УДК 621.398.96

В. В. ОНИЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук, доцент,
Державний університет телекомунікацій, Київ

ФРАКТАЛЬНІСТЬ У ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ

Розглянуто підхід до передавання даних за допомогою фрактальних сигналів, який базується на використанні стохастичних фрактальних сигналів. Запропоновано алгоритм генерування дискретного шумоподібного сигналу заданої фрактальної вимірності. Наведено короткий огляд теорії дробового інтегро-диференціювання.

Ключові слова: фрактал; фрактальний сигнал; фрактальна модуляція; дробове інтегро-диференціювання; параметр Херста.

Вступ

Основу сучасних безпроводових технологій становлять складні широкосмугові сигнали, які знайшли застосування в діючих радіолокаційних, радіонавігаційних і телекомунікаційних системах. Причина зацікавленості широкосмуговим сигналом у сучасних системах передавання інформації стало те, що за його допомогою можна розв'язати проблеми електромагнітного впливу одного радіотехнічного пристрою на інший; проблеми завадостійкості передавання інформаційних повідомлень у каналі зв'язку з широко- або вузькосмуговими завадами; проблеми конфіденційності та захищеності інформації, а також розробити нові методи модуляції-демодуляції, кодування-декодування повідомлень. Альтернативою хаотичним сигналам у системах широкосмугового конфіденційного зв'язку можуть бути сигнали з фрактальною структурою.

Фрактальні сигнали — це новий тип складних широкосмугових сигналів, які виграють порівняно з хаотичними щодо гнучкості зміни характеристик та точності відтворення, не поступаючись їм стосовно нерегулярності.

Уперше питання про властивості фрактальних сигналів розглянули А. П. Кузнецов і С. П. Кузнецов, але в їхніх працях не було спроб використовувати фрактальні сигнали в системах зв'язку. Ідея застосування фрактальних сигналів для передавання інформації з'явилась у 2000 році, коли було вже з'ясовано недоліки хаотичних сигналів.

Основні праці щодо застосування фракталів для розв'язування телекомунікаційних завдань належать таким авторам, як А. А. Потапов, В. Ф. Кравченко, О. І. Шелухін, А. В. Осін, С. М. Смольский.

Фрактальний підхід дає новий рівень розуміння динаміки процесів, відкриваючи новий напрямок у розвитку процесів, в основу яких покладено самоорганізацію.

Питанням побудови комунікаційних систем, що базуються на використанні фракталів, присвячено праці [1–3].

Зауважимо, що запропонована N. Engheta концепція, відома як ***дробова парадигма в електродинаміці***, передбачає використання дробового оператора при розв'язуванні різних задач фракталізованого типу, причому оператор нецілого порядку описує нові проміжні розв'язки.

Дослідження, пов'язані з дробовим інтегро-диференціюванням, набули найбільшого розвитку протягом останніх десятиріч, хоча саме поняття дробової похідної постало 1695 року, коли Лопіталь у листі до Лейбніца сформулював запитання щодо змісту виразу $d^n y/dx^n$ при $n=\frac{1}{2}$. У відповідь на це запитання Лейбніц зауважив, що «$d^{1/2}x$ дорівнюватиме $x\sqrt{dx:x}$», додавши, що «це очевидний парадокс, з якого свого часу буде зроблено корисні висновки».

Серед тих, кому належить значний внесок у розвиток теорії та застосувань дробового інтегро-диференціювання до 1941 року, були Ж.-Б. Ж. Фур'є, Н. Х. Абель, Ж. Ліувілль, Б. Ріман, К. Грюнвальд, О. В. Лєтніков, Ж. Адамар, Г. Вейль, Г. Харді, М. Рісс, А. Маршо, А. Ердейі, Г. Кобер та інші вчені.

В останні роки стало зрозуміло, що багато явищ і систем можуть бути адекватно описані за допомогою моделей з дробовими похідними та інтегралами. Зокрема, це стосується телекомунікаційних мереж.

Якщо канал зв'язку, як середовище, використовуване для передавання сигналу від передавального кінця до приймального, інтерпретується як система з фрактальною структурою, тоді вона може бути описана дробово-осциляційним рівнянням виду

$$\partial_{0t}^{\alpha} y(\tau) + w^2 y(t) = 0,$$

де ∂_{0t}^{α} — оператор дробового (у розумінні M. Caputo) диференціювання порядку α ($1 < \alpha = \text{const} < 2$) із початком у момент часу $t = 0$ [4].

Основна частина

Дробове інтегро-диференціювання

Теорію дробового інтегро-диференціювання ґрунтовно викладено у фундаментальній монографії [5], а її подальший розвиток — теорію дробових диференціальних рівнянь — у [6].

