x} R_{k3}^4(x,t,\xi)h_3^4(\xi)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_4 x} \sum_{j=4}^{6} R_{kj}^4(x,t,\xi)h_j^4(\xi)d\xi, \qquad (11_4)$$

$$\psi_k(x,t) = h_k^5(t+\xi_k x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{3} R_{kj}^5(x,t,\xi)h_j^5(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_4 x} R_{k4}^5(x,t,\xi)h_4^5(\xi)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_5 x} \sum_{j=5}^{6} R_{kj}^5(x,t,\xi)h_j^5(\xi)d\xi, \qquad (11_5)$$

$$\psi_k(x,t) = h_k^6(t+\xi_k x) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^{4} R_{kj}^6(x,t,\xi)h_j^6(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_5 x} R_{k5}^6(x,t,\xi)h_5^6(\xi)d\xi + \int\limits_{-\infty}^{t+\xi_6 x} R_{k6}^6(x,t,\xi)h_6^6(\xi)d\xi, \qquad (11_6)$$

$$\psi_k(x,t) = h_k^7(t+\xi_k x) + \int\limits_{t+\xi_1 x}^{+\infty} R_{k1}^7(x,t,\xi)h_1^7(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=2}^{5}R_{kj}^{7}(x,t,\xi)h_j^7(\xi)d\xi+\int\limits_{-\infty}^{t+\xi_6 x}R_{k6}^{7}(x,t,\xi)h_6^7(\xi)d\xi, \qquad (11_7)$$

$$\psi_k(x,t)=h_k^8(t+\xi_k x)+\int\limits_{t+\xi_1 x}^{+\infty}R_{k1}^{8}(x,t,\xi)h_1^8(\xi)d\xi+$$

$$\int\limits_{t+\xi_2 x}^{+\infty}R_{k2}^{8}(x,t,\xi)h_2^8(\xi)d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=3}^{6}R_{kj}^{8}(x,t,\xi)h_j^8(\xi)d\xi, \qquad (11_8)$$

$$\psi_k(x,t)=h_k^9(t+\xi_k x)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R_{k1}^{9}(x,t,\xi)h_1^9(\xi)d\xi+\int\limits_{t+\xi_2 x}^{+\infty}R_{k2}^{9}(x,t,\xi)h_2^9(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t+\xi_3 x}^{+\infty}R_{k3}^{9}(x,t,\xi)h_3^9(\xi)d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=4}^{6}R_{kj}^{9}(x,t,\xi)h_j^9(\xi)d\xi, \qquad (11_9)$$

$$\psi_k(x,t)=h_k^{10}(t+\xi_k x)+\int\limits_{t+\xi_3 x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{3}R_{k1}^{10}(x,t,\xi)h_j^{10}(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t+\xi_4 x}^{+\infty}R_{k4}^{10}(x,t,\xi)h_4^{10}(\xi)d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum_{j=5}^{6}R_{kj}^{10}(x,t,\xi)h_j^{10}(\xi)d\xi, \qquad (11_{10})$$

$$\psi_k(x,t)=h_k^{11}(t+\xi_k x)+\int\limits_{t+\xi_4 x}^{+\infty}\sum_{j=1}^{4}R_{kj}^{11}(x,t,\xi)h_j^{11}(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t+\xi_5 x}^{+\infty}R_{k5}^{11}(x,t,\xi)h_5^{11}(\xi)d\xi+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R_{k6}^{11}(x,t,\xi)h_6^{11}(\xi)d\xi, \qquad (11_{11})$$

$$\psi_k(x,t) = h_k^{12}(t+\xi_k x) +$$
$$+ \int\limits_{t+\xi_5 x}^{+\infty} \sum_{j=1}^{5} R_{kj}^{12}(x,t,\xi) h_j^{12}(\xi) d\xi + \int\limits_{t+\xi_6 x}^{+\infty} R_{k6}^{12}(x,t,\xi) h_6^{12}(\xi) d\xi. \qquad (11_{12})$$

Ядра этих преобразований при фиксированном x суммируемы с квадратом по t, x, т. е. являются ядрами Гильберта-Шмидта, однозначно определяются коэффициентами $c_{ij}(x,t)$ системы (1). При произвольных $h^k(t) \in L_\infty(-\infty, +\infty)$ допустимые решения системы (1) выражаются формулами $(11_1) - (11_{12})$. Доказательство леммы аналогично методам работ [3, 5].

3. Свойства решений в нуле

Здесь с помощью интегральных представлений $(11_1 - 11_{12})$ решение в нуле выражается через падающие и рассеянные волны, и тем самым устанавливаются связи между компонентами векторов $h^k(t)$, $(k = 1, 2, \cdots, 12)$ при определенных предположениях.

Лемма 2. *Если* $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = 0$, *то для любого* $a_4(t) \in L_\infty(R)$ *верны следующие равенства:*

$$\begin{cases} \psi_i^1(0,t) = A_{i+}^5 a_4(t), \quad i = 1,2,3, \\ \psi_4^1(0,t) = (I + A_{4+}^5) a_4(t); \end{cases} \qquad (12)$$

$$\begin{cases} \psi_i^2(0,t) = B_{i+}^5 a_4(t), \quad i = 1,2,3, \\ \psi_4^2(0,t) = (I + B_{4+}^5) a_4(t); \end{cases} \qquad (13)$$

$$\begin{cases} \psi_i^3(0,t) = C_{i+}^5 a_4(t), \quad i = 1,2,3, \\ \psi_4^3(0,t) = (I + C_{4+}^5) a_4(t); \end{cases} \qquad (14)$$

$$\begin{cases} \psi_i^4(0,t) = D_{i+}^5 a_4(t), \quad i = 1,2,3, \\ \psi_4^4(0,t) = (I + D_{4+}^5) a_4(t), \end{cases} \qquad (15)$$

где $A_{i+}^5, B_{i+}^5, C_{i+}^5, D_{i+}^5 (i = \overline{1,4})$ *вольтерровые интегральные операторы и выражаются через элементы пятого интегрального представления.*

Доказательство. Из интегрального представления (11_5) для первой задачи при $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = 0$ имеем:

$$\left(I - R^5_{15+}\right)\psi^1_1(0,t) - R^5_{15+}\psi^1_2(0,t) -$$
$$-R^5_{15+}\psi^1_3(0,t) - R^5_{16+}\psi^1_4(0,t) = R^5_{14+}a_4(t),$$

$$-R^5_{25+}\psi^1_1(0,t) + \left(I - R^5_{25+}\right)\psi^1_2(0,t) - R^5_{25+}\psi^1_3(0,t) -$$
$$-R^5_{26+}\psi^1_4(0,t) = R^5_{24+}a_4(t),$$

$$-R^5_{35+}\psi^1_1(0,t) - R^5_{35+}\psi^1_2(0,t) + (I - R^5_{35+})\psi^1_3(0,t) -$$
$$-R^5_{36+}\psi^1_4(0,t) = R^5_{34+}a_4(t),$$

$$-R^5_{45+}\psi^1_1(0,t) - R^5_{45+}\psi^1_2(0,t) - R^5_{45+}\psi^1_3(0,t) +$$
$$+(I - R^5_{46+})\psi^1_4(0,t) = (I + R^5_{44+})a_4(t).$$

Решение этой системы приводит к (12). Остальные формулы (13),(14) и (15) доказываются аналогично.

Лемма 3. *Для любых* $a_i(t) \in L_\infty(R), i = \overline{1,4}$ *выполняются следующие соотношения:*

$$\psi^i_k(0,t) - \psi^j_k(0,t) = r^6_{k+}(b^i_5(t) - b^j_5(t)), \quad k = \overline{1,4},\ i < j,$$

$$\psi^2_4(0,t) - \psi^1_3(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{1+} - r^6_{2+}\right)(b^2_5(t) - b^1_5(t)),$$
$$\psi^3_4(0,t) - \psi^1_2(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{1+} - r^6_{3+}\right)(b^3_5(t) - b^1_5(t)),$$
$$\psi^4_4(0,t) - \psi^1_1(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{2+} - r^6_{3+}\right)(b^4_5(t) - b^1_5(t)),$$
$$\psi^2_2(0,t) - \psi^3_3(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{4+} - r^6_{1+}\right)(b^2_5(t) - b^3_5(t)),$$
$$\psi^4_3(0,t) - \psi^2_1(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{4+} - r^6_{2+}\right)(b^4_5(t) - b^2_5(t)),$$
$$\psi^4_2(0,t) - \psi^3_1(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{4+} - r^6_{3+}\right)(b^4_5(t) - b^3_5(t)), \quad (16)$$

