Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 7–20

УДК 517.956.22

А. В. Аноп, О. О. Мурач

Інститут математики НАН України, Київ;
ahlv@ukr.net, murach@imath.kiev.ua

Про локальні аж до межі області властивості гармонічних функцій

For harmonic functions given in a bounded Euclidean domain with smooth boundary, we prove theorems on the local regularity and local *a priory* estimate up to the boundary in the two-sided Sobolev scale.

Для гармонічних функцій, заданих у евклідовій обмеженій області з гладкою межею, доведено теореми про локальну регулярність і локальну апріорну оцінку аж до межі області у двобічній соболєвській шкалі.

1. Вступ

У цій роботі досліджуються локальні властивості гармонічних функцій аж до гладкої межі Γ багатовимірної області Ω, де їх задано. Як добре відомо, властивості гармонічних функцій повністю визначаються їх поведінкою на межі області. Зокрема, оператор, який кожній гармонічній функції з гільбертового соболєвського простору $H^{s}(\Omega)$ ставить у відповідність її слід на Γ, встановлює ізоморфізм між підпростором усіх цих функцій і гільбертовим соболєвським простором $H^{s-1/2}(\Gamma)$ для довільного дійсного $s \in \mathbb{R}$ (див. [1, розд. 2, п. 7.3] і [2, п. 3.3.1]). Звідси негайно випливають твердження про те, що підвищення регулярності на всій межі Γ у соболєвській шкалі сліду гармонічної функції тягне за собою відповідне підвищення гладкості самої функції, а також апріорна оцінка норми гармонічної функції у просторі $H^{s}(\Omega)$ через норму її сліду у просторі $H^{s-1/2}(\Gamma)$.

Мета цієї роботи — довести нові версії цих теорем у випадку, коли гладкість сліду задається лише на частині межі області. Якщо $s > 1/2$, то ці версії є окремим випадком відомих теорем [3 – 5] про відповідні властивості розв'язків $u \in H^{s}(\Omega)$ задачі Діріхле для рівняння Пуассона. У випадку $s \leq 1/2$ таких теорем нема.

До того ж, теореми про локальні властивості (аж до межі області) гармонічних функцій не можна вивести з їх відповідних глобальних властивостей за допомогою стандартного прийому множення розв'язку на зрізаючу нескінченно гладку функцію, бо добуток гармонічної і зрізаючої функції не є, узагалі кажучи, гармонічною функцією. Зважаючи на це, у роботі запропоновано новий підхід, який спирається на теореми Я. А Ройтберга [6, пп. 4.4, 7.2] про розв'язність еліптичних крайових задач і локальне підвищення регулярності їх розв'язків у двобічній шкалі гільбертових просторів Соболєва – Ройтберга.

2. Основні результати

Нехай Ω — довільна обмежена область у евклідовому просторі $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, а її межа $\Gamma := \partial\Omega$ є нескінченно гладким замкненим многовидом вимірності $n-1$. (Як звичайно вважаємо, що нескінченно гладка структура на Γ породжена простором $\mathbb{R}^n$.)

В області Ω розглядаємо крайову задачу Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \tag{1}$$

$$u = g \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{2}$$

Дослідимо властивості розв'язків цієї задачі у двобічній шкалі гільбертових просторів Соболєва. У роботі всі функції та розподіли вважаємо комплекснозначними і тому функціональні простори, що розглядаються, є комплексними.

Нагадаємо означення потрібних нам просторів Соболєва. Нехай $s \in \mathbb{R}$. Позначимо через $H^s(\mathbb{R}^n)$, де ціле $n \geq 1$, гільбертів простір Соболєва порядку s. За означенням, він складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w}$ є функцією, яка локально інтегровна на $\mathbb{R}^n$ за Лебегом і задовольняє умову

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Тут, як звичайно, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ — лінійний топологічний простір усіх повільно зростаючих розподілів на $\mathbb{R}^n$. Простір $H^s(\mathbb{R}^n)$ є гільбертовим відносно норми

$$\|w\|_{s,\mathbb{R}^n} := \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|)^{2s} |\widehat{w}(\xi)|^2 d\xi \Bigr)^{1/2}.$$

За означенням, лінійний простір $H^s(\Omega)$ складається зі звужень в область Ω всіх розподілів $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Цей простір гільбертів відносно норми

$$\|v\|_{s,\Omega} := \inf\bigl\{ \|w\|_{s,\mathbb{R}^n} : w \in H^s(\mathbb{R}^n),\ w = v \text{ в } \Omega \bigr\},$$

де $v \in H^s(\Omega)$.

