Збірник праць Ін-ту математики НАН України 2017, т. 14, № 3, 114–127

УДК 517.926.7, 517.956.222

Т. Зінченко

Національний університет "Чернігівський колегіум" імені Т. Г. Шевченка, Чернігів; zinchenkotat@ukr.net

Розширена соболєвська шкала над векторними розшаруваннями

We introduce an extended Sobolev scale over vector bundles on smooth closed manifolds and investigate its interpolation properties. This scale is built on the base of the inner product Hörmander spaces whose order of regularity is given by an arbitrary positive function RO-varying at infinity. We prove that every space belonging to the scale introduced is obtained by the interpolation with a function parameter between certain Sobolev spaces over the vector bundle. We show that this space does not depend (up to equivalence of norms) on the choice of local charts on manifold and local trivializations of the bundle.

Уведено розширену соболєвську шкалу на векторних розшаруваннях на гладких многовидах і досліджено її інтерполяційні властивості. Цю шкалу побудовано на основі гільбертових просторів Хермандера, для яких показник регулярності задано за допомогою довільної додатної функції, RO-змінної на нескінченності. Доведено, що будь-який простір, приналежний уведеній шкалі, отримується інтерполяцією з функціональним параметром пари соболєвських просторів на векторному розшаруванні. Показано, що цей простір (з точністю до еквівалентності норм) не залежить від вибору локальних карт на многовиді та локальних тривіалізацій розшарування.

1. Вступ. Розширена соболєвська шкала на $\mathbb{R}^n$ та на многовидах була введена та досліджена раніше в [7, 20, 19, 24, 6]. Для цих просторів індексом гладкості φ служить довільна радіальна функція, RO-змінна на нескінченності за В. Г. Авакумовичем. Ця шкала складається з просторів $B_{2,\varphi} = H^{\varphi}$, які є гільбертовим ізотропним випадком просторів, введених Л. Хермандером [2, п. 2.2] та Л. Р. Волевичем і Б. П. Панеяхом [12, § 2]. Вказана шкала на $\mathbb{R}^n$ має важливі властивісті: вона отримується шляхом інтерполяції з функціональним параметром пар гільбертових просторів Соболєва, складається з усіх гільбертових просторів, інтерполяційних відносно гільбертової соболєвської шкали та ця шкала є замкнена відносно цієї інтерполяції.

Ці властивості інтерполяції дозволили Михайлецю та Мурачу [8, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 9] побудувати теорію розв'язності загальних еліптичних систем і еліптичних крайових задач. Їх теорія [6] доповнена в [18, 19, 20, 25, 21, 22, 23].

В сучасній теорії еліптичних рівнянь досліджуються еліптичні системи, задані в векторних розшаруваннях на многовидах, тому є інтерес введення та дослідження аналога розширеної соболєвськой шкали на таких розшаруваннях. В цій роботі вводиться така шкала та доводиться, що вона отримується інтерполяцією з функціональним параметром пар соболєвських просторів та з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору локальних карт, що покривають даний многовид, ні від розбиття одиниці цього многовиду, ні від вибору локальних тривіалізацій. Відмітимо, що ця шкала містить уточнену соболєвську шкалу, введену та досліджену на векторних розшаруваннях в [3].

2. Розширена соболєвська шкала. Нагадаємо спочатку означення цієї шкали на $\mathbb{R}^n$ [6, п. 2.4]. Ці простори параметризуються функціями $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Нехай RO — множина всіх вимірних за Борелем функцій $\varphi : [1,\infty) \to (0,\infty)$, для яких існують числа $a > 1$ і $c \geq 1$ такі, що

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \quad \text{для будь-яких} \quad t \geq 1 \quad \text{і} \quad \lambda \in [1, a] \qquad (1)$$

(постійні a і c залежні від $\varphi \in \mathrm{RO}$). Такі функції називають RO (або OR)-змінні на нескінченності. Клас RO-змінних функцій введен В. Г. Авакумовичем в 1936 р. і достатньо повно вивчений (див. наприклад, [5] (додаток 1)).

