Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 240–252

УДК 517.95

А. О. Лопушанський, Г. П. Лопушанська

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів;
alopushanskyj@gmail.com, lhp@ukr.net

Визначення правої частини рівняння дифузії з дробовими похідними

We study the inverse Cauchy problem to a time-space fractional diffusion equation. This problem is to find a time-dependent continuous part of a source and the Cauchy problem's solution, classical in time with values in Bessel potentials spaces.

Досліджено обернену задачу Коші для рівняння дифузії з дробовими похідними. Це задача визначення залежної від часу неперервної компоненти правої частини рівняння і розв'язку задачі Коші, класичного за часом зі значеннями в просторах беселевих потенціалів.

1. Вступ

Еліптичні й параболічні крайові задачі з узагальненими функціями у правих частинах активно вивчаються (див. [1–8] та бібліографію), зокрема, в [6] побудована теорія еліптичних, а в [5]

– параболічних крайових задач у гільбертових шкалах просторів Хермандера-Волєвіча-Панеяха [8, 9] (у гільбертовому випадку простори Хермандера та Волєвіча-Панеяха збігаються), доведено теореми про підвищену регулярність розв'язку у таких просторах. Відомо розширення класів даних, за яких задачі допускають регулярні в області розв'язки (див., наприклад, [2, с. 137–148], [10]).

Умови класичної розв'язності крайових задач для рівняння

$$D_t^{\beta} u(x,t) - a^2 \Delta u(x,t) = F(x,t), \quad a^2 = \mathrm{const} > 0$$

з регуляризованою похідною дробового порядку $\beta \in (0,1)$ одержані в [11 – 13]. Фундаментальні розв'язки рівнянь відіграють важливу роль у вивченні задачі Коші та крайових задач у класах гладких та узагальнених функцій. Деякі зображення, оцінки та інші властивості фундаментальних розв'язків рівнянь із дробовими похідними за часом та функцій Гріна задач Коші для таких рівнянь одержані в [10], [14–23] та інших працях. Використовуючи властивості функції Гріна [17, 18], автор [24] одержав існування і єдиність розв'язку u задачі Коші

$$D_t^{\beta} u + a^2 (-\Delta)^{\alpha/2} u = F_0(x,t), \quad a^2 = \mathrm{const} > 0,$$
$$u(x,0) = F_1(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in (0,T]$$

у класах

$$C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$
$$(\beta \in (0,1), \alpha > \beta, \alpha \neq \beta, s \in \mathbb{R}, p > 1)$$

функцій зі значеннями в просторах беселевих потенціалів [9], неперервних за часом разом із $D_t^{\beta} u, (-\Delta)^{\alpha/2} u$. Тут $(-\Delta)^{\alpha/2}$ визначено за допомогою перетворення Фур'є:

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\alpha/2} \psi] = |\xi|^{\alpha} \mathcal{F}[\psi].$$

У цій роботі вивчаємо обернену задачу Коші визначення залежної від часу неперервної компоненти правої частини такого рівняння при інших заданих у правих частинах функціях із просторів беселевих потенціалів. Зауважимо, що оберненим задачам визначення правих частин рівнянь при регулярних даних присвячено найбільше праць (див. [25, 26] та бібліографію), зокрема, у [27 – 29] у випадку рівняння дифузії з дробовою похідною за часом використана інтегральна умова перевизначення, узагальнення якої пропонуємо у цій праці.

Робота складається з чотирьох пунктів. Пунктом 1 є вступ. У пункті 2 введено позначення та означення, які використовуються в роботі. У пункті 3 одержано основний результат роботи. Заключний пункт 4 містить висновки до роботи.

2. Основні позначення та означення

Надалі вважаємо, що $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T]$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій [30], $S'(\mathbb{R}^n)$ – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $S(\mathbb{R}^n)$.