Коротко кажучи, лінійний простір $H^s(\Gamma)$ утворено усіма розподілами на Γ, які в локальних картах на Γ дають розподіли з простору $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Сформулюємо детальніше означення соболєвського простору $H^s(\Gamma)$. Довільним чином виберемо скінченний атлас із C^∞-структури на многовиді Γ, утворений локальними картами $\alpha_j : \mathbb{R}^{n-1} \leftrightarrow U_j$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$. Тут $\{U_1, \ldots, U_\varkappa\}$ є відкрите покриття многовиду Γ. Окрім того, виберемо функції $\chi_j \in C^\infty(\Gamma)$, де $j = 1, \ldots, \varkappa$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp}\chi_j \subset U_j$. Лінійний простір $H^s(\Gamma)$ складається з усіх розподілів $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $(\chi_j g)\circ\alpha_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ для кожного номера $j \in \{1,\ldots,\varkappa\}$. Тут, як звичайно, $\mathcal{D}'(\Gamma)$ — лінійний топологічний простір усіх розподілів на Γ, а $(\chi_j g)\circ\alpha_j$ — представлення розподілу $\chi_j g$ у локальній карті α_j. Простір $H^s(\Gamma)$ гільбертів відносно норми

$$\|g\|_{s,\Gamma} := \biggl(\sum_{j=1}^{\varkappa}\|(\chi_j g)\circ\alpha_j\|^2_{s,\mathbb{R}^{n-1}}\biggr)^{1/2}.$$

Він з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору атласу і розбиття одиниці на Γ.

Пов'яжемо з рівнянням Лапласа лінійний многовид

$$H^s(\Omega;\Delta) := \bigl\{u \in H^s(\Omega) : \Delta u = 0 \ \text{в} \ \Omega\bigr\},$$

який наділимо нормою з простору $H^s(\Omega)$. Тут і надалі вираз Δu розуміємо у сенсі теорії розподілів в Ω. Цей многовид є повним відносно вказаної норми; у ньому щільна множина

$$C^\infty(\overline{\Omega};\Delta) := \bigl\{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : \Delta u = 0 \ \text{в} \ \Omega\bigr\}$$

(див. [2, п. 3.3.1]). Як відомо [1, розд. 2, теорема 3.2], $H^s(\Omega;\Delta) \subset C^\infty(\Omega)$; отже, простір $H^s(\Omega;\Delta)$ складається з гармонічних функцій. Втім елементи цього простору можуть мати різні неінтегровні особливості на межі Γ, якщо $s<0$.

Пов'яжемо з еліптичною крайовою задачею (1), (2) лінійне відображення

$$u \mapsto u\restriction\Gamma, \quad \text{де} \quad u \in C^\infty(\overline{\Omega};\Delta). \tag{3}$$

Воно продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$R_\Delta : H^s(\Omega;\Delta) \leftrightarrow H^{s-1/2}(\Gamma) \quad \text{для кожного} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Це безпосередньо випливає з результату Ж.-Л. Ліонса і Е. Мадженеса [1, розд. 2, п. 7.3], якщо $s \notin \{1/2 - k : 1 \leq k \in \mathbb{Z}\}$. (Для напівцілих $s < 0$ соболєвські простори в області Ω, використані в [1], відрізняються від $H^s(\Omega)$.) Для довільного $s \in \mathbb{R}$ ізоморфізм (4) є окремим випадком теореми 3.11 з [2] (див також [9]).