Клас функцій RO допускає інтегральний опис

$$\varphi \in \mathrm{RO} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(t) = \exp\biggl(\beta(t) + \int_1^t \frac{\gamma(\tau)}{\tau}\, d\tau\biggr), \ \ t \geq 1,$$

де дійсні функції β та γ є вимірними за Борелем та обмежені на $[1, \infty)$. Відмітимо, що умова (1) еквівалентна нерівності

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c\lambda^{s_1} \quad \text{для будь-яких} \quad t \geq 1 \quad \text{та} \quad \lambda \geq 1, \tag{2}$$

в якій постійна $c \geq 1$ залежить від t та λ. Для функції $\varphi \in \mathrm{RO}$ означено скінчені нижній та верхній індекси Матушевської:

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R} : \text{правильна ліва нерівність в (2)}\},$$
$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R} : \text{правильна права нерівність в (2)}\}.$$

Розглянемо необхідні нам простори спочатку на $\mathbb{R}^n$, а потім над векторними розшаруваннями.

Позначимо через $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ лінійний простір всіх розподілів $w \in \mathcal{S}'$ таких, що їх перетворення Фур'є $\widehat{w} := \mathcal{F}w$ локально сумовне за Лебегом в $\mathbb{R}^n$ і задовольняє умові

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, |\widehat{w}(\xi)|^2\, d\xi < \infty.$$

Тут, як звичайно, $\mathcal{S}'$ — лінійний топологічний простір Шварца повільно зростаючих комплекснозначних розподілів, заданих в $\mathbb{R}^n$, а $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ — згладжений модуль вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$. З точки зору застосувань до диференціальних рівнянь нам зручно трактувати розподіл як *анти*лінійні функціонали на просторі $\mathcal{S}$ основних функцій.

В просторі $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ визначено скалярний добуток розподілів w_1, w_2 за формулою

$$(w_1, w_2)_{\varphi} := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{w_1}(\xi)\, \overline{\widehat{w_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Він задає на $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ структуру гільбертового простору і визначає норму $\|w\|_{\varphi} := (w, w)_{\varphi}^{1/2}$. Цей простір сепарабельний; в ньому щільна множина C_0^{∞} нескінченно диференційованих функцій на $\mathbb{R}^n$, в якій носій компактні.

Якщо $\varphi(t) = t^s$ для всіх $t \geq 1$ при деякому $s \in \mathbb{R}$, то $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) =: H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ є (гільбертовий) простір Соболєва порядку s.

В загальному випадку ми маємо неперервні вкладення

$$\begin{gathered} H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \\ \text{для всіх чисел} \quad s_1 > \sigma_1(\varphi), \;\; s_0 < \sigma_0(\varphi). \end{gathered} \tag{3}$$

Згідно з [6, 19] називаємо клас функціональних просторів

$$\{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) : \varphi \in \mathrm{RO}\} \tag{4}$$

розширеною соболєвською шкалою на $\mathbb{R}^n$.

На основі шкали (4) введемо розширену собелевську шкалу на векторних розшаруваннях.

Нехай Γ — довільний замкнений нескінченно гладкий многовид вимірності $n \geq 1$. Припускаємо, що на Γ задана деяка C^{∞}-щільність dx. Виберемо довільний скінченний атлас із C^{∞}-структури на Γ, утворений локальними картами $\alpha_j : \mathbb{R}^n \leftrightarrow \Gamma_j$, $j = 1, \ldots, p$, де відкриті множини Γ_j складають покриття многовиду Γ. Ці множини вибираємо таким чином, щоб локальні тривіалізації $\beta_j : \pi^{-1}(\Gamma_j) \leftrightarrow \Gamma_j \times \mathbb{C}^p$ були визначені. Виберемо також функції $\chi_j \in C^{\infty}(\Gamma)$, $j = 1, \ldots, p$, які утворюють розбиття одиниці на Γ, що задовольняє умову $\operatorname{supp} \chi_j \subset \Gamma_j$.