Нагадаємо, що регуляризована похідна дробового порядку $\beta \in (0,1)$ визначається формулою

$$D_t^\beta v(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{v(x,\tau)}{(t-\tau)^\beta}d\tau - \frac{v(x,0)}{t^\beta}\Big].$$

Позначаємо через $f{*}g$ згортку функцій f та g, через $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{x\to\xi}$ — оператор перетворення Фур'є за просторовими змінними $x \in \mathbb{R}^n$, для $s \in \mathbb{R}$, $p > 1$

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \Big\{v \in S'(\mathbb{R}^n) :$$
$$\|v\|_{s,p} = \big\|\mathcal{F}^{-1}\big[(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}[v]\big]\big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < +\infty\Big\}$$

– простір беселевих потенціалів [9], [32, с. 79],

$$C\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=$$
$$=\Big\{v:\|v\|_{C([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}=\max_{t\in[0,T]}\|v(\cdot,t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}<+\infty\Big\}$$

– простір неперервних функцій $v\colon [0,T]\ni t\longmapsto v(\cdot,t)\in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$C_b\big((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=$$
$$=\Big\{v:\|v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}=\sup_{t\in(0,T]}\|v(\cdot,t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}<+\infty\Big\},$$

$$C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)=$$
$$=\Big\{v\in C\big([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big):D_t^{\beta}v,\Delta v\in C_b\big((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)\Big\}$$

з нормою

$$\|v\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}=\max\Big\{\|v\|_{C([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n))},$$
$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))},\|D_t^{\beta}v\|_{C_b((0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n))}\Big\},$$

$$C^{\alpha,\beta}(\bar{Q})=\Big\{v\in C(\bar{Q}):(-\Delta)^{\alpha/2}v,D_t^{\beta}v\in C(Q)\Big\}.$$

Вивчаємо задачу

$$D_t^{\beta}u+a^2(-\Delta)^{\alpha/2}u=F_0(x)g(t),\ (x,t)\in Q,\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in R^n,\tag{2}$$

$$(u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot))=\Phi(t),\quad t\in[0,T],\tag{3}$$

яка полягає у знаходженні пари функцій (u,g): узагальненого розв'язку u задачі Коші (1), (2), класичного за часом із значеннями в просторах беселевих потенціалів, та $g\in C[0,T]$ за додаткової умови – умови перевизначення (3).

Тут і далі (v, φ_0) – скалярний добуток в $L_2(\mathbb{R}^n)$ елементів $v \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ і $\varphi_0 \in H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (простір $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ можна ототожнити зі спряженим до $H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$ в сенсі такого скалярного добутку [32, с. 80]).

Припущення:
(A) $\beta \in (0,1]$, $\alpha > \beta$, $\theta \in (0,1)$, $1 < p < \frac{1}{1-\beta\theta}$, $s \in \mathbb{R}$, $F_0 \in H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)$, $F_1 \in H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$;
(B) $\Phi, D^\beta\Phi \in C[0,T]$, $\varphi_0 \in H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)$, $(F_0, \varphi_0) \neq 0$.

Означення 1. Пара

$$(u, g) \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \times C[0,T],$$

що задовольняє рівняння (1) і умови (2), (3), називається розв'язком задачі (1)–(3).

Із (2) та (3) випливає умова погодження даних задачі

$$(F_1, \varphi_0) = \Phi(0). \tag{4}$$

3. Розв'язок задачі

Означення 2. Вектор-функцією Гріна задачі (1), (2) називається така вектор-функція $\big(G_0(x,t), G_1(x,t)\big)$, що при достатньо регулярних F_j, $j = 0, 1$ (обмежених, неперервних, які задовольняють умову Гельдера) функція

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_0^t g(\tau)d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0(x-y, t-\tau)F_0(y)g(\tau)dy + \\ + \int_{\mathbb{R}^n} G_1(x-y,t)F_1(y)dy, \ (x,t) \in Q \end{aligned} \tag{5}$$

є класичним (із $C^{\alpha,\beta}(\bar{Q})$) розв'язком цієї задачі.

Нехай

$$(Lv)(x,t) = D_t^{\beta} v(x,t) + a^2(-\Delta)^{\alpha/2} v(x,t), \;\; (x,t) \in Q.$$

З означення вектор-функції Гріна випливає, що

$$G_1(x,t) = \int_0^t f_{1-\beta}(\tau) G_0(x,t-\tau) d\tau, \quad (x,t) \in Q,$$
$$L((gF_0) * G_0)(x,t) = F_0(x) g(t), \quad (x,t) \in Q$$
$$L(F_1 * G_1)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q.$$

Існування вектор-функції Гріна, однозначна розв'язність задачі (1), (2) у просторах типу D' і $C_{\alpha,\beta}\left([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)$ випливає відповідно з результатів [18, 31] та [24].