Спираючись на ізоморфізм (4), дамо поняття узагальненого розв'язку задачі (1), (2). Позначимо через $\mathcal{S}'(\Omega)$ лінійний простір звужень в Ω усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Зауважимо, що

$$\mathcal{S}'(\Omega) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\Omega) \quad \text{і} \quad \mathcal{D}'(\Gamma) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H^s(\Gamma).$$

Розподіл $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ називаємо узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2), де $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$, якщо $\Delta u = 0$ в Ω (тоді $u \in H^s(\Omega; \Delta)$ для деякого $s \in \mathbb{R}$) і $R_\Delta u = g$ на Γ, де R_Δ — оператор (4). Це означення коректне, бо не залежить від s.

З ізоморфізму (4) негайно випливає такий результат: припустимо, що розподіл $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ є узагальненим розв'язком крайової задачі (1), (2), де $g \in H^{s-1/2}(\Gamma)$ для деякого $s \in \mathbb{R}$; тоді $u \in H^s(\Omega)$. Сформулюємо версію цього результату про умову регулярності розв'язку u в області Ω аж до деякого куска її межі.

Нехай Γ_0 — довільна відкрита непорожня підмножина многовиду Γ. Позначимо через $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_0)$, де $s \in \mathbb{R}$, лінійний простір усіх розподілів $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ таких, що $\chi u \in H^s(\Omega)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega \cup \Gamma_0$. Аналогічно, позначимо через $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$, де $\sigma \in \mathbb{R}$, лінійний простір усіх розподілів $g \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ таких, що $\chi g \in H^\sigma(\Gamma)$ для довільної функції $\chi \in C^\infty(\Gamma)$, яка задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi \subset \Gamma_0$.

Теорема 1. *Нехай $u \in \mathcal{S}'(\Omega)$ є узагальненим розв'язком крайової задачі* (1), (2), *де $g \in H^{s-1/2}_{\mathrm{loc}}(\Gamma_0)$ для деякого $s \in \mathbb{R}$. Тоді $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_0)$.*

Окрім того, прямим наслідком ізоморфізму (4) є така апріорна оцінка узагальненого розв'язку u досліджуваної задачі: нехай довільно вибрано число $s \in \mathbb{R}$; тоді існує число $c = c(s) > 0$ таке, що

$$\|u\|_{s,\Omega} \leq c\,\|g\|_{s-1/2,\Gamma} \quad \text{для кожного} \quad u \in H^{s}(\Omega;\Delta);$$

тут $g := R_{\Delta}u$. Сформулюємо локальну версію цієї оцінки.

Теорема 2. *Нехай довільно вибрано числа $s \in \mathbb{R}$ і $\sigma > 0$, а також функції $\chi, \eta \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, які задовольняють умову $\eta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$. Тоді існує число $c = c(s,\sigma,\chi,\eta) > 0$ таке, що для довільного $u \in H^{s}(\Omega;\Delta)$ виконується оцінка*

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq c\left(\|\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} + \|\eta u\|_{s-\sigma,\Omega}\right), \tag{5}$$

де $g := R_{\Delta}u$ і $\eta_1 := \eta\restriction\Gamma$.

Якщо $s > 1/2$, то теореми 1 і 2 є окремими випадками їх аналогів для рівняння Пуассона. Ці аналоги виводяться за допомогою стандартних міркувань з того факту, що відображення

$$u \mapsto (\Delta u, u\restriction\Gamma), \quad \text{де} \quad u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}), \tag{6}$$

продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$(\Delta, R) : H^{s}(\Omega) \leftrightarrow H^{s-2}(\Omega) \oplus H^{s-1/2}(\Gamma) \tag{7}$$

для кожного $s > 1/2$. В основі цих міркувань лежить прийом множення розв'язку на зрізаючу нескінченно гладку функцію (див., наприклад, [6, п. 7.2]). Якщо $s \leq 1/2$, то цей прийом не можна застосувати, спираючись на ізоморфізм (4), оскільки добуток гармонічної і зрізаючої функції не є гармонічною функцією, узагалі кажучи. Окрім того, у випадку $s \leq 1/2$ не можна скористатися крайовою задачею Діріхле для рівняння Пуассона, оскільки відображення (6) не можна продовжити до лінійного неперервного оператора у парі просторів, що фігурують в (7).

3. Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. Воно, як і доведення теореми 2, спирається на властивості задачі Діріхле для рівняння Пуассона у двобічній шкалі гільбертових просторів Соболєва – Ройтберга $H^{s,(2)}(\Omega)$, де $s \in \mathbb{R}$. Останні (у більш загальній ситуації) введено Я. А. Ройтбергом [7, 8] на основі соболєвських просторів (див. також його монографію [6, п. 2.1]). За означенням, простір $H^{s,(2)}(\Omega)$, де $s \notin \{1/2, 3/2\}$, є поповненням лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{s,(2)} := \bigl(\|u\|^2_{s,(0)} + \|u\upharpoonright\Gamma\|^2_{s-1/2,\Gamma} + \|(\partial_\nu u)\upharpoonright\Gamma\|^2_{s-3/2,\Gamma}\bigr)^{1/2}.$$

Тут ∂_ν — оператор похідної за ортом ν внутрішньої нормалі до межі Γ області Ω, а $\|\cdot\|_{s,(0)}$ — норма у гільбертовому просторі $H^{s,(0)}(\Omega)$, який означається у такий спосіб для довільного $s \in \mathbb{R}$: якщо $s \geq 0$, то $H^{s,(0)}(\Omega) := H^s(\Omega)$, а якщо $s < 0$, то $H^{s,(0)}(\Omega)$ — поповнення $C^\infty(\overline{\Omega})$ за гільбертовою нормою

$$\|u\|_{s,(0)} := \sup\bigl\{\, |(u,v)_\Omega| : \, v \in H^{-s}(\Omega), \, \|v\|_{-s,\Omega} = 1\bigr\}.$$

Тут $(\cdot,\cdot)_\Omega$ — скалярний добуток у гільбертовому просторі $L_2(\Omega)$ усіх функцій, квадратично інтегровних на Ω. У випадку, коли $s \in \{1/2, 3/2\}$, простір $H^{s,(2)}(\Omega)$ означається шляхом інтерполяції з параметром $1/2$ пари гільбертових просторів $H^{s\pm\varepsilon,(2)}(\Omega)$, де $0 < \varepsilon < 1$.

Зауважимо [6, п. 2.1], що при $s > k - 1/2$, де фіксоване $k \in \{0, 2\}$, простори $H^{s,(k)}(\Omega)$ і $H^s(\Omega)$ рівні як поповнення лінійного многовиду $C^\infty(\overline{\Omega})$ за еквівалентними нормами. Окрім того, виконується неперервне вкладення $H^{s,(k)}(\Omega) \hookrightarrow H^{\sigma,(k)}(\Omega)$, якщо $\sigma < s$.

Згідно з [6, теорема 4.1.1] відображення (6) продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$(\Delta, R) : H^{s,(2)}(\Omega) \leftrightarrow H^{s-2,(0)}(\Omega) \oplus H^{s-1/2}(\Gamma) \tag{8}$$

для кожного $s \in \mathbb{R}$. Із сказаного вище випливає, що цей ізоморфізм збігається з (7) у випадку $s > 3/2$.

Покладемо

$$H^{s,(2)}(\Omega;\Delta) := \bigl\{u \in H^{s,(2)}(\Omega) : \Delta u = 0\bigr\};$$

тут Δu як елемент простору $H^{s-2,(0)}(\Omega)$ розуміємо за допомогою оператора (8). Наділимо лінійний простір $H^{s,(2)}(\Omega;\Delta)$ нормою з простору $H^{s,(2)}(\Omega)$. Звуження ізоморфізму (8) на предгільбертів простір $H^{s,(2)}(\Omega;\Delta)$ є ізоморфізмом

$$R_\Delta : H^{s,(2)}(\Omega;\Delta) \leftrightarrow H^{s-1/2}(\Gamma) \tag{9}$$

для кожного $s \in \mathbb{R}$. Звідси випливає повнота цього простору. Окрім того, у ньому щільна множина $C^\infty(\overline{\Omega};\Delta)$, оскільки множина $C^\infty(\Gamma)$ щільна у просторі $H^{s-1/2}(\Gamma)$. Отже, ізоморфізм (9), як і ізоморфізм (4), є продовженням за неперервністю відображення (3). Оскільки вони мають спільну область значень, то простори $H^{s,(2)}(\Omega;\Delta)$ і $H^{s}(\Omega;\Delta)$ рівні як поповнення $C^\infty(\overline{\Omega};\Delta)$ за еквівалентними нормами, й самі ізоморфізми (9) і (4) також рівні як оператори.