где

$$r^6_{k+} = R^5_{k5+} - R^5_{k6+}(I + r^6_{6+}), k = \overline{1,5},$$
$$I + r^6_{6+} =$$
$$= (I + R^6_{56+} - R^6_{46+} - R^6_{36+} - R^6_{26+} - R^6_{16+})^{-1}\times$$
$$\times(I + R^6_{55+} - R^6_{45+} - R^6_{35+} - R^6_{25+} - R^6_{15+}).$$

Доказательство. Из представлений (11_6) имеем

$$\psi_k^i(0,t)-\psi_k^j(0,t)=$$
$$=R^6_{k5+}(b_5^i(t)-b_5^j(t))+R^6_{k6+}(\psi_6^i(0,t)-\psi_6^j(0,t)),$$
$$i<j, k=\overline{1,4},$$

$$\psi_5^i(0,t)-\psi_5^j(0,t)=$$
$$=(I+R^6_{55+})(b_5^i(t)-b_5^j(t))+R^6_{56+}(\psi_6^i(0,t)-\psi_6^j(0,t)),$$
$$\psi_6^i(0,t)-\psi_6^j(0,t)=\psi_6^i(0,t)-\psi_6^j(0,t). \tag{17}$$

Учитывая граничные условия (4)-(7), имеем

$$\psi_1^k(0,t)+\psi_2^k(0,t)+\psi_3^k(0,t)+\psi_4^k(0,t)=\psi_5^k(0,t)+\psi_6^k(0,t),\ \ (k=\overline{1,4}).$$

Тогда, из (17) получаем

$$(I+R^6_{56+}-R^6_{46+}-R^6_{36+}-R^6_{26+}-R^6_{16+})\left(\psi_6^i(0,t)-\psi_6^j(0,t)\right)=$$
$$=-(I+R^6_{55+}-R^6_{45+}-R^6_{35+}-R^6_{25+}-R^6_{15+})(b_5^i(t)-b_5^j(t))$$

или

$$\psi_6^i(0,t)-\psi_6^j(0,t)=-\left(I+R^6_{56+}-\sum_{k=1}^{4}R^6_{k6+}\right)^{-1}\times$$
$$\times\left(I+R^6_{55+}-\sum_{k=1}^{4}R^6_{k5+}\right)(b_5^i(t)-b_5^j(t))= \tag{18}$$
$$=-\,(I+r^6_{6+})(b_5^i(t)-b_5^j(t)).$$

В результате, из (17) и (18) получим (16).

Лемма 4. *Для любых* $a_i(t)\in L_\infty(R)(i=\overline{1,4})$ *справедливо равенство*

$$b_6^i(t)-b_6^j(t)=-(I+M)(b_5^i(t)-b_5^j(t)),$$
$$i<j,\quad i=1,2,3;\ j=2,3,4, \tag{19}$$

где

$$I+M=\left(I+R^7_{66+}-\sum_{k=1}^{5}R^7_{k6+}\right)^{-1}\left(I+R^7_{65}-\sum_{k=1}^{5}R^7_{k5}\right)\equiv$$
$$\equiv\left(I+R^7_{+}\right)^{-1}\left(I+R^7_{4}\right)=$$
$$=\left(S^k_{14}-S^1_{14}\right)^{-1}\left(S^k_{24}-S^1_{24}\right),\ k=2,3,4. \tag{20}$$

Доказательство. Из представлений (11_7) получаем:

$$\psi^i_k(0,t)-\psi^j_k(0,t)=A^7_{k5}(b^i_5(t)-b^j_5(t))+A^7_{k6+}(b^i_6(t)-b^j_6(t)),k=\overline{1,4},$$

$$\psi^i_5(0,t)-\psi^j_5(0,t)=(I+A^7_{55})(b^i_5(t)-b^j_5(t))+A^7_{56+}(b^i_6(t)-b^j_6(t)),$$

$$\psi^i_6(0,t)-\psi^j_6(0,t)=A^7_{65}(b^i_5(t)-b^j_5(t))+(I+A^7_{66+})(b^i_6(t)-b^7_6(t)).$$

Отсюда, учитывая граничные условия (4)-(7), имеем (19).

Докажем, что оператор M выражается через элементы оператора рассеяния по формуле (20).

Из формулы (18) и из определения оператора рассеяния S

$$\sum_{k=1}^{3}\left(S^i_{2k}-S^j_{2k}\right)a_k(t)=-(I+M)\sum_{k=1}^{3}\left(S^i_{1k}-S^j_{1k}\right)a_k(t).$$

Отсюда, учитывая произвольность $a_k(t)$ $(k=\overline{1,4})$, имеем

$$(I+M)\left(S^i_{1k}-S^j_{1k}\right)=S^i_{2k}-S^j_{2k},\ k=\overline{1,4},i<j,\ i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,4}.$$

Мы позже (теорема 2) докажем, что операторы $S^k_{14}-S^1_{14}$, для $k=\overline{2,4}$ имеют вид:

$S^k_{14}-S^1_{14}=I+G_{k+}$ $(G_{k+}-$ вольтерровский оператор).

Поэтому справедлива формула (20).

Лемма 5.
а) *Если* $b_5^1(t) = b_5^2(t) = b_5^3(t)$, *то решения первой, второй и третьей задач совпадают и* $b_6^1(t) = b_6^2(t) = b_6^3(t)$, *более того*, если $b_6^1(t) = 0$, то

$$\psi_2^k(0,t) = \psi_3^k(0,t) = \psi_4^k(0,t) = \alpha_-^1 b_5^1(t), \tag{21}$$

$$\psi_1^k(0,t) = (I + \beta_-^1) b_5^1(t),\ k = 1,2,3. \tag{22}$$

б) *Если* $b_5^1(t) = b_5^2(t) = b_5^4(t)$, *то решения первой, второй и четвертой задач совпадают и* $b_6^1(t) = b_6^2(t) = b_6^4(t)$, *более того, если* $b_6^2(t) = 0$, *то*

$$\psi_1^k(0,t) = \psi_3^k(0,t) = \psi_4^k(0,t) = \alpha_-^2 b_5^2(t), \tag{23}$$

$$\psi_2^k(0,t) = (I + \beta_-^2) b_5^2(t),\ \ k = 1,2,4. \tag{24}$$

с) *Если* $b_5^1(t) = b_5^3(t) = b_5^4(t)$, *то решения первой, третьей и четвертой задач совпадают и* $b_6^1(t) = b_6^3(t) = b_6^4(t)$, *более того, если* $b_6^3(t) = 0$, *то*

$$\psi_1^k(0,t) = \psi_2^k(0,t) = \psi_4^k(0,t) = \alpha_-^3 b_5^3(t), \tag{25}$$

$$\psi_3^k(0,t) = (I + \beta_-^3) b_5^3(t),\ \ k = 1,3,4. \tag{26}$$

д) *Если* $b_5^2(t) = b_5^3(t) = b_5^4(t)$, *то решения второй, третьей и четвертой задач совпадают и* $b_6^2(t) = b_6^3(t) = b_6^4(t)$, *более того, если* $b_6^4(t) = 0$, *то*

$$\psi_1^k(0,t) = \psi_2^k(0,t) = \psi_3^k(0,t) = \alpha_-^4 b_5^4(t), \tag{27}$$

$$\psi_4^k(0,t) = (I + \beta_-^4) b_5^4(t),\ \ k = 2,3,4, \tag{28}$$

где $\alpha_-^k, \beta_-^k \quad (k = \overline{1,4})$ *выражаются через элементы одиннадцатого интегрального представления.*

Доказательство. Доказательство приведем для случая а), остальные случаи доказываются аналогично.

Из леммы 3 и 4 получим, что $b_6^1(t) = b_6^2(t) = b_6^4(t)$, $\psi_k^1(0,t) = = \psi_k^2(0,t) = \psi_k^3(0,t), k = \overline{1,6}$. Отсюда $\psi_2^1(0,t) = \psi_3^1(0,t) = \psi_4^1(0,t)$.