Теорема 1 ([24])**.** *За припущення* (A) *існує єдиний розв'язок* $u \in C_{\alpha,\beta}\left([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\right)$ *задачі* (1), (2). *Він визначений формулою*

$$\begin{gathered} u(x,t) = \big(F_0(x) g(t)\big) * G_0(x,t) + \\ + F_1(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in \bar{Q} \end{gathered} \tag{6}$$

і правильна нерівність

$$\begin{gathered} \|u\|_{C_{\alpha,\beta}([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n))} \leq \\ \leq b_0 \|g\|_{C[0,T]} \|F_0\|_{H^{s+\alpha\theta,p}(\mathbb{R}^n)} + b_1 \|F_1\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \end{gathered} \tag{7}$$

із додатними сталими b_0, b_1.

Переходимо до дослідження розв'язності оберненої задачі.

З рівняння (1) та умови (3) одержуємо

$$\begin{gathered} D^{\beta} \Phi(t) + a^2 \big((-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big) = \\ = g(t)(F_0, \varphi_0), \quad t \in [0,T]. \end{gathered}$$

Нехай

$$r_u(t) = a^2 \big((-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big).$$

Враховуючи припущення (B), з попередньої тотожності знаходимо функцію

$$g(t) = g_u(t) = \frac{D^\beta \Phi(t) - r_u(t)}{(F_0, \varphi_0)}, \ \ t \in [0,T]. \tag{8}$$

Лема 1. *За припущення* (B) *для всіх*

$$s \in \mathbb{R}, \ \ p > 1, \ \ u \in C\big([0,T]; H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\big)$$

визначена формулою (8) *функція* g_u *неперервна на* $[0,T]$ *і правильна оцінка*

$$|g_u(t)| \leq \frac{C_1 \big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} + C_2}{|(F_0,\varphi_0)|}, \quad t \in [0,T],$$

де $C_1 = C_1(\varphi_0) = \text{const} > 0$, $C_2 = \|D^\beta \Phi\|_{C[0,T]}$.

Доведення. Для всіх $t \in [0,T]$ маємо

$$\begin{gathered} a^2\big|\big((-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot,t), \varphi_0(\cdot)\big)\big| \leq \\ \leq a^2 \|(-\Delta)^{\alpha/2} u(\cdot,t)\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \, \|\varphi_0\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)} = \\ = a^2 \Big\| \mathcal{F}^{-1}\big[|\xi|^\alpha (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}[u(\cdot,t)]\big] \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \big\|\varphi_0\big\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)} \leq \\ \leq C_3 \big\|u(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \big\|\varphi_0\big\|_{H^{-s,p'}(\mathbb{R}^n)} = \\ = C_1 \big\|u(\cdot,t)\big\|_{H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)}, \ \ C_3 = \text{const} > 0, \end{gathered}$$

а тоді одержуємо

$$|r_u(t)| \leq C_1 \big\|u\big\|_{C\left([0,T];H^{s+\alpha,p}(\mathbb{R}^n)\right)} \quad \forall t \in [0,T].$$

Теорема 2. *За припущень* (A), (B) *і* (4) *існує єдиний розв'язок*

$$(u,g) \in C_{\alpha,\beta}\big([0,T]; H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big) \times C[0,T]$$

задачі (2)–(3)*: u визначена формулою*

$$u(x,t) = v_0(x,t) + \\ + \int_0^t F_0(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau)\, \frac{D^\beta \Phi(\tau) - r(\tau)}{(F_0, \varphi_0)} d\tau, \quad (x,t) \in Q, \tag{9}$$

$$g(t) = \frac{D^\beta \Phi(t) - r(t)}{(F_0, \varphi_0)}, \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