Нехай R^m — m-вимірний евклідів простір; R_+ — додатна піввісь; $f(t)$, $f : R_+ \to R^m$ — деяка абсолютно неперервна функція.

Нагадаємо означення лівосторонніх інтеграла та похідної дробового порядку α ($0 < \alpha < 1$) у сенсі Рімана–Ліувілля:

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau,$$

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{d}{dt}I^{1-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau, \qquad (1)$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера, що задовольняє функціональне рівняння $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, $\Gamma(z)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt$; $D^{\alpha}f(t)$ — розв'язок інтегрального рівняння Абеля [5].

За допомогою інтегрування частинами і диференціювання інтеграла, що залежить від параметра, вираз (1) можна звести до вигляду

$$D^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\left(\frac{f(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\bigg|_0^t-\int_0^t \frac{f'(\tau)(t-\tau)^{1-\alpha}}{\alpha-1}dt\right)=$$

$$=\frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau.$$

Таким чином, похідна дробового порядку α, $\alpha \in (0,1)$, у сенсі Рімана–Ліувілля має вигляд суми сингулярного члена

$$\frac{f(0)t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad (2)$$

та інтеграла

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$$

відомого як ***дробова похідна в сенсі Капуто***, або ***регуляризована дробова похідна***.

Присутність доданка (2) призводить до того, що дробові похідні Рімана–Ліувілля мають особливість у нулі, а в задачі Коші для диференціальних рівнянь дробового порядку в сенсі Рімана–Ліувілля (при опису динамічних систем) необхідно задавати початкові умови спеціального вигляду, що не мають чіткої фізичної інтерпретації.

Цих недоліків дробової похідної Рімана–Ліувілля позбавлена регуляризована похідна дробового порядку $\alpha(\alpha \in (0,1))$

$$D^{\alpha}f(t)=I^{1-\alpha}f'(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau,$$

яку ввів Капуто в [7].

Нехай тепер $n-1<\alpha<n$, $n=1, 2, \ldots$, причому дробова частина числа α позначається $\{\alpha\}$, його ціла частина — $[\alpha]$. Таким чином, $[\alpha]=n-1$, $\{\alpha\}=\alpha-n+1$. Дробова похідна Рімана–Ліувілля довільного порядку α $(n-1<\alpha<n)$ уводиться в такий спосіб [5]:

$$D^{\alpha}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]}D^{\{\alpha\}}f(t)=\left(\frac{d}{dt}\right)^{[\alpha]}\frac{1}{\Gamma(1-\{\alpha\})}\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\{\alpha\}}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}d\tau.$$

Фрактальна модуляція сигналів

Постановка задачі. Що ж таке фрактальний сигнал? Загалом кажучі, це функція, що має певну структуру в усіх масштабах. Проте найбільший інтерес становлять фрактали, чия структура в усіх масштабах є подібною. У такому разі говорять, що фрактал ***самоподібний***, або ***масштабно-інваріантний***, аби підкреслити той факт, що фрактал не має абсолютної шкали відліку.

Фрактальні сигнали поділяються на дві великі категорії: ті, чия самоподібність має статистичний характер, та ті, самоподібність яких детермінована.

Статистично самопоподібний фрактальний сигнал, або ***стохастичний фрактальний сигнал***, має однакові статистичні характеристики в усіх масштабах, тоді як структура детермінованого фрактального сигналу однакова в усіх масштабах.

Самоподібні (фрактальні) процеси. Поняття самоподібності тісно пов'язане з поняттям фрактала. Визначення фрактала, що його дав Б. Мандельброт у [8], таке: «*Фракталом називається структура, що складається з частин, подібних до цілого*». Фрактальний об'єкт із математичного погляду має дробову розмірність, яка визначається у вигляді

$$d=\frac{\log N}{\log\frac{1}{r}},$$

де N — кількість рівних частин, на які потрібно розбити об'єкт, а кожна частина являє собою зменшену в $\frac{1}{r}$ разів копію цілого.

Дамо визначення та розглянемо основні властивості самоподібних процесів.

Процес $\zeta(t)$ є ***точно самоподібний 2-го порядку*** з параметром H Херста $(0{,}5 < H < 1)$, якщо виконано *умову 1*:

$$R(k)=\frac{\sigma^2}{2}\left[(k+1)^{2H}-2k^{2H}+(k-1)^{2H}\right],\ \forall k\ge 1,$$

де $R(k)$, σ^2 — відповідно кореляційна функція та дисперсія процесу $\zeta(t)$.

Процес $\zeta(t)$ ***асимптотично самоподібний 2-го порядку*** з параметром H Херста $(0{,}5 < H < 1)$, якщо виконано *умову 2*:

$$\lim_{m\to\infty}R^{(m)}(k)=\frac{\sigma^2}{2}\left[(k+1)^{2H}-2k^{2H}+(k-1)^{2H}\right],\ \forall k\ge 1,$$

де $R^{(m)}(k)$ — кореляційна функція агрегованого процесу $\zeta^{(m)}(t)$.

