УДК 656.8.001
Л. О. ЯЩУК, доктор техн. наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України,
Одеська національна академія зв'язку ім. О. С. Попова

ПОБУДОВА МІНІМАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ ПОШТОВИХ МАРШРУТІВ МІНІМАЛЬНОЇ СУМАРНОЇ ПРОТЯЖНОСТІ

Розв'язання актуальної задачі поштового зв'язку — побудови мінімальної сукупності поштових маршрутів (ПМ) мінімальної сумарної протяжності — зведено до розв'язання двох задач: задачі побудови на графі мережі поштового зв'язку (МПЗ) мінімального покриваючого графа-дерева і задачі побудови на зазначеному графі-дереві мінімальної сукупності ПМ.

Ключові слова: МПЗ; об'єкт поштового зв'язку (ОПЗ); ПМ; граф МПЗ; мінімальний покриваючий граф-дерево; зв'язність вершин графа; парна вершина графа; непарна вершина графа.

Вступ

Структура МПЗ вирішальним чином впливає на всі її техніко-економічні показники. Складність відшукання оптимальної структури МПЗ полягає, з одного боку, у тому, що такий вплив має неоднозначний і суперечливий характер, а з другого — у тому, що існує надзвичайно багато можливих варіантів з'єднання численних ОПЗ між собою.

Загальна кількість N_Σ можливих варіантів з'єднання n ОПЗ між собою визначається сумою можливих варіантів з'єднання цих ОПЗ по 2, по 3,..., по n, тобто

$$N_\Sigma = N_2 + N_3 + \ldots + N_n.$$

Як показує аналіз,

$$A_n^2 + A_n^3 + \ldots + A_n^n > N_\Sigma > C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n,$$

де $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ і $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ — відповідно кількість розміщень і кількість сполучень із n елементів по k.

Враховуючи, що $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$, маємо $N_\Sigma > 2^n$.

За реальної кількості ОПЗ (магістральних вузлів, центрів) $n \approx 120$ значення N_Σ сягають астрономічних масштабів, коли розрахунок, а тим більш аналіз і оптимізація структур МПЗ у загальному вигляді недосяжні ані для сучасних, ані для майбутніх ЕОМ.

Кажуть, що над подібними задачами тяжіє прокляття розмірності.

Про фантастичний розмір числа 2^{120} можна судити з таких міркувань.

Припустимо, що для розв'язання задачі оптимізації структури МПЗ використовується суперкомп'ютер, швидкодія якого становить $3 \cdot 10^{10}$ операцій за секунду (це теоретична межа швидкодії комп'ютера у вигляді сфери діаметром 1 см, яка визначається лише часом поширення електромагнітної хвилі від одного краю сфери до іншого).

Будемо вважати, що розрахунок одного варіанта побудови структури МПЗ потребує виконання лише однієї операції комп'ютера.

Подамо число N_Σ у вигляді $N_\Sigma \approx 2^{120} \approx 10^{36}$. Тоді для розрахунку всіх можливих варіантів має бути витрачено $10^{36}/(3 \cdot 10^{10}) = 0{,}33 \cdot 10^{26}$ секунд, або 10^{18} (мільярд мільярдів) років, і це при тому, що вік Землі оцінюється всього в 4,5 мільярда років, а вік так званого великого вибуху, від якого, як вважають астрофізики, пішов Всесвіт, лише 14 мільярдів років!

Таким чином, на пошук сукупності ПМ мінімальної сумарної протяжності методом повного перебору всіх можливих варіантів не слід сподіватися.

Наприклад, усі можливі варіанти з'єднання 4-х ОПЗ між собою, подано в табл. 1, а графічну ілюстрацію зазначених варіантів наведено на рис. 1.

Таблиця 1

Варіанти з'єднання чотирьох ОПЗ

Номер варіанта	Номери ОПЗ, що з'єднуються	Примітка
1	1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 2 – 3, 2 – 4, 3 – 4	З'єднання ОПЗ по 2, 6 ПМ, усього 1 варіант
2	1 – 4 – 3, 1 – 2 – 4, 1 – 3 – 2	З'єднання ОПЗ по 3, 3 ПМ, усього 8 варіантів
3	1 – 2 – 3, 1 – 3 – 4, 1 – 4 – 2	
4	2 – 1 – 4, 2 – 3 – 1, 2 – 4 – 3	
5	2 – 3 – 4, 2 – 1 – 3, 2 – 4 – 1	
6	3 – 2 – 1, 3 – 4 – 2, 3 – 1 – 4	
7	3 – 4 – 1, 3 – 2 – 4, 3 – 1 – 2	
8	4 – 1 – 2, 4 – 3 – 1, 4 – 2 – 3	
9	4 – 3 – 2, 4 – 1 – 3, 4 – 2 – 1	
10	1 – 2 – 4 – 3	З'єднання ОПЗ по 4, 1 ПМ, усього 12 варіантів
11	2 – 1 – 3 – 4	
12	3 – 2 – 4 – 1	
13	4 – 1 – 3 – 2	
14	1 – 2 – 3 – 4	
15	2 – 3 – 4 – 1	
16	3 – 4 – 1 – 2	
17	4 – 1 – 2 – 3	
18	1 – 3 – 4 – 2	
19	2 – 4 – 1 – 3	
20	3 – 1 – 2 – 4	
21	4 – 2 – 3 – 1	