Нехай $\pi : V \to \Gamma$ — нескінченно гладке комплексне векторне розшарування рангу $p \geq 1$ на Γ. Тут V це тотальний простір розшарування, Γ є базою, і π є проектором (див., наприклад, [1, Розділ I, п. 2]). Покладемо $\mathcal{D}'(\Gamma, V)$ визначає простір, що складається з розподілів

$$u := \{u_j := (u_{j,1}, \dots, u_{j,p}) \in (\mathcal{D}'(\Gamma_j))^p,\ j\ \in\ \{1,\ \dots,\ \varkappa\}\}$$

таких, що

$$u_l = \Pi(\beta_l \circ \beta_j^{-1})(x, u_j(x)) := \beta_{l,j} u_j$$

для кожного $j, l \in 1, \dots, \varkappa$. Тут, $\beta_{l,j}(x) u_j = \Pi(\beta_l \circ \beta_j^{-1})(x, u_j(x))$ для $x \in \Gamma_j \cap \Gamma_l$ и кожна функція $u_{j,p} \in \mathcal{D}'(\Gamma_j)$.

Лінійний простір $H^\varphi(\Gamma, V)$ складається з усіх розподілів $u \in \mathcal{D}'(\Gamma, V)$ таких, що $(\chi_j u_j) \circ \alpha_j \in (H^\varphi(\mathbb{R}^n))^p$ для кожного $j \in \{1, \dots, p\}$. Тут

$$(\chi_j u_j) \circ \alpha_j = ((\chi_j u_{j1}) \circ \alpha_j, \dots, (\chi_j u_{jp}) \circ \alpha_j) \in (\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n))^p.$$

Ці простори з точність до еквівалентності норм не залежать від вибору атласу $\{\alpha_j\}$, розбиття одиниці $\{\chi_j\}$ та локальних тривіалізацій $\{\beta_j\}$. Цей результат буде доведено в Теоремі 2. За аналогією до (4) ми назвемо клас гільбертових функціональних просторів

$$\{H^\varphi(\Gamma, V) : \varphi \in \mathrm{RO}\} \tag{5}$$

розширеною соболєвською шкалою над розшаруванням $\pi:\ V\ \to\ \Gamma$.

Норма в просторі $H^\varphi(\Gamma, V)$ задається формулою

$$\|u\|^2_{H^\varphi(\Gamma,V)} = \sum_{j=1}^{\varkappa} \|(\chi_j u_j) \circ \alpha_j\|^2_{(H^\varphi(\mathbb{R}^n))^p} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\varkappa} \sum_{k=1}^{p} \|(\chi_j u_{j,k}) \circ \alpha_j\|^2_{H^\varphi(\mathbb{R}^n)}.$$

Якщо $\varphi(t) = t^s$ для $t \geq 1$ та $s \in \mathbb{R}$, тоді отримаємо, що простір $H^\varphi(\Gamma, V)$ є простором соболєва $H^s(\Gamma, V)$ порядку s (див. наприклад, [1, Розділ IV, п. 1]).

У випадку тривіального векторного розшарування рангу $p = 1$, простір $H^{\varphi}(\Gamma, V)$ складається з усіх розподілів на Γ і позначається $H^{\varphi}(\Gamma)$. Простір $H^{\varphi}(\Gamma)$ був представлений та досліджений Михайлецем та Мурачем [11, 4].