Виберемо довільну функцію $\chi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\chi \subset \Omega\cup\Gamma_0$. Розглянемо функцію $\eta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\operatorname{supp}\eta \subset \Omega\cup\Gamma_0$ і $\eta = 1$ у деякому околі V множини $\operatorname{supp}\chi$ (звісно, цей окіл розглядається у топології на $\overline{\Omega}$). За умовою, $u \in H^{\sigma}(\Omega;\Delta)$ для деякого числа $\sigma < s$ і, крім того, $\eta_1 g \in H^{s-1/2}(\Gamma)$, де η_1 — звуження функції η на Γ. Згідно з ізоморфізмом (4) існує розподіл $v \in H^{s}(\Omega;\Delta)$ такий, що $R_\Delta v = \eta_1 g$. Крім того, за умовою, $R_\Delta u = g$. Тому $R_\Delta(u-v) = (1-\eta_1)g$, де $u-v \in H^{\sigma}(\Omega;\Delta)$. Як було показано вище у цьому доведенні, простори $H^{\sigma}(\Omega;\Delta)$ і $H^{\sigma,(2)}(\Omega;\Delta)$ рівні з точністю до еквівалентності норм. Тому елемент $u-v \in H^{\sigma,(2)}(\Omega)$. Він задовольняє рівняння $(\Delta, R)(u-v) = (0,(1-\eta_1)g)$, де (Δ, R) — ізоморфізм (8), у якому замість s узято σ. Оскільки $1-\eta_1 = 0$ на $V\cap\Gamma$ і $\operatorname{supp}\chi \subset V$, то за теоремою Ройтберга [6, теорема 7.2.1] (про локальне підвищення регулярності узагальнених розв'язків еліптичних крайових задач) виконується включення

$$w := \chi(u-v) \in \bigcap_{\lambda \geq 2} H^{\lambda,(2)}(\Omega) = \bigcap_{\lambda \geq 2} H^{\lambda}(\Omega) = C^{\infty}(\overline{\Omega}).$$

Тому

$$\chi u = \chi v + w \in H^{s}(\Omega),$$

бо $v \in H^{s}(\Omega)$. З огляду на довільність нашого вибору функції χ, доведено потрібне включення $u \in H^{s}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Gamma_0)$.

Теорему 1 доведено.

Доведення теореми 2. Спочатку доведемо потрібну оцінку (5) для довільної функції $u \in C^{\infty}(\overline{\Omega}; \Delta)$ у випадку $\sigma = 1$. З ізоморфізму (8) негайно випливає, що

$$\|\chi u\|_{s,(2)} \leq c_0 \bigl(\|\Delta(\chi u)\|_{s-2,(0)} + \|(\chi u)\restriction\Gamma\|_{s-1/2,\Gamma}\bigr), \qquad (10)$$

де c_0 — норма оператора, оберненого до (8). З означення нормованих просторів $H^{s,(0)}(\Omega)$ і $H^{s,(2)}(\Omega)$ випливають нерівності

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq \|\chi u\|_{s,(0)} \leq c_1 \|\chi u\|_{s,(2)}. \qquad (11)$$

Тут c_1 — деяке додатне число, яке не залежить від u і χ.