В силу одиннадцатого представления, учитывая граничные условия и $b_6^1(t) = 0$, имеем

$$\left(I - R_{51-}^{11}\right)\psi_1^1(0,t) + (2\cdot I - R_{52-}^{11} - R_{53-}^{11} - R_{54-}^{11})\psi_2^1(0,t) = \\ = \left(I + R_{55-}^{11}\right)b_5^1(t),$$

$$-R_{61-}^{11}\psi_1^1(0,t) + (I - R_{62-}^{11} - R_{63-}^{11} - R_{64-}^{11})\psi_2^1(0,t) = \\ = R_{65-}^{11} b_5^1(t).$$

Решение этой системы имеет вид (21) и (22), где

$$\begin{pmatrix} I + \beta_-^1 \\ \alpha_-^1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} I - R_{55-}^{11} & 2\cdot I - R_{52-}^{11} - R_{53-}^{11} - R_{54-}^{11} \\ -R_{61-}^{11} & I - R_{62-}^{11} - R_{63-}^{11} - R_{64-}^{11} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I + R_{55-}^{11} \\ R_{65-}^{11} \end{pmatrix}.$$

Лемма 6.
a) *Если* $a_1(t) = 0, \quad b_5^1(t) = b_5^2(t) = b_5^3(t)$, *то*

$$\psi_1^k(0,t) = \gamma_+^1 a_2(t), \tag{29}$$

$$\psi_2^k(0,t) = \psi_3^k(0,t) = \psi_4^k(0,t) = (I + \gamma_+^2)a_2(t), \quad k = 1,2,3. \tag{30}$$

b) *Если* $a_1(t) = 0$, $b_5^1(t) = b_5^2(t) = b_5^4(t)$, *то*

$$\psi_1^k(0,t) = \psi_3^k(0,t) = \psi_4^k(0,t) = \nu_+^1 a_2(t), \tag{31}$$

$$\psi_2^k(0,t) = (I + \nu_+^2)a_2(t), \quad k = 1,2,4, \tag{32}$$

где операторы $\gamma_+^k, \nu_+^k k = 1,2$ *выражаются через элементы третьего интегрального представления.*

Доказательство. Из представлений (11_3) в случае a) получаем:

$$\left(I - R_{15+}^3\right)\psi_1^1(0,t) - (R_{13_+}^3 + R_{14_+}^3 + 2R_{15_+}^3 + R_{16_+}^3)\psi_2^1(0,t) = \\ = R_{12_+}^3 a_2(t),$$

$$-R^3_{25+}\psi^1_1(0,t)+(I-R^3_{23_+}-R^3_{24_+}-2R^3_{25_+}-R^3_{26_+})\psi^1_2(0,t)=$$
$$=\left(I+R^3_{22+}\right)a_2(t).$$

Решение этой системы дает (31) и (32), где

$$\begin{pmatrix}\gamma^1_+\\ \gamma^2_+\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} I-R^3_{15_+} & -(R^3_{13_+}+R^3_{14_+}+2R^3_{15_+}+R^3_{16_+})\\ -R^3_{25_+} & I-R^3_{23_+}-R^3_{24_+}-2R^3_{25_+}-R^3_{26_+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^3_{12_+}\\ I+R^3_{22_+}\end{pmatrix}.$$

Равенства (31),(32) доказываются аналогично.

Лемма 7.

a) *Пусть* $a_1(t)=a_2(t)=0,\ b^1_5(t)=b^2_5(t)$, *то решения первой и второй задач совпадают и*

$$\begin{aligned}&\psi^1_i(0,t)=\psi^2_i(0,t)=m^1_{i+}a_3(t), i=1,2,\\ &\psi^1_3(0,t)=\psi^2_3(0,t)=\psi^1_4(0,t)=\psi^2_4(0,t)=(I+m^1_{3+})a_3(t).\end{aligned}\tag{33}$$

b) *Пусть* $a_1(t)=a_2(t)=0,\ b^1_5(t)=b^3_5(t)$, *то решения первой и третьей задач совпадают и*

$$\begin{aligned}&\psi^1_1(0,t)=\psi^3_1(0,t)=m^2_{1+}a_3(t),\\ &\psi^1_2(0,t)=\psi^3_2(0,t)=\psi^1_4(0,t)=\psi^3_4(0,t)=m^2_{2+}a_3(t),\\ &\psi^1_3(0,t)=\psi^3_3(0,t)=(I+m^2_{3+})a_3(t).\end{aligned}\tag{34}$$

c) *Пусть* $a_1(t)=a_2(t)=0,\ b^1_5(t)=b^4_5(t)$, *то решения первой и четвертой задач совпадают и*

$$\begin{aligned}&\psi^1_1(0,t)=\psi^4_1(0,t)=\psi^1_4(0,t)=\psi^4_4(0,t)=m^3_{1+}a_3(t),\\ &\psi^1_2(0,t)=\psi^4_2(0,t)=m^3_{2+}a_3(t),\\ &\psi^1_3(0,t)=\psi^4_3(0,t)=(I+m^3_{3+})a_3(t).\end{aligned}\tag{35}$$

Доказательство. Доказательство приведем для случая a), остальные доказываются аналогично.

Из леммы 3 получим что решения первой и четвертой задач совпадают, более того, $\psi_3^k(0,t) = \psi_4^k(0,t)$, $k = 1, 2$. В силу четвертого представления

$$\begin{pmatrix} \psi_1^1(0,t) \\ \psi_2^1(0,t) \\ \psi_3^1(0,t) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I - R^4_{15_+} & -(R^4_{14_+} + R^4_{15_+} + R^4_{16_+}) & -R^4_{15_+} \\ -R^4_{25_+} & (I - R^4_{24_+} - R^4_{25_+} - R^4_{26_+}) & -R^4_{25_+} \\ -R^4_{35_+} & -(R^4_{34_+} + R^4_{35_+} + R^4_{36_+}) & I - R^4_{35_+} \end{pmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} R^4_{13_+} \\ R^4_{23_+} \\ I + R^4_{33_+} \end{pmatrix} a_3(t) \equiv \begin{pmatrix} m^2_{1_+} \\ m^2_{2_+} \\ I + m^2_{3_+} \end{pmatrix} a_3(t).$$

Лемма 8. *Пусть* $b_5^1(t) = b_5^2(t) = b_5^3(t) = b_5^4(t)$, *тогда* $b_6^1(t) = b_6^2(t) = b_6^3(t) = b_6^4(t)$, *и*

$$\psi_k^1(0,t) = \psi_k^2(0,t) = \psi_k^3(0,t) = \psi_k^4(0,t) \equiv \alpha(t), k = \overline{1,6},\ k \neq 5$$

$$\begin{gathered} \psi_6^k(0,t) = \alpha(t),\ \psi_5^k(0,t) = 3\alpha(t), \\ \alpha(t) = (I + K_+)a_1(t) \\ \alpha(t) = (I + N_-)b_6^1(t), \end{gathered} \tag{36}$$

где

$$I + K_+ = \left(I - \sum_{\substack{j=2 \\ (j\neq 5)}}^{6} R^2_{1j+} - 3R^2_{15+} \right)^{-1} \left(I + R^2_{11+} \right),$$

$$I + N_- = \left(I - \sum_{\substack{j=1 \\ (j\neq 5)}}^{5} R^{12}_{6j-} - 3R^{12}_{65-} \right)^{-1} \left(I + R^{12}_{66-} \right).$$

Доказательство. Из леммы 4, при $b_5^1(t) = ... = b_5^4(t)$, имеем $b_6^1(t) = ... = = b_6^4(t)$, а из равенств (16) получим $\psi_k^p(0,t) = \alpha(t), k = \overline{1,4}, p = \overline{1,4}$, $\psi_5^k(0,t) = = 3\alpha(t)$, $\psi_6^k(0,t) = \alpha(t)$.

Справедливость равенства (36) следует из представлений (11_2) и (11_{12}).

4. Свойства оператора рассеяния на полуоси

Здесь устанавливаются вольтерровские и факторизационные свойства элементов оператора рассеяния.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям* (2). *Тогда операторы*

$$P_1^k = \begin{pmatrix} S_{21}^k & S_{22}^k & S_{23}^k & S_{24}^k \\ S_{11}^2 - S_{11}^1 & S_{12}^2 - S_{12}^1 & S_{13}^2 - S_{13}^1 & S_{14}^2 - S_{14}^1 \\ S_{11}^3 - S_{11}^1 & S_{12}^3 - S_{12}^1 & S_{13}^3 - S_{13}^1 & S_{14}^3 - S_{14}^1 \\ S_{11}^4 - S_{11}^1 & S_{12}^4 - S_{12}^1 & S_{13}^4 - S_{13}^1 & S_{14}^4 - S_{14}^1 \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,4, \tag{37}$$

$$P_2^k = \begin{pmatrix} S_{21}^k & S_{22}^k & S_{23}^k & S_{24}^k \\ S_{11}^1 - S_{11}^3 & S_{12}^1 - S_{12}^3 & S_{13}^1 - S_{13}^3 & S_{14}^1 - S_{14}^3 \\ S_{11}^2 - S_{11}^3 & S_{12}^2 - S_{12}^3 & S_{13}^2 - S_{13}^3 & S_{14}^2 - S_{14}^3 \\ S_{11}^4 - S_{11}^3 & S_{12}^4 - S_{12}^3 & S_{13}^4 - S_{13}^3 & S_{14}^4 - S_{14}^3 \end{pmatrix}, \quad k = 1,2,3,4, \tag{38}$$