3. Інтерполяція з функціональним параметром. Розширена шкала соболєва на векторному розшаруванні $\pi : V \to \Gamma$ має важливу властивість інтерполяції. А саме, кожен простір $H^{\varphi}(\Gamma, V)$, де $\varphi \in \mathrm{RO}$, є результатом інтерполяції з відповідним функціональним параметром між соболєвськими просторами $H^{(s_0)}(\Gamma, V)$ та $H^{(s_1)}(\Gamma, V)$, де $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ та $s_0 < s_1$. Ми будемо використовувати цю властивість у роботі. Тому ми нагадуємо визначення інтерполяції з функціональний параметр між гільбертовими просторами та деякі її властивості. Ми обмежуємося випадком сепарабельних комплексних гільбертових просторів і в основному слідуємо монографії [6, п. 1.1].

Нехай задана впорядкована пара $X := [X_0, X_1]$ сепарабельних комплексних гільбертових просторів X_0 і X_1 така, що виконується неперервне і щільне вкладення $X_1 \hookrightarrow X_0$. Пару X називаємо допустимою. Для неї існує ізометричний ізоморфізм $J : X_1 \leftrightarrow X_0$ такий, що J — самоспряжений додатно визначений оператор в просторі X_0 з областю визначення X_1. Оператор J визначається парою X однозначно; він називається породжуючим для X.

Позначимо через $\mathcal{B}$ множину всіх вимірних за Борелем функцій $\psi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, які відокремлені від нуля на кожній множині $[r, \infty)$ і обмежені на кожному відрізку $[a, b]$, де $r > 0$ і $0 < a < b < \infty$.

Нехай $\psi \in \mathcal{B}$. В просторі X_0 визначено, як функція від J, оператор $\psi(J)$. Позначимо через $[X_0, X_1]_{\psi}$ або, коротше, X_{ψ} область визначення оператора $\psi(J)$, наділена скалярним добутком $(w_1, w_2)_{X_{\psi}} := (\psi(J)w_1, \psi(J)w_2)_{X_0}$ і відповідною нормою $\|w\|_{X_{\psi}} = (w, w)_{X_{\psi}}^{1/2}$. Простір X_{ψ} гільбертів і сепарабельний, причому виконується неперервне і щільне вкладення $X_{\psi} \hookrightarrow X_0$.

Функцію $\psi \in \mathcal{B}$ називаємо інтерполяційним параметром, якщо для довільних допустимих пар $X = [X_0, X_1]$, $Y = [Y_0, Y_1]$ гільбертових просторів і для будь-якого лінійного відображення T, заданного на X_0, виконується наступне. Якщо при кожному $j \in \{0,1\}$ звужені відображення T на простір X_j є обмеженим оператором $T : X_j \to Y_j$, то і звуження відображення T на простір X_ψ є обмеженим оператором $T : X_\psi \to Y_\psi$. Тоді будемо говорити, що простір X_ψ отримано інтерполяцією з функціональним параметром ψ пари X.

У випадку, коли допустима пара складається з соболєвських просторів, нам знадобиться наступний факт [6] (п. 2.4.2, теорема 2.19).

Твердження 1. *Нехай задані функція $\varphi \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа s_0, s_1 такі, що $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ і $s_0 < \sigma_0(\varphi)$. Покладемо*

$$\psi(t) := \begin{cases} t^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\varphi(t^{1/(s_1-s_0)}) & \textit{при} \quad t \geq 1, \\ \varphi(1) & \textit{при} \quad 0 < t < 1. \end{cases} \tag{6}$$

Тоді функція $\psi \in \mathcal{B}$ є інтерполяційним параметром і

$$H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) = [H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]_\psi \tag{7}$$

з еквівалентністю норм.

В доведеннях нам доведеться інтерполювати ортогональні суми гільбертових просторів. Для цього буде корисним наступний факт [6] (п. 1.1.5, теорема 1.5).

Твердження 2. *Нехай задано скінченне число допустимих пар $[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}]$ гільбертових просторів, де $k = 1, \ldots, p$. Тоді для будь-якого $\psi \in \mathcal{B}$ справедливо*

$$\Bigl[\bigoplus_{k=1}^{p} X_0^{(k)}, \bigoplus_{k=1}^{p} X_1^{(k)}\Bigr]_\psi = \bigoplus_{k=1}^{p} \bigl[X_0^{(k)}, X_1^{(k)}\bigr]_\psi$$

з еквівалентністю норм.