де

$$v_0(x,t) = F_1(x) * G_1(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$r(t)$ *– розв'язок рівняння*

$$r(t) + \int_0^t K(t,\tau) r(\tau) d\tau = R(t), \quad t \in [0,T] \tag{11}$$

з інтегровним ядром

$$K(t,\tau) = \frac{a^2\big((-\Delta)^{\alpha/2}\big(F_0(\cdot) * G_0(\cdot, t-\tau)\big), \varphi_0(\cdot)\big)}{(F_0, \varphi_0)},$$

$$R(t) = a^2\big((-\Delta)^{\alpha/2} v_0(\cdot, t), \varphi_0(\cdot)\big) + \\ + \int_0^t K(t,\tau) D^\beta \Phi(\tau) d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Доведення. Підставляючи функцію (10), неперервну за лемою

1, у (6) замість $g(t)$, одержуємо (9). Тоді

$$\begin{gathered}\big((-\Delta)^{\alpha/2}u(x,t),\varphi_0(x)\big) = \\ = \big((-\Delta)^{\alpha/2}v_0(x,t),\varphi_0(x)\big) + \\ + \int\limits_0^t \Big((-\Delta)^{\alpha/2}\big(F_0(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)\big),\varphi_0(x)\Big)\times \\ \times\frac{\big[D^\beta\Phi(\tau)-r(\tau)\big]}{(F_0,\varphi_0)}d\tau,\end{gathered}$$

тобто

$$r(t) = -\int\limits_0^t K(t,\tau)r(\tau)d\tau + R(t),\ t\in[0,T].$$

Одержали лінійне інтегральне рівняння Вольтерри другого роду (11) відносно невідомої $r(t)$. Враховуючи теорему 1 і лему 1, одержуємо, що функція $R\in C[0,T]$ і ядро $K(t,\tau)$ інтегровне. Тому існує єдиний неперервний розв'язок $r(t)$ рівняння (11). Маючи $r(t)$, знаходимо $g\in C[0,T]$ за формулою (10) та $u\in C_{\alpha,\beta}\big([0,T];H^{s,p}(\mathbb{R}^n)\big)$ за формулою (9).

Якщо (u_1,g_1), (u_2,g_2) – два розв'язки задачі (1)–(3), то при $u=u_1-u_2$, $g=g_1-g_2$ маємо задачу

$$\begin{gathered}(Lu)(x,t) = g(t)F_0(x),\quad (x,t)\in Q,\\ u(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R},\\ (u(\cdot,t),\varphi_0(\cdot))=0,\quad t\in[0,T].\end{gathered}$$

Як вище, знаходимо

$$g(t) = -\frac{r(t)}{(F_0,\varphi_0)},\ \ t\in[0,T], \tag{12}$$

$$u(x,t) = -\frac{1}{(F_0,\varphi_0)}\int\limits_0^t F_0(\cdot)*G_0(\cdot,t-\tau)r(\tau)d\tau, \tag{13}$$

де $r(t)$ – розв'язок лінійного однорідного інтегрального рівняння

$$r(t) = -\int\limits_0^t K(t,\tau)r(\tau)d\tau, \quad t \in [0,T].$$

За єдиністю розв'язку цього рівняння $r(t) = 0$, $t \in [0,T]$. Тоді $g(t) = 0$, $t \in [0,T]$ (за формулою (12)) та $u = 0$ в $\bar{Q}$ (згідно з (13)).

4. Висновки

Доведено існування та єдиність розв'язку оберненої задачі Коші для рівняння дифузії з дробовими похідними: розв'язку задачі Коші, класичного за часовою змінною t зі значеннями в усій шкалі просторів беселевих потенціалів, і невідомої, залежної від часу, неперервної компоненти правої частини рівняння.

Література

[1] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[2] *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений — Киев: Наукова думка, 1984. – 284 с.

[3] *Ивасишен С. Д.* Сопряженные операторы Грина и корректная разрешимость параболических граничных задач в негативных пространствах Гельдера // Дифференц. уравн. — 1984. — **20**, № 3. — С. 470–481.

[4] *Лионс Ж.–Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – Москва: Мир, 1971. – 372 с.