Самоподібність 2-го порядку означає, що кореляційна структура точно (умова (1)) або асимптотично (умова (2)) зберігається при агрегуванні часового ряду. Самоподібність 2-го порядку (точна або асимптотична) є основною структурою для моделювання трафіку в мережі.

Передавання цифрових даних за допомогою шумоподібних стохастичних фрактальних сигналів. Метод фрактальної модуляції, описаний у [1; 2], передбачає генерування фрактальних сигналів, в яких значенням «0» та «1» потоку двійкових даних відповідають два різні значення фрактальної вимірності Хаусдорфа–Безиковича.

При практичній реалізації такого підходу потрібно розв'язувати задачу генерації сигналу заданої фрактальної вимірності. Існуючі підходи до розв'язування цієї задачі, як правило, передбачають використання операторів дробового інтегро-диференціювання. Зокрема, отримати стохастичний фрактальний сигнал заданої фрактальної вимірності $D = 2 - H$, де параметр H — експонента Херста (Hurst exponent), $1 < D < 2$, можна, пропустивши білий шум $w(t)$ через лінійний стаціонарний фільтр, що має імпульсну перехідну характеристи

$$\frac{1}{\Gamma(H+1/2)} t^{H-1/2} u(t),$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера, що задовольняє функціональне рівняння $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$; $u(\cdot)$ — функція Хевісайда. Такий фільтр відповідає дробовому інтегруванню порядку $H + 1/2$ у сенсі Вейля:

$$I_{+}^{H+1/2} w(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{H-1/2} w(\tau)\, d\tau.$$

Фізичний зміст параметра H полягає в тому, що він визначає ступінь статистичної самоподібності сигналу, тобто при будь-якому $a > 0$ для математичного сподівання та коваріації виконуються рівності

$$\begin{aligned} \mathrm{M}[x(t)] &= a^{-H} \mathrm{M}[x[at]], \\ \mathrm{M}[x(t)x(s)] &= a^{-2H} \mathrm{M}[x(at)x(as)]. \end{aligned} \tag{3}$$

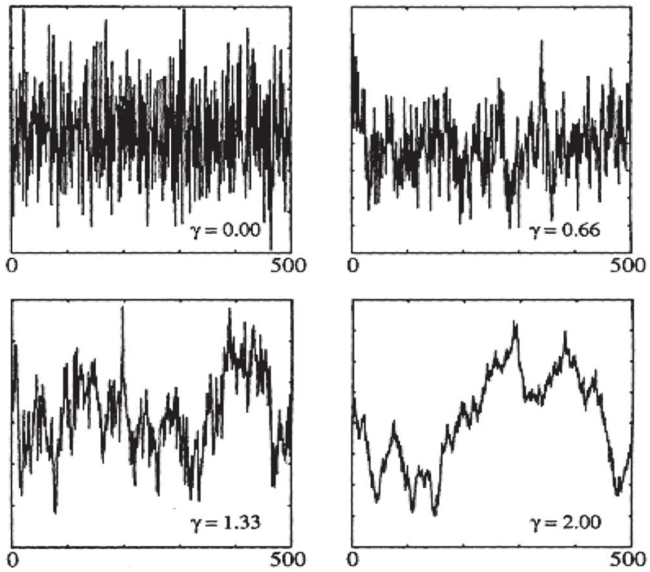
Самоподібні сигнали, що відповідають різним значенням параметра H, наведено на рисунку.

Отже, актуальною є задача побудови інтеграторів і диференціаторів дробового порядку, які використовуються також для цифрової обробки зображень і даних медичних діагностичних приладів.

Скориставшись формулою перетворення Фур'є дробового інтеграла I_{+}^{α}

$$\mathcal{F}\left(I_{+}^{\alpha} w\right) = \frac{\hat{w}(\omega)}{(-i\omega)^{\alpha}},\ 0 < \alpha < 1,$$

можна запропонувати такий алгоритм генерування дискретного шумоподібного сигналу ν_k заданої фрактальної вимірності $D = 2 - H$:



Траєкторії фрактальних процесів залежно від параметра $\gamma = 2H + 1$

1. Генерування псевдовипадкового масиву w_k, $k = 0, 1, \ldots, N - 1$, із білим спектром.

2. Обчислення дискретного перетворення Фур'є w_k за допомогою швидкого перетворення Фур'є (FFT).

3. Фільтрація w_k за допомогою $(-i\omega)^{-(H+1/2)}$.

4. Застосування здобутої послідовності оберненого швидкого перетворення Фур'є (IFFT).