4. Основні результати та їх доведення. Сформулюємо основні результати статті для розширеної соболєвської шкали (5) на векторному розшаруванні $\pi : V \to \Gamma$.

Теорема 1. Нехай задані функція $\varphi \in \mathrm{RO}$ і дійсні числа s_0, s_1 такі, що $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ і $s_0 < \sigma_0(\varphi)$. Означимо інтерполяційний параметр ψ за формулою (6). Тоді

$$[H^{(s_0)}(\Gamma, V), H^{(s_1)}(\Gamma, V)]_\psi = H^\varphi(\Gamma, V) \tag{8}$$

з точністю до еквівалентності норм.

Доведення теореми 1. Як відомо [1, р. 110], пара соболєвських просторів в лівій частині рівності (8) є допустимою. Ми виведемо цю рівність з Твердження 1 за допомогою операторів "склеювання" та "розпрямлення" векторного розшарування $\pi : V \to \Gamma$.

Означимо оператор "розпрямлення" за допомогою формули

$$T : u \mapsto ((\chi_j u_{j,1}) \circ \alpha_j, \ldots, (\chi_j u_{j,p}) \circ \alpha_j) \tag{9}$$

для $j \in \{1, \ldots, \varkappa\}$ та довільного $u \in \mathcal{D}'(\Gamma, V)$. Цей оператор визначає ізометричні оператори

$$T : H^\varphi(\Gamma, V) \to (H^\varphi(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa}. \tag{10}$$

$$T : H^\sigma(\Gamma, V) \to (H^\sigma(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa}, \quad \text{де} \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

між соболєвськими просторами. Оскільки ψ інтерполяційний параметр, з обмеженості лінійних операторів (11), де $\sigma \in \{s_0, s_1\}$, слідує, що звуження оператора (11), де $\sigma = s_0$, є обмеженим оператором

$$T : \left[H^{(s_0)}(\Gamma, V), H^{(s_1)}(\Gamma, V)\right]_\psi \to \tag{12}$$

$$\to \left[(H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa}, (H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa}\right]_\psi. \tag{13}$$

В силу тверджень 1 та 2, простір (12) матиме вигляд

$$\begin{aligned} &\left[(H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa}, (H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa}\right]_\psi = \\ &= \left([H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]_\psi\right)^{p\varkappa} = \\ &= \left(H^\varphi(\mathbb{R}^n)\right)^{p\varkappa}. \end{aligned} \tag{14}$$

Таким чином (12) є обмеженим оператором між просторами

$$T : [H^{(s_0)}(\Gamma, V), H^{(s_1)}(\Gamma, V)]_\psi \to \big(H^\varphi(\mathbb{R}^n)\big)^{p\varkappa}. \tag{15}$$

Розглянемо тепер відображення "склейки"

$$K : \mathbf{w} \mapsto \sum_{j=1}^{\varkappa} \Theta_j((\eta_j w_j) \circ \alpha_j^{-1}) \tag{16}$$

$\mathbf{w}$ визначається за формулою

$$\mathbf{w} := (w_1, \dots, w_\varkappa) \in ((S'(\mathbb{R}^n))^p)^\varkappa,$$

де

$$w_j := (w_{j,1}, \dots, w_{j,p}), \;\; w_{j,k} \in S'(\mathbb{R}^n),$$

та $(\eta_j w_j) \circ \alpha_j^{-1} \in \mathcal{D}'(\Gamma_j)$. Тут, Θ_j лінійний оператор такий, що $\Theta_j v \in \mathcal{D}'(\Gamma, V)$ та $\mathrm{supp}\Theta_j v \subset \Gamma_j$ для $v \in (\mathcal{D}'(\Gamma_j))^p$, $\mathrm{supp} v \in \Gamma_j$. Ми можемо записати

$$\begin{aligned}\Theta_j v := \{w_l \in (\mathcal{D}'(\Gamma_l))^p, with\ j \in \{1, \dots, \varkappa\} \quad \text{такі що} \\ w_l = \Theta_{lj}(\beta_{lj} w_j) \quad \text{на} \quad \Gamma_j \cap \Gamma_l\}\end{aligned}$$