[5] *Лось В. М., Мурач О. О.* Параболічні мішані задачі для систем Петровського у просторах узагальненої гладкості // Доп. НАН України. Матем. Природозн. Технічні науки. – 2014. – **10**. – С. 24–32.

[6] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступна як arXiv:1106.3214.)

[7] *Rojtberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions – Dordrecht: Kluver Acad. Publishers, 1996. – xii+415 p.

[8] *Хермандер Э.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. – Москва: Изд. иностр. лит., 1959. – 132 с.

[9] *Волевич Л. Р., Панеях Б. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения // Успехи мат. наук. – 1965. – **20**, № 1. – С. 3–74.

[10] *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser, 2004. – 390 p.

[11] *Pshu A. V.* Уравнения в частных производных дробного порядка. – Москва: Наука, 2005.

[12] *Luchko Yu.* Boundary value problem for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2009. — **12**, № 4. — P. 409–422.

[13] *Meerschaert M. M., Erkan N., Vallaisamy P.* Fractional Cauchy problems on bounded domains // Ann. Probab. — 2009. — **37**. — P. 979–1007.

[14] *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – **26**, № 4. – С. 660–670.

[15] *Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д.* Уравнения одномерной фрактальной диффузии // Доп. НАН України. – 2003. – № 12. – С. 11–16.

[16] *Ворошилов А. А., Килбас А. А.* Условия существования классического решения задачи Коши для дифуззионно-волнового уравнения с частной производной Капуто // Доклады Академии Наук. – 2007. – **414**, № 4. – С. 1–4.

[17] *Anh V. V. and Leonenko N. N.* Spectral analysis of fractional kinetic equations with random datas // J. Statistical Physics. – 2001. – **104**, № 5/6. – P. 1349–1387.

[18] *Duan Jun Sh.* Time- and space-fractional partial differential equations // J. Math. Phis. – 2005. – **46** (013504).

[19] *Baeumer B. and Meerschaert M.* Stochastic solutions for fractional Cauchy problems // Frac. Calc. Appl. Alal. – 2001. – **4**. – P. 481–500.

[20] *Baeumer B., Kurita S., Meerschaert M. M.* Inhomogeneous fractional diffusion equations // Frac. Calc. Appl. Anal. – 2005. – **8**, № 4. – P. 371–381.

[21] *Gorenfio R., Iskenderov A., and Luchko Yu.* Mapping between solutions of fractional diffusion-wave equations // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2000. – **3**. – P. 75–86.

[22] *Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G.* The fundamental solution of the space-time-fractional diffusion equation // Frac. Calc. Appl. Anal. — 2001. — **4**. — P. 153–192 [E-print http://arxiv.org/abs/cond-mat/0702419]

[23] *Metzler R., Nonnenmacher T. F.* Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker-Planck equations, and physical motivation // Chem. Phys. — 2002. — **284**. — P. 67–90.

[24] *Лопушанский А. О.* Задача Коши для уравнения с дробными производными в пространствах бесселевых потенциалов // Сиб. мат. журн. – 2014. – **55**, № 6. – С. 1089–1097.

[25] *Alifanov O. M.* Inverse Heat Transfer Problems. — New York: Wiley, 1994.

[26] *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. – New York–Basel: Marcel Dekker Inc., 2000.

[27] *Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determination condition // Electronic J. of Differential Equations. — 2013. — **2013**, № 270. — P. 1-16. http://ejde.math.txstate.edu/2013/270.

[28] *Ismailov M. I.* Inverse source problem for a time-fractional diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Applied Mathematical Modeling.— 2016. — **40**, № 7/8. — P. 4891-4899.

[29] *Ismailov M. I., Kanca F., Lesnic D.* Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions // Applied Mathematics and Computation. — 2011. — **218**, № 8. — P. 4138–4146.

[30] *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.

[31] *Лопушанська Г. П., Лопушанський А. О.* Задача Коші для рівнянь з дробовими похідними за часовою та просторовими змінними в просторах узагальнених функцій // Укр. матем. журн. — 2012. — **64**, № 8. — С. 1067–1080.

[32] Функциональный анализ. *Под общей ред. С. Г. Крейна.* — Москва: Наука, 1972. – 544 с.