и их главные миноры имеют обратные

$$\left(P_1^k\right)^{-1} = \left\|P_{ij}^{1k}\right\|_{i,j=1}^4, \ \left(P_2^k\right)^{-1} = \left\|P_{ij}^{2k}\right\|_{i,j=1}^4 .$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$S_{14}^2 - S_{14}^1 = I + G_{1+}, \tag{39}$$

$$S_{14}^3 - S_{14}^1 = I + G_{2+}, \tag{40}$$

$$S_{14}^4 - S_{14}^1 = I + G_{3+}, \tag{41}$$

$$S_{21}^k + (I+M)S_{11}^k = (I+R_+)^{-1}(I+R_-), \tag{42}$$

$$S_{2j}^k + (I+M)S_{1j}^k = (I+R_+)^{-1}(I+R_j), k = \overline{1,4}, j = 2,3,4, \tag{43}$$

$$\sum_{i=1}^4 S_{1i}^1 P_{i4}^{1k} = -\left(I+\delta_-^1\right)^{-1}\left(I+\delta_+^1\right), k = 1,2,3, \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^4 S_{1i}^2 P_{i3}^{1k} = -\left(I+\delta_-^2\right)^{-1}\left(I+\delta_+^1\right), \quad k = 1,2,4, \tag{45}$$

$$\sum_{i=1}^4 S_{1i}^3 P_{i2}^{1k} = -\left(I+\delta_-^3\right)^{-1}\left(I+\delta_+^1\right), \quad k = 1,3,4, \tag{46}$$

$$\sum_{i=1}^4 S_{1i}^4 P_{i2}^{2k} = -\left(I+\delta_-^4\right)^{-1}\left(I+\delta_+^1\right), \quad k = 2,3,4, \tag{47}$$

$$P_{11}^{1k} = P_{11}^{2k} = (I+K_+)^{-1}(I+N_-), \quad k = 1,2,3,4, \tag{48}$$

где

$$I + G_{1+} = \left(I + r_{5+}^6 - r_{1+}^6 - r_{2+}^6\right)^{-1}\left(I + B_{4+}^5 - A_{3+}^5\right),$$

$$I + G_{2+} = \left(I + r_{5+}^6 - r_{1+}^6 - r_{3+}^6\right)^{-1}\left(I + C_{4+}^5 - A_{2+}^5\right),$$

$$I + G_{3+} = \left(I + r_{5+}^6 - r_{2+}^6 - r_{3+}^6\right)^{-1}\left(I + D_{4+}^5 - A_{1+}^5\right),$$

$$R_+ = R_{66+}^7 + R_{56+}^7 - \sum_{i=1}^4 R_{i6+}^7, \quad R_- = \sum_{i=1}^4 R_{i1-}^7 - R_{51-}^7 - R_{61-}^7,$$

$$R_k = \sum_{i=1}^4 R_{ik}^7 - R_{5k}^7 - R_{6k}^7 \quad (k = \overline{2,5}),$$

$$\delta_-^k = \beta_-^k - \alpha_-^k,$$

$$\delta_+^k = r_{5+}^6 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{4} r_{i+}^6, \quad k = \overline{1,4}.$$

Доказательство. Обратимость операторов P_1^k и P_2^k $(k = 1,2,3)$ следует из леммы 5 и из представлений (11_{12}), (11_2), (11_3), (11_4), (11_5). Действительно, из этой леммы получаем $\psi(t) \equiv \psi_k^1(0,t) = ... = \psi_k^4(0,t)$, $\; b_6^k(t) = 0 \; (k = \overline{1,4})$. Из (11_2) вытекает, что $\psi(t) \equiv 0$. Аналогично, из представлений (11_2)-(11_5) последовательно имеем, что $a_i(t) = 0$ $(i = \overline{1,4})$. Обратимость главных миноров доказывается аналогично.

Из лемм 2 и 3 вытекает (39)-(41). Действительно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_4^2(0,t) - \psi_3^1(0,t) = \left(I + r_{5+}^6 - r_{1+}^6 - r_{2+}^6\right)(b_5^2(t) - b_5^1(t)), \\ \psi_4^2(0,t) - \psi_3^1(0,t) = (I + B_{4+}^5 - A_{3+}^5)a_4(t). \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_4^3(0,t) - \psi_2^1(0,t) = \left(I + r_{5+}^6 - r_{1+}^6 - r_{3+}^6\right)(b_5^3(t) - b_5^1(t)), \\ \psi_4^3(0,t) - \psi_2^1(0,t) = (I + C_{4+}^5 - A_{2+}^5)(b_5^3(t) - b_5^1(t)), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_4^4(0,t) - \psi_1^1(0,t) = \left(I + r_{5+}^6 - r_{2+}^6 - r_{3+}^6\right)(b_5^4(t) - b_5^1(t)), \\ \psi_4^4(0,t) - \psi_1^1(0,t) = (I + D_{4+}^5 - A_{1+}^5)(b_5^4(t) - b_5^1(t)). \end{array} \right.$$

Отсюда

$$b_5^2(t) - b_5^1(t) = \left(I + r_{5+}^6 - r_{1+}^6 - r_{2+}^6\right)^{-1}(I + B_{4+}^5 - A_{3+}^5)a_4(t) =$$
$$= (I + G_{1+})a_4(t) = (S_{14}^2 - S_{14}^1)a_4(t),$$
$$b_5^3(t) - b_5^1(t) = \left(I + r_{5+}^6 - r_{1+}^6 - r_{3+}^6\right)^{-1}(I + C_{4+}^5 - A_{2+}^5)a_4(t) =$$
$$= (I + G_{2+})a_4(t) = (S_{14}^3 - S_{14}^1)a_4(t),$$
$$b_5^4(t) - b_5^1(t) = \left(I + r_{5+}^6 - r_{2+}^6 - r_{3+}^6\right)^{-1}(I + D_{4+}^5 - A_{1+}^5)a_4(t) =$$
$$= (I + G_{3+})a_4(t) = (S_{14}^4 - S_{14}^1)a_4(t).$$

Докажем равенства (42),(43). Согласно граничным условиям (4)-(7) выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i^k(0,t) = \sum_{i=5}^{6} \psi_i^k(0,t), k = 1,4.$$

Учитывая это в равенстве (11_7), имеем

$$(I+R_-)a_1(t)+\sum_{k=2}^{4}(I+R_k)a_k(t)=(I+R_5)b_5^k(t)+(I+R_+)b_6^k(t).$$

Умножим обе части этого равенства слева на $(I+R_+)^{-1}$. Тогда, учитывая обозначения (20), получим

$$b_6^k(t)+(I+M)b_5^k(t)=(I+R_+)^{-1}\left[(I+R_-)a_1(t)+\sum_{k=2}^{4}(I+R_k)a_k(t)\right].$$

Так как $b_5^k(t)$ и $b_6^k(t)$ имеют вид

$$b_5^k(t)=\sum_{j=1}^{4}S_{1j}^k a_j(t),\quad b_6^k(t)=\sum_{j=1}^{4}S_{2j}^k a_j(t),$$

то для произвольных $a_j(t)\quad(j=\overline{1,4})$ имеем соотношения (42),(43).

Справедливость формул (44)-(47) следует из лемм 3 и 5. Действительно, в случаях a), b), c) и d), соответственно, получаем

$$\begin{cases}\psi_4^1(0,t)-\psi_1^1(0,t)=\left(I+r_{5+}^6-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{4}r_{k+}^6\right)(b_5^4(t)-b_5^1(t)),\\ \psi_4^1(0,t)-\psi_1^1(0,t)=-(I+\beta_-^1-\alpha_-^1)b_5^1(t);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_4^1(0,t)-\psi_2^1(0,t)=\left(I+r_{5+}^6-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{4}r_{k+}^6\right)(b_5^3(t)-b_5^1(t)),\\ \psi_4^1(0,t)-\psi_2^1(0,t)=-(I+\beta_-^2-\alpha_-^2)b_5^2(t);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\psi_4^1(0,t)-\psi_3^1(0,t)=\left(I+r_{5+}^6-\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq 3}}^{4}r_{k+}^6\right)(b_5^2(t)-b_5^1(t)),\\ \psi_4^1(0,t)-\psi_3^1(0,t)=-(I+\beta_-^3-\alpha_-^3)b_5^3(t);\end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_2^3(0,t) - \psi_4^3(0,t) = \left(I + r_{5+}^6 - \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq 4}}^{4} r_{k+}^6 \right) (b_5^1(t) - b_5^3(t)), \\ \psi_2^1(0,t) - \psi_4^3(0,t) = -(I + \beta_-^4 - \alpha_-^4) b_5^4(t). \end{cases}$$