Маємо лінійне обмежене відображення

$$K : (H^\varphi(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa} \to H^\varphi(\Gamma, V) \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{17}$$

Завдяки вибору функцій χ_j та η_j ми маємо

$$\begin{aligned}KTu &= K((\chi_j u_j) \circ \alpha_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{\varkappa} \Theta_j\Big(\big(\eta_j (\chi_j u_j) \circ \alpha_j\big) \circ \alpha_j^{-1}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{\varkappa} \Theta_j\Big(\big(\eta_j \circ \alpha_j^{-1}\big)(\chi_j u_j) \circ \alpha_j \circ \alpha_j^{-1}\Big) = \\ &= \sum_{j=1}^{\varkappa} \Theta_j(\chi_j u_j) = u.\end{aligned} \tag{18}$$

Покажемо, що відображення (17) є обмеженим оператором.

$$\|K\mathbf{w}\|^2_{\varphi;\Gamma,V} = \sum_{j=1}^{\varkappa} \|\big(\chi_j (Kw)_j\big)\circ\alpha_j\|^2_{(H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p} =$$
$$= \sum_{j=1}^{\varkappa}\sum_{l=1}^{\varkappa} \|\Big(\chi_j\big(\Theta_l((\eta_l w_l)\circ\alpha_l^{-1})\big)_j\Big)\circ\alpha_j\|^2_{(H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p}. \tag{19}$$

Маємо рівності

$$\begin{aligned}
&\Big(\chi_j\big(\Theta_l((\eta_l w_l)\circ\alpha_l^{-1})\big)_j\Big)\circ\alpha_j = \\
&= \Big(\chi_j\big(\Theta_{j,l}\beta_{j,l}((\eta_l w_l)\circ\alpha_l^{-1})\big)\Big)\circ\alpha_j = \\
&= \Big(\big(\Theta_{j,l}\chi_j\beta_{j,l}((\eta_l w_l)\circ\alpha_l^{-1})\big)\Big)\circ\alpha_j = \\
&= \Big(\Theta_{j,l}\big(\underbrace{((\chi_j\beta_{j,l})\circ\alpha_l)\eta_l}_{:=\eta_{l,j}} w_l)\circ\underbrace{\alpha_l^{-1}))\Big)\circ\alpha_j}_{:=\gamma_{l,j}} = \\
&= \Theta\big((\eta_{l,j}w_l)\gamma_{l,j}\big).
\end{aligned} \tag{20}$$

Тут, $\eta_{l,j} := ((\chi_j\beta_{j,l})\circ\alpha_l)\eta_l \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{p\times p})$, та $\gamma_{l,j} := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ є C^{∞}–дифіоморфізм такий, що $\gamma_{l,j} := \alpha_l^{-1}\circ\alpha_j$ в околі $\operatorname{supp}\eta_{l,j}$ та $\gamma_{l,j}(t) = t$ для кожного $t\in\mathbb{R}^n$, $|t|\gg 1$.