Описаний метод фрактальної модуляції може бути використаний для прихованого передавання цифрових даних, оскільки сигнал, що передається, мало відрізняється від природних шумів наявних у каналі зв'язку. Цим зумовлюється доцільність його використання в комунікаційних системах із низькою ймовірністю перехоплення повідомлень (*Low Probability of Intercept* — LPI).

Методам демодуляції фрактальних сигналів, згенерованих за допомогою описаної техніки, а також різноманітним аспектам їх застосування та вдосконалення буде присвячено подальші публікації.

Висновки

Ситуація, що склалась у сучасних комп'ютерних мережах: наявність великої кількості мережних маршрутів, на яких періодично виникають різкі коливання затримки передавання даних та великі втрати пакетів, поява нових властивостей мережного трафіку, необхідність забезпечення високої якості обслуговування додатків — усе це актуалізує моделювання та аналіз мережного трафіку.

Багато праць, присвячених аналізу мереж, базується на використанні теорії черг. Але сучасний трафік має особливості, які ускладнюють застосування цієї теорії.

Процесам передавання даних пакетним трафіком притаманна виявлена на практиці властивість масштабної інваріантної статистичної характеристики, пов'язана з особливим класом фізичних процесів — фрактальними процесами.

Згідно з цією властивістю мережних процесів особливої актуальності набуває розробка методів дослідження фрактальності та врахування її при передаванні пакетного трафіку.

Велике практичне значення має питання про робасність фрактальної модуляції з огляду на помилки при моделюванні та чисельній реалізації. Для того щоб оцінити чутливість методу до таких помилок, потрібні як чисельні імітаційні експерименти (моделювання методом Монте-Карло), так і експерименти з використанням реальних каналів зв'язку. У практичній реалізації фрактальної модуляції-демодуляції критичною може виявитись проблема точної синхронізації між приймачем та передавачем.

Також важливо з'ясувати, чи є фрактальна модуляція оптимальною в якомусь сенсі, якщо брати за основу певний критерій якості. Важливим є також аспект захисту інформації.

Подальший розвиток розглянутих методів полягає в реалізації підходів, притаманних іншим технікам модуляції, зокрема амплітудної, квадратурно-амплітудної модуляції, коли інформація передається у вигляді символів по кілька біт і при цьому розкладається на дійсну та уявну частини, а також треліс-модуляції.

Загалом фрактальна модуляція являє собою нову перспективну техніку цифрової обробки сигналів, яку можна покласти в основу нового типу комунікаційних систем.

Література

1. ***Wornell, G. W.*** *Signal processing with fractals: a wavelet-based approach / G. W. Wornell.— Boston: Prentice Hall PTR, 1996.— 177 p.*

2. ***Blackledge, J. M.*** *A fractal modulation technique for digital communications systems / J. M. Blackledge, B. Foxon, S. Mikhailov // Proc. Military Communications Conference, MILCOM 98, IEEE.—1998.— Vol. 1.— P. 140–144.*

3. ***Толюпа С. В.*** *Теоретичні основи фрактально-резонансної селекції сигналів в радіотехнічних системах / С. В. Толюпа, В. А. Дружинін, С. Д. Войтенко // Вісник ДУІКТ.— 2012.— Т. 10, № 2.— С. 58–64.*

4. ***Шеннон, К.*** *Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон.— М.: ИЛ, 1963.— 829 с.*

5. ***Самко, С. Г.*** *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев.— Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.*

6. ***Kilbas, A. A.*** *Theory and applications of fractional differential equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo.— Amsterdam: Elsevier, 2006.— 523 p.*

7. ***Caputo, M.*** *Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent-ii / M. Caputo // Geophys. J. R. Astr. Soc. —1967.— Vol. 13.— P. 529–539.*

8. ***Мандельброт, Б.*** *Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт.— М.: Ин-т компьютер. исследований.— 2002.— 656 с.*

Рецензент: д-р техн. наук, професор Л. Ф. Купченко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба.

В. В. Онищенко

ФРАКТАЛЬНОСТЬ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Рассматривается подход к передаче данных при помощи фрактальных сигналов, который основывается на использовании стохастических фрактальных сигналов. Предложен алгоритм генерирования дискретного шумоподобного сигнала заданной фрактальной размерности. Приведено краткое описание теории дробного интегро-дифференцирования.

Ключевые слова: фрактал; фрактальный сигнал; фрактальная модуляция; дробное интегро-дифференцирование; параметр Херста.

V. V. Onyshchenko

FRACTALITY IN TELECOMMUNICATION NETWORKS

We consider an approach to data transmission using fractal signals, which is based on the use of stochastic fractal signals. The algorithm for generating a discrete noise-like signal of a given fractal dimension is proposed. Short description of fractional integro-differentiation is presented.

Keywords: fractal; fractal signal; fractal modulation; fractional calculus; Hurst parameter.