Отсюда

$$b_5^1(t) = -(I + \delta_-^1)^{-1}(I + \delta_+^1) \left(b_5^4(t) - b_5^1(t)\right), \tag{49}$$

$$b_5^2(t) = -(I + \delta_-^2)^{-1}(I + \delta_+^2) \left(b_5^3(t) - b_5^1(t)\right), \tag{50}$$

$$b_5^3(t) = -(I + \delta_-^3)^{-1}(I + \delta_+^3) \left(b_5^2(t) - b_5^1(t)\right), \tag{51}$$

$$b_5^4(t) = -(I + \delta_-^4)^{-1}(I + \delta_+^4) \left(b_5^1(t) - b_5^3(t)\right). \tag{52}$$

Из определений операторов R_1^k и R_2^k в случаях a), b), c), d), соответственно, получаем $a_i(t) = P_{i4}^{1k}(b_5^4(t) - b_5^1(t))$, $a_i(t) = P_{i3}^{1k}\left(b_5^3(t) - b_5^1(t)\right)$, $a_i(t) = P_{i2}^{1k}\left(b_5^2(t) - b_5^1(t)\right)$, $a_i(t) = P_{i2}^{2k}\left(b_5^1(t) - b_5^3(t)\right)$, а из определений S-оператора

$$b_5^k(t) = S_{11}^k a_1(t) + S_{12}^k a_2(t) + S_{13}^k a_3(t) + S_{14}^k a_4(t),\ k = \overline{1,4};\ i = \overline{1,4}.$$

В результате мы получим формулы (44)-(47).

Теперь докажем равенство (48). Справедливость этой формулы следует из леммы 8 и из определений операторов $R_i^k (i = 1,2;\ k = \overline{1,4})$.

5. Обратная задача рассеяния на полуоси

Обратная задача рассеяния для системы (1) состоит в восстановлении коэффициентов уравнений по известному оператору рассеяния S задачи на полуоси.

В этом пункте для системы (1) установлена связь оператора рассеяния S на полуоси с оператором перехода Π, связывающего асимптотику $\{a_1(t), \cdots, a_4(t), b_5(t), b_6(t)\}$, с граничными значениями $\{\psi_1(0,t), \cdots, \psi_6(0,t)\}$ на всей оси с дополнительным условием $c_{ij}(x,t) \equiv 0, x < 0, i, j = 1, 6$.

С этой целью сначала найдем операторы α_-^k, $\beta_-^k(k=\overline{1,4})$ (лемма 5), A_{i+}^4, $B_{i+}^4,(i=\overline{1,4})$ (леммы 2), $\gamma+^k(k=\overline{1,2})$ (лемма 6).

Из теоремы 3 по теории Гохберга-Крейна из факторизационных свойств по оператору рассеяния находятся операторы $R_+, R_-, R_j(j=\overline{2,4})$, δ_-^k ,$\delta_+^k(k=\overline{1,4})$, K_+, N_-.

1. Найдем α_-^1 и β_-^1. В случае а) из представления (11_2), учитывая (21) и (22), получаем, что

$$\left(I-R_{15+}^2\right)\psi_1^1(0,t)=$$
$$=\left(I+R_{11+}^2\right)a_1(t)+\left(\sum_{\substack{j=2\\(j\neq 5)}}^{5}R_{1j+}^2+2R_{15+}^2\right)\psi_2^1(0,t),$$

$$\left(I-R_{15+}^2\right)(I+\beta_-^1)b_5^1(t)=$$
$$=\left(I+R_{11+}^2\right)a_1(t)+\left(\sum_{\substack{j=2\\(j\neq 5)}}^{6}R_{1j+}^2+2R_{15+}^2\right)\alpha_-^1 b_5^1(t)$$

или

$$\left[\left(I-R_{15+}^2\right)(I+\beta_-^1-\alpha_-^1)+\left(I-\sum_{\substack{j=2\\(j\neq 5)}}^{6}R_{1j+}-3R_{15+}^2\right)\alpha_-^1\right]\times$$
$$\times(I+\delta_-^1)^{-1}(I+\delta_+^1)=-(I+R_{11+}^2)P_{14}^{11}.$$

Отсюда

$$\left(I-R_{15+}^2\right)(I+\delta_+^1)+\left(I-\sum_{\substack{j=2\\(j\neq 5)}}^{6}R_{1j+}^2-3R_{15+}^2\right)\alpha_-^1(I+\delta_-^1)^{-1}=$$

$$= -(I + R^2_{11+})P^{11}_{14}(I + \delta^1_+)^{-1}$$

или

$$\left(I - \sum_{\substack{j=2 \\ (j\neq 5)}}^{6} R^2_{1j+} - 3R^2_{15+} \right)^{-1} \left(I - R^2_{15+}\right)(I + \delta^1_+)+$$

$$+\alpha^1_-(I + \delta^1_-)^{-1} = -(I + K_+)P^{11}_{14}(I + \delta^1_+)^{-1}.$$

В результате получим

$$\alpha^1_-(I + \delta^1_-)^{-1} = \left[-(I + K_+)P^{11}_{14}(I + \delta^1_+)^{-1} - I\right]_-$$

или

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^1_- = -\left[(I + K_+)P^{11}_{14}(I + \delta^1_+)^{-1} + I\right]_- (I + \delta^1_-), \\ \beta^1_- = \delta^1_- + \alpha^1_- = \delta^1_- - \left[(I + K_+)P^{11}_{14}(I + \delta^1_+)^{-1} + I\right]_- (I + \delta^1_-). \end{array} \right. \tag{53}$$

Аналогично из представлений (11_2) в случаях в), с) и д) находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^2_- = -[(I + K_+)P^{11}_{13}(I + \delta^2_+)^{-1}]_-(I + \delta^2_-), \\ \beta^2_- = \delta^2_- + \alpha^2_- = \delta^2_- - [(I + K_+)P^{11}_{13}(I + \delta^2_+)^{-1}]_-(I + \delta^2_-), \end{array} \right. \tag{54}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^3_- = -[(I + K_+)P^{11}_{12}(I + \delta^3_+)^{-1}]_-(I + \delta^3_-), \\ \beta^3_- = \delta^3_- + \alpha^3_- = \delta^3_- - [(I + K_+)P^{11}_{12}(I + \delta^3_+)^{-1}]_-(I + \delta^3_-), \end{array} \right. \tag{55}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha^4_- = -[(I + K_+)P^{22}_{12}(I + \delta^4_+)]_-(I + \delta^4_-), \\ \beta^4_- = \delta^4_- + \alpha^4_- = \delta^4_- - [(I + K_+)P^{22}_{12}(I + \delta^4_+)^{-1}]_-(I + \delta^4_-). \end{array} \right. \tag{56}$$

2. Найдем $A^5_{4+}- A^5_{i+}, i = \overline{1,3}, \quad B^5_{4+} - B^5_{3+}, B^5_{3+} - B^5_{2+}, \quad B^5_{3+} - B^5_{1+}$,

$C^5_{4+} - C^5_{2+}$, $C^5_{3+} - C^5_{2+}$, $C^5_{2+} - C^5_{1+}$, $D^5_{4+} - D^5_{1+}$, $D^5_{2+} - D^5_{1+}$, $D^5_{3+} - D^5_{1+}$.

Из формулы (16)

$$\begin{cases} \psi^4_4(0,t) - \psi^1_1(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{3+} - r^6_{2+}\right)(b^4_5(t) - b^1_5(t)), \\ \psi^4_4(0,t) - \psi^1_4(0,t) = r^6_{4+}(b^4_5(t) - b^1_5(t)) \end{cases}$$

или

$$\psi^1_4(0,t) - \psi^1_1(0,t) = (I + \delta^1_+)(b^4_5(t) - b^1_5(t)),$$

а из (12)

$$\psi^1_4(0,t) - \psi^1_1(0,t) = (I + A^5_{4+} - A^5_{1+})a_4(t).$$

В результате

$$I + A^5_{4+} - A^5_{1+} = (I + \delta^1_+)(S^4_{14} - S^1_{14}). \tag{57}$$

Аналогично из (16)

$$\begin{cases} \psi^3_4(0,t) - \psi^1_4(0,t) = r^6_{4+}(b^3_5(t) - b^1_5(t)), \\ \psi^3_4(0,t) - \psi^1_2(0,t) = \left(I + r^6_{5+} - r^6_{1+} - r^6_{3+}\right)(b^3_5(t) - b^1_5(t)). \end{cases}$$

Отсюда

$$\psi^1_4(0,t) - \psi^1_2(0,t) = \left(I + \delta^2_+\right)(b^3_5(t) - b^1_5(t)),$$

а из (12)

$$\psi^1_4(0,t) - \psi^1_2(0,t) = (I + A^5_{4+} - A^5_{2+})a_4(t),$$

т. е.