Внаслідок (19) та (20) ми маємо

$$\|K\mathbf{w}\|^2_{\varphi;\Gamma,V} = \sum_{j=1}^{\varkappa}\sum_{l=1}^{\varkappa} \|\Big(\Theta\big((\eta_{l,j}w_l)\gamma_{l,j}\big)\Big)\|^2_{(H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p}.$$

Таким чином,

$$\|K\mathbf{w}\|^2_{\varphi;\Gamma,V} \le c\sum_{j=1}^{\varkappa} \|w_j\|^2_{(H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^p} \tag{21}$$

Тому відображення (17) розширюється однозначно (за неперервністю) до лінійного обмеженого оператора

$$K : (H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa} \to H^{\varphi}(\Gamma, V). \tag{22}$$

Крім того, це відображення продовжується однозначно до лінійного обмеженого оператора

$$K : ((H^{\sigma}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa} \to H^{\sigma}(\Gamma, V) \quad \text{для кожного} \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \qquad (23)$$

Взявши $\sigma \in \{s_0, s_1\}$ та використавши інтерполяцію з функціональним параметром ψ, ми отримаємо, що звуження оператора (23), $\sigma = s_0$, на простір (14) є обмеженим оператором

$$K : (H^{\varphi}(\mathbb{R}^n))^{p\varkappa} \to [H^{(s_0)}(\Gamma, V), H^{(s_1)}(\Gamma, V)]_{\psi}. \qquad (24)$$

Завдяки відображенням (10), (24) та рівності (18) ми отримаємо

$$KT : H^{\varphi}(\Gamma, V) \to [H^{(s_0)}(\Gamma, V), H^{(s_1)}(\Gamma, V)]_{\psi}.$$

З відображень (15) та (17) слідує, що KT виконує обернене неперервне вкладення.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай $\varphi \in \mathrm{RO}$. Гільбертів простір $H^{\varphi}(\Gamma, V)$ з точністю до еквівалентності норм не залежить від вибору атласу $\{\alpha_j\}$ та розбиття одиниці $\{\chi_j\}$ на Γ та від вибору локальних тривіалізацій $\{\beta_j\}$ на V.

Доведення теореми 2. Розглянемо дві трійки $\mathcal{A}_1$ та $\mathcal{A}_2$ кожна з яких складається з атласу многовиду Γ, відповідного розбиття одиниці на Γ, та набору локальних тривіалізацій тотального простору V. Нехай $H^{\varphi}(\Gamma, V; \mathcal{A}_j)$ і $H^{\sigma}(\Gamma, V; \mathcal{A}_j)$ позначають відповідно простір Хермандера $H^{\varphi}(\Gamma, V)$ та соболєвський простір $H^{\sigma}(\Gamma, V)$ відповідно до трійок $\mathcal{A}_j$, де $j \in \{1, 2\}$. Доведення Теореми 2 відоме у випадку соболєвського простору $\varphi \equiv t^s$ (див. наприклад, [1, p. 110]). Отже, тотожне відображення є ізоморфізмом

$$I : H^{\sigma}(\Gamma, V; \mathcal{A}_1) \leftrightarrow H^{\sigma}(\Gamma, V; \mathcal{A}_2)$$

для кожного $\sigma \in \mathbb{R}$. Розглянувши цей ізоморфізм для $\sigma \in \{s_0, s_1\}$ та використавши інтерполяцію з функціональним параметром

ψ, який визначається формулою (6), ми отримаємо, що тотожне відображення є ізоморфізмом

$$I : [H^{(s_0)}(\Gamma, V; \mathcal{A}_1), H^{(s_1)}(\Gamma, V; \mathcal{A}_1)]_\psi \leftrightarrow [H^{(s_0)}(\Gamma, V; \mathcal{A}_2), H^{(s_1)}(\Gamma, V; \mathcal{A}_2)]_\psi.$$

Згідно з Теоремою 1,

$$[H^{(s_0)}(\Gamma, V; \mathcal{A}_j), H^{(s_1)}(\Gamma, V; \mathcal{A}_j)]_\psi = H^\varphi(\Gamma, V; \mathcal{A}_j)$$

для кожного $j \in \{1, 2\}$ з точністю до еквівалентності норм в просторах. Таким чином, простори $H^\varphi(\Gamma, V; \mathcal{A}_1)$ та $H^\varphi(\Gamma, V; \mathcal{A}_2)$ є еквівалентними з точністю до еквівалентності норм.