Пояснимо ці нерівності. Якщо $s \geq 0$, то перша з них перетворюється на рівність. Якщо $s < 0$, то оператор $v \mapsto \mathcal{O}v$, де $v \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, а

$$(\mathcal{O}v)(x) := \begin{cases} v(x), & \text{якщо } x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}, \end{cases}$$

продовжується єдиним чином до ізометричного ізоморфізму

$$\mathcal{O} : H^{s,(0)}(\Omega) \leftrightarrow H^{s}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n)$$

(див. [6, с. 52]). Тут

$$H^{s}_{\overline{\Omega}}(\mathbb{R}^n) := \bigl\{ w \in H^{s}(\mathbb{R}^n) : \operatorname{supp} w \subseteq \overline{\Omega} \,\bigr\}$$

є підпростором простору $H^s(\mathbb{R}^n)$. Тому у випадку $s<0$ виконуються співвідношення

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq \|\mathcal{O}(\chi u)\|_{s,\mathbb{R}^n} = \|\chi u\|_{s,(0)}.$$

Першу нерівність у формулі (11) обґрунтовано.

Друга нерівність, де $c_1 = 1$, є прямим наслідком означення норми у просторі $H^{s,(2)}(\Omega)$ у випадку, коли $s \notin \{1/2, 3/2\}$. У випадку $s \in \{1/2, 3/2\}$ вона виводиться за допомогою інтерполяції пар просторів. А саме, як щойно зазначалося, тотожне відображення на лінійному многовиді $C^\infty(\overline{\Omega})$ продовжується за неперервністю до лінійних обмежених операторів

$$T : H^{s\pm 1/2,(2)}(\Omega) \to H^{s\pm 1/2,(0)}(\Omega). \tag{12}$$

Застосувавши до них інтерполяцію з параметром 1/2, отримаємо обмежений оператор

$$\begin{aligned} T : \bigl[H^{s+1/2,(2)}(\Omega), H^{s-1/2,(2)}(\Omega)\bigr]_{1/2} \to \\ \to \bigl[H^{s+1/2,(0)}(\Omega), H^{s-1/2,(0)}(\Omega)\bigr]_{1/2}; \end{aligned} \tag{13}$$

він є звуженням оператора (12), для якого вибрано знак мінус. Тут вираз $[H_1, H_0]_{1/2}$ позначає гільбертів простір, який отримується інтерполяцію з параметром 1/2 пари гільбертових просторів H_1 і H_0 таких, що виконується неперервне і щільне вкладення $H_1 \hookrightarrow H_0$ (див., наприклад, [1, розд. 1, п. 2.1]). За означенням,

$$H^{s,(2)}(\Omega) := \bigl[H^{s+1/2,(2)}(\Omega), H^{s-1/2,(2)}(\Omega)\bigr]_{1/2}.$$

Окрім того,

$$\begin{aligned} &\bigl[H^{s+1/2,(0)}(\Omega), H^{s-1/2,(0)}(\Omega)\bigr]_{1/2} = \\ &= \bigl[H^{s+1/2}(\Omega), H^{s-1/2}(\Omega)\bigr]_{1/2} = H^s(\Omega) = H^{s,(0)}(\Omega), \end{aligned}$$

причому друга рівність просторів виконується з точністю до еквівалентності норм у них [1, розд. 1, п. 9.1]. Отже, обмежений оператор (13) діє у парі просторів

$$T : H^{s,(2)}(\Omega) \to H^{s,(0)}(\Omega).$$

Звідси негайно випливає у випадку $s \in \{1/2, 3/2\}$ друга нерівність у формулі (11), де c_1 — норма останнього оператора. Отож, формулу (11) обґрунтовано.

Повернемося до оцінки (10). Переставивши місцями оператор Лапласа і оператор множення на функцію χ, запишемо

$$\begin{aligned}\Delta(\chi u) = \Delta(\chi\eta u) = \chi\Delta(\eta u) + \Delta'(\eta u) = \\ = \chi\Delta u + \Delta'(\eta u) = \Delta'(\eta u).\end{aligned} \tag{14}$$

Тут Δ' — деякий диференціальний оператор першого порядку з коефіцієнтами класа $C^\infty(\overline{\Omega})$. На підставі формул (10), (11) і (14) отримаємо оцінку

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq c_2\bigl(\|\Delta'(\eta u)\|_{s-2,(0)} + \|\chi_1 g\|_{s-1/2,\Gamma}\bigr), \tag{15}$$