$$I + A^5_{4+} - A^5_{2+} = \left(I + \delta^2_+\right)(S^3_{14} - S^1_{14}). \tag{58}$$

Аналогично

$$I + A^5_{4+} - A^5_{3+} = \left(I + \delta^3_+\right)(S^2_{14} - S^1_{14}). \tag{59}$$

Из формулы (13), (14), (15) и (16) подобным образом находим

$$I + B^5_{4+} - B^5_{3+} = \left(I + \delta^4_+\right)(S^2_{14} - S^1_{14}), \tag{60}$$

$$B^5_{3+} - B^5_{1+} = \left(I + \delta^1_+\right)(S^4_{14} - S^2_{14}), \tag{61}$$

$$B^5_{3+} - B^5_{2+} = \left(I + \delta^2_+\right)(S^3_{14} - S^2_{14}), \tag{62}$$

$$C^5_{3+} - C^5_{2+} = \left(I + \delta^3_+\right)(S^3_{14} - S^2_{14}), \tag{63}$$

$$C^5_{2+} - C^5_{1+} = \left(I + \delta^1_+\right)(S^4_{14} - S^3_{14}), \tag{64}$$

$$I + C^5_{4+} - C^5_{2+} = \left(I + \delta^4_+\right)(S^3_{14} - S^1_{14}), \tag{65}$$

$$I + D^5_{4+} - D^5_{1+} = \left(I + \delta^4_+\right)(S^4_{14} - S^1_{14}), \tag{66}$$

$$D^5_{2+} - D^5_{1+} = \left(I + \delta^2_+\right)(S^4_{14} - S^3_{14}), \tag{67}$$

$$D^5_{3+} - D^5_{1+} = \left(I + \delta^3_+\right)(S^4_{14} - S^2_{14}). \tag{68}$$

3. Найдем операторы A^4_{i+}, B^4_{i+}. Из представлений (11_{12}), согласно граничным условиям (4), имеем

$$(I - R^{12}_{64-})\psi^1_4(0,t) - (R^{12}_{61-} + R^{12}_{65-})\psi^1_1(0,t) - (R^{12}_{62-} + R^{12}_{65-})\psi^1_2(0,t) -$$

$$-(R^{12}_{63-} + R^{12}_{65-})\psi^1_3(0,t) = (I + R^{12}_{66-})b^1_6(t).$$

Пусть $a_i(t) = 0$, $\ i = 1,2,3$, тогда, учитывая произвольность $a_4(t)$, по лемме 2 получаем

$$\left(I - \sum_{j=1}^{4} R^{12}_{6j-} - 3R^{12}_{65-}\right)\left(I + A^5_{4+}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\left(R^{12}_{6k-} + R^{12}_{65-}\right)\left(I + A^5_{4+} - A^5_{k+}\right) = \left(I + R^{12}_{66-}\right)S^1_{21}.$$

Отсюда

$$A^5_{4+} = (I + N_-)S^1_{21} - I - \sum_{k=1}^{3}\left(I - \sum_{j=1}^{4} R^{12}_{6j-} - 3R^{12}_{65-}\right)^{-1} \times$$

$$\times \left(R^{12}_{6k-} + R^{12}_{65-}\right) \left(I + A^5_{4+} - A^5_{k+}\right).$$

С другой стороны, по лемме 5 в случаях a), в) и c) из представлений (11_{12}) получим

$$\left(I - \sum_{j=1}^{4} R^{12}_{6j-} - 3R^{12}_{65-}\right)^{-1} \left(R^{12}_{6k-} + R^{12}_{65-}\right) = \alpha^k_-(I + \beta^k_- - \alpha^k_-)^{-1} =$$

$$= \alpha^k_- \left(1 + \delta^k_-\right)^{-1}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{69}$$

В результате, учитывая (57), (58) и (59), имеем

$$\begin{aligned} A^5_{4+} =&(I + N_-)S^1_{21} - I - \\ &- \sum_{k=1}^{3} \alpha^k_- \left(I + \delta^k_-\right)^{-1} \left(I + \delta^k_+\right) (S^{5-k}_{14} - S^1_{14}). \end{aligned} \tag{70}$$

Учитывая (57), (58) и (59), также находим $A^5_{i+}, \quad i = 1, 2, 3:$

$$\begin{aligned} A^5_{i+} = &(I + N_-)S^1_{21} - \\ &- \sum_{k=1}^{3} \alpha^k_- \left(I + \delta^k_-\right)^{-1} \left(I + \delta^k_+\right) (S^{5-k}_{14} - S^1_{14}) - \\ &- \left(I + \delta^i_+\right) (S^{5-i}_{14} - S^1_{14}), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{71}$$

Теперь найдём B^5_{i+} $(i = \overline{1, 4})$. Из представлений (11_{12}) согласно граничным условиям (5) при $a_i(t) = 0, \quad (i = 1, 2, 3)$ по лемме 2, получим

$$B^5_{3+} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq 3)}}^{4} \left(I - \sum_{j=1}^{4} R^{12}_{6j-} - 3R^{12}_{65-}\right)^{-1} \left(R^{12}_{6k-} + R^{12}_{65-}\right) \times$$

$$\times \left(B^5_{3+} - B^5_{k+} - \delta_{k4}\right) = (I + N_-)S^2_{21}, \tag{72}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

По лемме 5, в случае д) имеем

$$\left(I-\sum_{j=1}^{4}R^{12}_{6j-}-3R^{12}_{65-}\right)^{-1}\left(R^{12}_{64-}+R^{12}_{65-}\right)= \\ =\alpha^4_-\left(I+\delta^4_-\right)^{-1}. \tag{73}$$

Тогда из (72), учитывая (60), (61), (62), (69) и (72), получим:

$$B^5_{3+}=(I+N_-)S^2_{21}- \\ -\sum_{\substack{k=1\\(k\neq 3)}}^{4}\alpha^k_-\left(I+\delta^k_-\right)^{-1}\left(1+\delta^k_+\right)(S^{5-k}_{14}-S^2_{14}), \tag{74}$$

$$B^5_{i+}=B^5_{3+}+\left(1+\delta^i_+\right)(S^{5-i}_{14}-S^2_{14})-I\delta_{4i}. \tag{75}$$

4. Найдём операторы γ^1_+ и γ^2_+ .

Из лемм 3 и 6 при $a_1(t)=0,\ \ b^1_5(t)=b^2_5(t)=b^3_5(t)$ получаем

$$\begin{gathered}\psi^1_2(0,t)-\psi^1_1(0,t)=\left(I+\delta^1_+\right)(b^4_5(t)-b^1_5(t)),\\ \psi^1_2(0,t)-\psi^1_1(0,t)=\left(I+\gamma^2_+-\gamma^1_+\right)a_2(t).\end{gathered} \tag{76}$$

С другой стороны, при $a_1(t)=0,\ \ b^1_5(t)=b^2_5(t),\ \ b^1_5(t)=b^3_5(t)$ имеет место равенство:

$$\begin{cases}(S^2_{12}-S^1_{12})a_2(t)+(S^2_{13}-S^1_{13})a_3(t)+(S^2_{14}-S^1_{14})a_4(t)=0,\\ (S^3_{12}-S^1_{12})a_2(t)+(S^3_{13}-S^1_{13})a_3(t)+(S^3_{14}-S^1_{14})a_4(t)=0,\\ (S^4_{12}-S^1_{12})a_2(t)+(S^4_{13}-S^1_{13})a_3(t)+(S^4_{14}-S^1_{14})a_4(t)= \\ \qquad\qquad\qquad\qquad =b^4_5(t)-b^1_5(t).\end{cases} \tag{77}$$

Главный минор

$$\overline{P}^1_1=\begin{pmatrix}S^2_{12}-S^1_{12} & S^2_{13}-S^1_{13} & S^2_{14}-S^1_{14}\\ S^3_{12}-S^1_{12} & S^3_{13}-S^1_{13} & S^3_{14}-S^1_{14}\\ S^4_{12}-S^1_{12} & S^4_{13}-S^1_{13} & S^4_{14}-S^1_{14}\end{pmatrix} \tag{77'}$$

имеет обратный $\left(\overline{P}_1^1\right)^{-1} = \left\|\overline{\overline{P}}_{ij}^1\right\|_{i,j=1}^3$. Тогда из (77) $a_2(t) = \overline{\overline{P}}_{13}^1(b_5^4(t) - b_5^1(t))$. Сравнивая последнее равенство с (76), находим

$$I + \gamma_+^2 - \gamma_+^1 = \left(\overline{\overline{P}}_{13}^1\right)^{-1}\left(I + \delta_+^1\right). \tag{78}$$