Теорема 2 доведена.

Література

[1] Wells R. O., Jr. Dufferential analysis on complex manifolds, Springer, New York, 1980

[2] Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, Москва: Мир, 1965

[3] *Zinchenko T.* Elliptic operators on refined Sobolev scales on vector bundles, De Gruyter Open, Open Math., 2017, 15(1), 907–925

[4] Mikhailets V. A., Murach A. A., Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces, Methods Funct. Anal. Topology, 2008, 14, no. 1, 81–100

[5] Seneta E., Regularly Varying Functions, Berlin: Springer-Verlag, 1976

[6] Mikhailets V. A., Murach A. A., Hoŕmander Spaces, Interpolation, and Elliptic Problems, De Gruyter Studies in Math., 60, De Gruyter, Berlin, 2014

[7] A. A. Murach, On elliptic systems in Hörmander spaces, Ukrainian Math. J., 2009, 61, no. 3, 467–477

[8] Mikhailets V. A., Murach A. A., Elliptic operators in a refined scale of functional spaces, Ukrainian Math. J., 2005, 57, no. 5, 817–825

[9] Mikhailets V. A., Murach A. A., The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems, Banach J. Math. Anal, 2012, 6, no. 2, 211–281

[10] Mikhailets V. A., Murach A. A., Refined scales of spaces and elliptic boundary-value problems, I, Ukranian Math. J., 2006, 58, no. 2, 244–262

[11] Mikhailets V. A., Murach A. A., Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems, II, Ukranian Math. J., 2006, 58, no. 3, 398–417

[12] Волевич Л. Р., Панеях Б. П., Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, Успехи мат. наук, 1965, 20, no. 1, 3–74

[13] Mikhailets V. A., Murach A. A., Regular elliptic boundary-value problem for homogeneous equation in two-sided refined scale of spaces, Ukrainian Math. J., 2006, 58, no. 11, 1748–1767

[14] Mikhailets V. A., Murach A. A., Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III, Ukranian Math. J., 2007, 59, no. 5, 744–765

[15] Murach A. A., Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold, Ukranian Math. J., 2007, 59, no. 6, 874–893

[16] Mikhailets V. A., Murach A. A., An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces, Ukranian Math. J., 2008, 60, no. 4, 574–597

[17] Murach A.A., Douglis–Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold, Methods Funct. Anal. Topology, 2008, 14, no. 2, 142–158

[18] Murach A.A., On elliptic systems in Hörmander spaces, Ukrainian Math. J., 2009, 61, no. 3, 467–477

[19] Mikhailets V. A., Murach A. A., Extended Sobolev scale and elliptic operators, Ukrainian Math. J., 2013, 65, no. 3, 392–404

[20] Zinchenko T. N., Murach A. A., Douglis–Nirenberg elliptic systems in Hörmander spaces, Ukrainian Math. J., 2013, 64, no. 11, 1672–1687

[21] Zinchenko T. N., Murach A. A. Petrovskii elliptic systems in the extended Sobolev scale, J. Math. Sci. (N. Y.), 2014, 196, no. 5, P. 721–732

[22] Anop A. V., Murach A. A., Parameter-elliptic problems and interpolation with a function parameter, Methods Funct. Anal. Topology, 2014, 20, no. 2, 103–116

[23] Anop A. V., Murach A. A., Regular elliptic boundary-value problems in the extended Sobolev scale, Ukrainian Math. J., 2014, 66, no. 7, 969–985

[24] Mikhailets V. A., Murach A. A., Interpolation Hilbert spaces between Sobolev spaces, Results Math., 2015, 67, no. 1, 135–152

[25] Murach A. A., Zinchenko T., Parameter-elliptic operators on the extended Sobolev scale, Methods Funct. Anal. Topology, 2013, 19, no. 1, 29–39