де $c_2 := \max\{c_0, c_0 c_1\}$ і $\chi_1 := \chi\restriction\Gamma$. Згідно з [6, лема 2.3.1], виконується нерівність

$$\|\Delta'(\eta u)\|_{s-2,(0)} \leq c_3\bigl(\|\eta u\|_{s-1,(0)} + \|(\eta u)\restriction\Gamma\|_{s-3/2,\Gamma}\bigr).$$

Тут c_3 — деяке додатне число, незалежне від u. Підставивши цю нерівність в (15), отримаємо оцінку

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq c_4\bigl(\|\eta u\|_{s-1,(0)} + \|\eta_1 g\|_{s-3/2,\Gamma} + \|\chi_1 g\|_{s-1/2,\Gamma}\bigr),$$

де $c_4 := \max\{c_2 c_3, c_2\}$. Тут

$$\|\chi_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} = \|\chi_1\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} \leq c_5\|\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma},$$

де c_5 — норма оператора множення на функцію χ_1, обмеженого на просторі $H^{s-1/2}(\Gamma)$. Таким чином,

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq c_6\bigl(\|\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} + \|\eta u\|_{s-1,(0)}\bigr); \tag{16}$$

тут число $c_6 := \max\{c_4, c_4(1+c_5)\}$ не залежить від u.

Ця нерівність збігається з потрібною оцінкою (5) у випадку, коли $s \geq 1$ і $\sigma = 1$. Якщо $s < 1$, то

$$\|\eta u\|_{s-1,(0)} \neq \|\eta u\|_{s-1,\Omega}.$$

У цьому випадку міркуємо так: розглянемо функцію $\zeta \in C^\infty(\overline{\Omega})$ таку, що $\zeta = 1$ в околі $\operatorname{supp}\chi$ і $\eta = 1$ у деякому околі V носія функції ζ. Цей окіл можна вибрати так, щоб він був зв'язним, а його межа була нескінченно гладким замкненим многовидом вимірності $n-1$. Для області V означено гільбертів простір $H^{\lambda,(k)}(V)$, де $\lambda \in \mathbb{R}$ і $k \in \{0, 2\}$. Норму у цьому просторі позначимо через $\|\cdot\|_{\lambda,(k),V}$. Оцінка (16) виконується, якщо у ній узяти ζ замість η, тобто

$$\|\chi u\|_{s,\Omega} \leq c_6\bigl(\|\zeta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} + \|\zeta u\|_{s-1,(0)}\bigr), \tag{17}$$

де $\zeta_1 := \zeta \restriction \Gamma$.

Оскільки $s < 1$, то

$$\|\zeta u\|_{s-1,(0)} = \|\mathcal{O}(\zeta u)\|_{s-1,\mathbb{R}^n} = \|(\zeta u)\restriction V\|_{s-1,(0),V} \leq$$
$$\leq c_7\|u\restriction V\|_{s-1,(0),V} \leq c_7\|u\restriction V\|_{s-1,(2),V}.$$

Тут c_7 — норма оператора множення на функцію $\zeta \restriction V$, обмеженого на просторі $H^{s-1,(0)}(V)$. Як було показано у доведенні теореми 1, норми у просторах $H^{s,(2)}(V)$ і $H^s(V)$ еквівалентні на класі всіх гармонічних в області V функцій $v \in C^\infty(\Omega)$. Тому

$$\|u\restriction V\|_{s-1,(2),V} \leq c_8\|u\restriction V\|_{s-1,V} =$$
$$= c_8\|(\eta u)\restriction V\|_{s-1,V} \leq c_8\|\eta u\|_{s-1,\Omega},$$

де c_8 — деяка додатна стала, незалежна від u. Отже,

$$\|\zeta u\|_{s-1,(0)} \leq c_7 c_8\|\eta u\|_{s-1,\Omega}. \tag{18}$$

Окрім того,

$$\|\zeta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} = \|\zeta_1\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma} \leq c_9\|\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma}, \tag{19}$$

де c_9 — норма оператора множення на функцію ζ_1, обмеженого на просторі $H^{s-1/2}(\Gamma)$. Нерівності (17) – (19) негайно тягнуть за собою потрібну оцінку (5) у випадку, коли $s<1$ і $\sigma=1$.