Из представлений (11_{12}) при $a_1(t) = 0$, $b_4^1(t) = b_4^2(t) = b_4^3(t)$ получаем

$$\left(I - \sum_{j=1}^{4} R_{6j-}^{12} - 3R_{65-}^{12}\right)\left(I + \gamma_+^2\right) +$$
$$+\left(R_{61-}^{12} + R_{65-}^{12}\right)\left(I + \gamma_+^2 - \gamma_+^1\right) = (I + R_{66+}^{12})S_{22}^1.$$

Отсюда

$$\gamma_+^2 = (I + N_-)S_{22}^1 - I - \alpha_-^1\left(I + \delta_-^1\right)^{-1}\left(I + \gamma_+^2 - \gamma_+^1\right)$$

или

$$\gamma_+^2 = (I + N_-)S_{22}^1 - I - \alpha_-^1\left(I + \delta_-^1\right)^{-1}\left(\overline{\overline{P}}_{13}^1\right)^{-1}\left(I + \delta_+^1\right), \tag{79}$$

$$\gamma_+^1 = (I + N_-)S_{22}^1 - \left[I + \alpha_-^1\left(I + \delta_-^1\right)^{-1}\right]\left(\overline{\overline{P}}_{13}^1\right)^{-1}\left(I + \delta_+^1\right). \tag{80}$$

Теорема 3. *Пусть коэффициенты гиперболической системы уравнений первого порядка* (1) *удовлетворяют условиям* (2). *Тогда оператор перехода*

$$\Pi = \begin{pmatrix} I + R_{11-}^7 & R_{12}^7 & ... & R_{15}^7 & R_{16+}^7 \\ R_{21-}^7 & I + R_{22}^7 & ... & R_{25}^7 & R_{26+}^7 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ R_{61-}^7 & R_{62}^7 & ... & R_{65}^7 & I + R_{66+}^7 \end{pmatrix} \tag{81}$$

выражается через элементы операторов $S, R_i^k \quad (i = 1,2; k = 1,2,3)$ *и вольтерровские операторы из факторизационных равенств* (39)-(45).

Доказательство. Пусть S — заданный оператор рассеяния на полуоси. Докажем, что элементы этого оператора однозначно определяются по оператору S. Доказательство проведем по пяти этапам

1. Из формулы (11_7), (12), (13) и (19) при $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = 0$ получим

$$B_{i+}^5 - A_{i+}^5 = \left[R_{i5}^7 - R_{i6+}^7(I+M)\right]\left(S_{14}^2 - S_{14}^1\right), i = \overline{1,4},$$

$$I + \left(B_{4+}^5 + B_{2+}^5 + B_{1+}^5\right) - \left(A_{1+}^5 + A_{2+}^5 + A_{3+}^5\right) =$$
$$= \left[I + R_{55} - R_{56+}^7(I+M)\right]\left(S_{14}^2 - S_{14}^1\right)$$
$$B_{3+}^5 - I - A_{4+}^5 = \left[R_{65}^7 - (I + R_{66+}^7)(I+M)\right]\left(S_{14}^2 - S_{14}^1\right).$$

Учитывая (39), имеем

$$\left\{\begin{array}{l} R_{i5}^7 = R_{i6+}^7(I+M) + f_{i+},\ i = \overline{1,5}, \\ R_{65}^7 = (I + R_{66+}^7)(I+M) - I + f_{6+}, \end{array}\right. \tag{82}$$

где

$$f_{i+} = \left(B_{i+}^5 - A_{i+}^5\right)\left(S_{14}^2 - S_{14}^1\right)^{-1}, i = \overline{1,4}$$
$$f_{5+} = \left[(B_{i+}^5 + B_{2+}^5 + B_{4+}^5) - (A_{1+}^5 + A_{2+}^5 + A_{3+}^5)\right](S_{14}^2 - S_{14}^1)^{-1},$$
$$f_{6+} = -\left(I + A_{4+}^5 - B_{3+}^5\right)(S_{14}^2 - S_{14}^1)^{-1} + I.$$

2. Из формулы (11_7) при $a_1(t) = a_2(t) = a_3(t) = 0$ по лемме 2 и по определению S оператора получим

$$\begin{gathered} I \cdot \delta_{k4} + R_{k4}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{14}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6+}^7\right) S_{24}^1 = \\ = c_k, \quad k = \overline{1,6}, \end{gathered} \tag{83}$$

где

$$c_k = \left(\delta_{k1} + \delta_{k2} + \delta_{k3}\right) A_{k+}^5 + \left(\delta_{k4} + \delta_{k6}\right)\left(I + A_{4+}^5\right) + \delta_{i5}\sum_{j=1}^{3} A_{j+}^5.$$

3. При $a_1(t)=a_2(t)=0,\quad b_5^1(t)=b_5^2(t)=0$ из формулы (11_7), по лемме 7 и по определению S оператора получим

$$\left(S_{13}^2-S_{13}^1\right)a_3(t)+\left(S_{14}^2-S_{14}^1\right)a_4(t)=0$$

или

$$a_4(t)=-\left(S_{14}^2-S_{14}^1\right)^{-1}\left(S_{13}^2-S_{13}^1\right)a_3(t)$$

и

$$\begin{gathered}\left[I\cdot\delta_{k3}+R_{k3}^7+\left(I\cdot\delta_{k5}+R_{k5}^7\right)S_{13}^1+\left(I\cdot\delta_{k6}+R_{k6}^7\right)S_{23}^1\right]a_3(t)+\\+\left[I\cdot\delta_{k4}+R_{k4}^7+\left(I\cdot\delta_{k5}+R_{k5}^7\right)S_{14}^1+\left(I\cdot\delta_{k6}+R_{k6}^7\right)S_{24}^1\right]a_4(t)=\\=\left[\left(\delta_{k1}+\delta_{k2}\right)m_{k+}^1+\left(\delta_{k3}+\delta_{k4}+\delta_{k6}\right)\left(I+m_{3+}^1\right)+\right.\\\left.+\delta_{k5}\left(I+\sum_{j=1}^{3}m_{j+}^1\right)\right]a_3(t),\quad k=\overline{1,6}.\end{gathered}$$

Окончательно имеем

$$I\cdot\delta_{k3}+R_{k3}^7+\left(I\cdot\delta_{k5}+R_{k5}^7\right)S_{13}^1+\left(I\cdot\delta_{k6}+R_{k6}^7\right)S_{23}^1=d_k,\quad(84)$$

где

$$\begin{gathered}d_k=\left(\delta_{k1}+\delta_{k2}\right)m_{k+}^1+\left(\delta_{k3}+\delta_{k4}+\delta_{k6}\right)\left(I+m_{3+}^1\right)+\\+\delta_{k5}\left(I+\sum_{j=1}^{3}m_{j+}^1\right)+c_k\left(S_{14}^2-S_{14}^1\right)^{-1}\left(S_{13}^2-S_{13}^1\right).\end{gathered}$$

4. При $a_1(t)=0,\quad b_5^1(t)=b_5^2(t)=b_5^3(t)$, из формулы (11_7) по лемме 6 и по определению S оператора получим

$$\begin{gathered}\left[I\cdot\delta_{k2}+R_{k2}^7+\left(I\cdot\delta_{k5}+R_{k5}^7\right)S_{12}^1+\left(I\cdot\delta_{k6}+R_{k6}^7\right)S_{22}^1\right]a_2(t)+\\+\left[I\cdot\delta_{k3}+R_{k3}^7+\left(I\cdot\delta_{k5}+R_{k5}^7\right)S_{13}^1+\left(I\cdot\delta_{k6}+R_{k6}^7\right)S_{23}^1\right]a_3(t)+\\+\left[I\cdot\delta_{k4}+R_{k4}^7+\left(I\cdot\delta_{k5}+R_{k5}^7\right)S_{14}^1+\left(I\cdot\delta_{k6}+R_{k6}^7\right)S_{24}^1\right]a_4(t)=\end{gathered}$$

$$= \delta_{k1}\gamma_+^1 + (\delta_{k2} + \delta_{k3} + \delta_{k4} + \delta_{k6})\left(I + \gamma_+^2\right) +$$
$$+\delta_{k5}(\gamma_+^1 + 2\gamma_+^2 + 2I), \quad k = \overline{1,6}.$$

Из (77) мы находим $a_k(t) = \overline{\overline{P}}_{k-1,3}^{11}(b_5^4(t) - b_5^1(t)), k = 2,3,4.$ Тогда, учитывая (83) и (84), имеем

$$I \cdot \delta_{k2} + R_{k2}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{12}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6}^7\right) S_{22}^1 = l_k, \quad (85)$$