Таким чином, цю оцінку доведено на класі усіх функцій $u\in C^{\infty}(\overline{\Omega};\Delta)$ для довільного $s\in\mathbb{R}$ у випадку $\sigma=1$. Для довільного розподілу $u\in H^{s}(\Omega;\Delta)$ вона доводиться у цьому випадку граничним переходом. А саме, нехай послідовність $(u_j)_{j=1}^{\infty}\subset C^{\infty}(\overline{\Omega};\Delta)$ така, що $u_j\to u$ у просторі $H^{s}(\Omega;\Delta)$ при $j\to\infty$. За доведеним,

$$\|\chi u_j\|_{s,\Omega}\leq c\left(\|\eta_1 g_j\|_{s-1/2,\Gamma}+\|\eta u_j\|_{s-1,\Omega}\right) \tag{20}$$

для кожного номера $j\geq 1$, де $g_j:=R_{\Delta}u_j$. Тут $\chi u_j\to\chi u$ в $H^{s}(\Omega)$. Окрім того, $g_j:=R_{\Delta}u_j\to R_{\Delta}u=g$ у просторі $H^{s-1/2}(\Gamma)$ на підставі ізоморфізму (4); звідси $\eta_1 g_j\to\eta_1 g$ у тому ж просторі. До того ж, оскільки простір $H^{s}(\Omega)$ неперервно вкладається у простір $H^{s-1}(\Omega)$, то $u_j\to u$ в $H^{s-1}(\Omega)$ і тому $\eta u_j\to\eta u$ в $H^{s-1}(\Omega)$. Отже, перейшовши у нерівності до границі, коли $j\to\infty$, отримаємо потрібну оцінку (5) для довільного розподілу $u\in H^{s}(\Omega;\Delta)$ у випадку $\sigma=1$.

З цього випадку оцінка (5) виводиться для довільного цілого $\sigma\geq 1$ за допомогою індукції за номером σ. А саме, припустимо, що оцінка (5) правильна для деякого цілого $\sigma\geq 1$ при довільному виборі зазначених у теоремі 1 функцій χ та η. Доведемо цю оцінку для наступного номера $\sigma+1$. Нехай функція ζ така як і раніше у доведенні. Скориставшись індуктивним припущенням, у якому замість η беремо ζ, та теоремою 2, доведеною у випадку $\sigma=1$, отримаємо для довільного $u\in H^{s}(\Omega;\Delta)$ такі нерівності:

$$\|\chi u\|_{s,\Omega}\leq c\left(\|\zeta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma}+\|\zeta u\|_{s-\sigma,\Omega}\right),$$
$$\|\zeta u\|_{s-\sigma,\Omega}\leq c\left(\|\eta_1 g\|_{s-\sigma-1/2,\Gamma}+\|\eta u\|_{s-\sigma-1,\Omega}\right).$$

Звідси на підставі формули (19) і нерівності

$$\|\eta_1 g\|_{s-\sigma-1/2,\Gamma}\leq\|\eta_1 g\|_{s-1/2,\Gamma}$$

негайно випливає оцінка (5) для параметра $\sigma + 1$, узятого замість σ.

Отже, оцінку (5) доведено для довільного цілого $\sigma \geq 1$. Звідси вона негайно випливає для довільного дійсного $\sigma > 0$.

Теорему 2 доведено.

Література

[1] *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[2] *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter, 2014. – xii+297 p. (Видання російською доступне як arXiv:1106.3214.)

[3] *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 800 с.

[4] *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.

[5] *Егоров Ю. В.* Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – М.: Наука, 1984. – 360 с.

[6] *Roitberg Ya. A.* Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1996. – xii+415 p.

[7] *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798–801.

[8] *Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 122–129.

[9] *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Регулярная эллиптическая граничная задача для однородного уравнения в двусторонней уточненной шкале пространств // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, 11. – С. 1536–1555.