где

$$l_k = \delta_{k1}\gamma_+^1 + (\delta_{k2} + \delta_{k3} + \delta_{k4} + \delta_{k6})\left(I + \gamma_+^2\right) + \delta_{k5}(\gamma_+^1 + 2\gamma_+^2 + 2I) -$$
$$-\left[d_k\overline{\overline{P}}_{23}^{11} + c_k\overline{\overline{P}}_{33}^{11}\right]\left(\overline{\overline{P}}_{13}^{11}\right)^{-1}, \quad k = \overline{1,6}.$$

5. Пусть $b_5^1(t) = b_5^2(t) = b_5^3(t) = b_5^4(t)$. Тогда из формулы (11_7) по леммам 7, 8 и по определению оператора S имеем

$$\left[I \cdot \delta_{k1} + R_{k1-}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{11}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6+}^7\right) S_{21}^1\right] a_1(t) +$$
$$+\left[I \cdot \delta_{k2} + R_{k2}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{12}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6+}^7\right) S_{22}^1\right] a_2(t) +$$
$$+\left[I \cdot \delta_{k3} + R_{k3}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{13}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6+}^7\right) S_{23}^1\right] a_3(t) +$$
$$+\left[I \cdot \delta_{k4} + R_{k4}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{14}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6+}^7\right) S_{24}^1\right] a_4(t) =$$
$$= (I + N_-)b_6^1(t), \quad k = \overline{1,6}.$$

Учитывая определение оператора P_1, (83), (84) и (85), получим

$$\left[I \cdot \delta_{k1} + R_{k1-}^7 + \left(I \cdot \delta_{k5} + R_{k5}^7\right) S_{11}^1 + \left(I \cdot \delta_{k6} + R_{k6+}^7\right) S_{21}^1\right] \overline{P}_{11}^{11} =$$
$$= (I + 2I\delta_{5k}N_- - l_k\overline{P}_{21}^{11} - d_k\overline{P}_{31}^{11} - c_k\overline{P}_{41}^{11}, \quad k = \overline{1,6}.$$

Из (82) и (43) имеем:

$$I \cdot \delta_{k1} + R_{k1-}^7 + R_{k6+}^7\left[(I + M)S_{11}^1 + S_{21}^1\right] + (\delta_{k5} + f_{k+} - \delta_{k6+})S_{11}^1 +$$

$$+\delta_{k6}S_{21}^{1}=\left[I(1+2\delta_{5k})+N_{-}-l_k\overline{P}_{21}^{11}-d_k\overline{P}_{31}^{11}-c_k\overline{P}_{41}^{11}\right]\left(\overline{P}_{11}^{11}\right)^{-1}$$

или

$$R_{k1-}^{7}+R_{k6+}^{7}\left(I+R_{+}\right)^{-1}\left(I+R_{-}\right)=g_k,$$

где

$$g_k=\left[I(1+2\delta_{5k})I+N_{-}-l_k\overline{P}_{21}^{11}-d_k\overline{P}_{31}^{11}-c_k\overline{P}_{41}^{11}\right]\left(\overline{P}_{11}^{11}\right)^{-1}-$$

$$-(\delta_{k5}+f_{k+}-\delta_{k6})S_{11}^{1}-\delta_{k6}S_{21}^{1}.$$

Отсюда

$$R_{k1-}^{7}\left(I+R_{-}\right)^{-1}+R_{k6+}^{7}\left(I+R_{+}\right)^{-1}=g_k\left(I+R_{-}\right)^{-1}.$$

С помощью теории Гохберга-Крейна находим

$$R_{k1-}^{7}=\left[g_k\left(I+R_{-}\right)^{-1}\right]_{-}\left(I+R_{-}\right), \tag{86}$$

$$R_{k6+}^{7}=\left[g_k\left(I+R_{-}\right)^{-1}\right]_{+}\left(I+R_{+}\right),\quad k=\overline{1,6}. \tag{87}$$

Из (83), (84) и (85), используя формулы (82), имеем

$$R_{k4}^{7}=-R_{k6+}^{7}\left[(I+M)S_{14}^{1}+S_{24}^{1}\right]+ \tag{88}$$
$$+c_k-I\cdot\delta_{k4}-\delta_{k5}S_{14}^{1}-\delta_{k6}S_{24}^{1},$$

$$R_{k3}^{7}=-R_{k6+}^{7}\left[(I+M)S_{13}^{1}+S_{23}^{1}\right]+ \tag{89}$$
$$+d_k-I\cdot\delta_{k3}-\delta_{k5}S_{13}^{1}-\delta_{k6}S_{23}^{1},$$

$$R_{k2}^{7}=-R_{k6+}^{7}\left[(I+M)S_{12}^{1}+S_{22}^{1}\right]+ \tag{90}$$
$$+l_k-I\cdot\delta_{k2}-\delta_{k5}S_{12}^{1}-\delta_{k6}S_{22}^{1},\ k=\overline{1,6}.$$

Из формул (86), (87), (82), (88), (89) и (90) мы находим оператор П. Теорема доказана.

Известно, что по оператору перехода коэффициенты системы (1) однозначно определяются [3–5]. Поэтому обратная задача рассеяния на полуоси решается однозначно.

Таким образом, получаем следующий результат в обратной задаче рассеяния для системы (1) на полуоси $x \geq 0$.

Теорема 5. *Пусть коэффициенты* $c_{ij}(x,t)(i,j=\overline{1,6})$ *системы уравнений* (1) *удовлетворяют условиям* (2). *Тогда коэффициенты в системе* (1) *однозначно определяются по известному оператору рассеяния* S *на полуоси.*

Алгоритм нахождения коэффициентов системы уравнений (1) *по оператору рассеяния* S *на полуоси заключается в следующем:*

1. По оператору рассеяния S на полуоси с помощью теории факторизации Гохберга-Крейна находятся вольтерровские операторы $I+R_+, I+R_-, I+\delta_-^k$ $(k=\overline{1,4})$, $I+\delta_+^k$ $(k=\overline{1,4})$, K_+, N_-.

2. По элементам операторов S, P_1^k, $P_2^k(k=\overline{1,4})$ и вышеуказанным вольтерровским операторам построим оператор Π.

3. Оператор Π совпадает с оператором рассеяния на всей оси для системы, полученной из системы (1) заменой переменной $x \to -t$, $t \to x$ и нулевым продолжением коэффициентов при $x < 0$. Поэтому здесь применяется алгоритм решения обратной задачи рассеяния на всей оси [3−5].

Список литературы

[1] *Нижник Л.П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. Киев: Наукова думка, 1973, 182 с.

[2] *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. Киев: Наукова думка, 1991, 232 с.

[3] *Нижник Л.П., Тарасов В.Г.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы уравнений // Докл. АН СССР, 1977, т.233, No 3, с. 300-303.

[4] *Нижник Л.П., Искендеров Н.Ш.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы трех уравнений первого порядка на полуоси // Укр. мат. журнал, 1990, т.42 No.7, с. 931-938.

[5] *Искендеров Н.Ш.* Обратная задача рассеяния для гиперболической системы n уравнений первого порядка на полуоси // Укр. мат журнал, 1991, т.43 No.12, с. 1638-1646.

[6] *Искендеров Н.Ш.* Нестационарные обратные задачи рассеяния для системы гиперболических уравнений первого проядка на полуоси. *Баку: Элм,* 2000, 185 с.

[7] *Искендеров Н.Ш., Исмаилов М.И.* Обратная нестационарная задача рассеяния для гиперболической системы четырех уравнений первого порядка на полуоси //Труды ИММ АН Азербайджана, 1996, IV (XII), с. 161-168.

[8] *Ismailov M.I.* Inverse scattering problem for hyperbolic system on a semi-axis in the case of equal number of incident and scattered Waves // Inverse Problems, 2006, 22, p. 955-974.

[9] *Iskenderov N.Sh., Jabbarova K.A.* The inverse scattering problem for the system of five first order hyperbolic equations on semi-axis // Transactions of NASA, 2005, V. XXV, No 7, p. 41-54.

[10] *Мамедов А.А.* Задача рассеяния для системы гиперболических уравнений первого порядка // Вестник Бакинского Университета, 2015, No.1, с. 59-65.

[11] *Sung Y., Fokas A.S.* Inverse problem for $N \times N$ hyperbolic systems on the plane and the N-wave interactions // Commun. Pure. Appl. Math., 1991, 44, p. 535-571.

[12] *Нижник Л.П.* Интегрирование многомерных нелинейных уравнений методом обратной задачи // Успехи мат.наук. 1981, 36, No 4, с. 228.

[13] *Iskenderov N.Sh., Ismailov M.I.* Inverse scattering problem for nonstationary Dirac-type systems on the half-plane // J. Differntial Equatins. 246, 2009, p. 277-290.