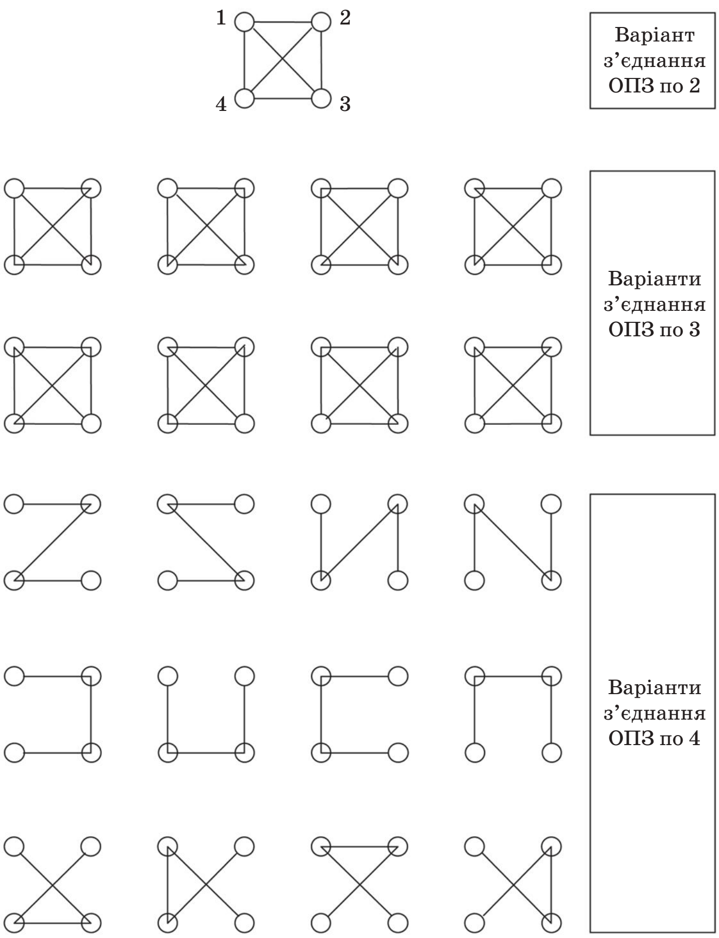

Рис. 1. Ілюстрація варіантів з'єднання чотирьох ОПЗ

Хоча сьогодні маємо ефективні методи побудови найкоротших шляхів, що з'єднують між собою ОПЗ, вони мають досить обмежене застосування, оскільки оператора поштового зв'язку звичайно цікавить не мінімізація протяжностей окремих ПМ, а мінімізація їх сумарної протяжності, за якої забезпечується мінімізація сумарного пробігу поштових автомобілів, витрати паливно-мастильних матеріалів, резини, акумуляторів, запчастин тощо, тим паче, що мінімальна сумарна протяжність ПМ, як правило, значно менша від суми мінімальних протяжностей ПМ, що з'єднують ОПЗ між собою.

Відомо, що мінімальну сумарну протяжність ПМ МПЗ, поданої у вигляді графа, має побудований на цьому графі мінімальний покриваючий граф-дерево, унаслідок чого розв'язання задачі побудови сукупності ПМ мінімальної сумарної протяжності може бути зведене до розв'язання двох задач — задачі побудови на графі МПЗ мінімального покриваючого графа-дерева і задачі побудови на зазначеному графі-дереві мінімальної сукупності ПМ.

Перша задача вважається класичною задачею теорії графів і викладена далі з використанням розробленого автором алгоритму, а друга — вперше розв'язана в цій статті.

1. Задача побудови на графі МПЗ мінімального покриваючого графа-дерева

Задача формулюється так: задано початковий зв'язний зважений граф, вершини якого відповідають ОПЗ, ребра — шляхам, що з'єднують ці ОПЗ, а ваги ребер — протяжностям відповідних шляхів. Побудувати новий зв'язний зважений граф, сукупність вершин якого та сама, що й у початкового графа, а сукупність ребер є частиною сукупності ребер початкового графа, за умови, що сумарна вага ребер нового графа мінімальна.

Очевидно, що новий граф є дерево, а отже, ідеться про побудову графа-дерева з мінімальною сумарною вагою ребер.

Алгоритм побудови такого графа-дерева ґрунтується на формуванні фрагментів, що являють собою частини зазначеного графа-дерева. Ребра графа мають перевірятися в порядку зростання їхньої ваги (для побудови будь-якого графа-дерева ребра з однаковими вагами можуть перевірятися в довільному порядку; для побудови графа-дерева, якому відповідає мінімальна сумарна кількість ПМ, ребра з однаковими вагами мають перевірятися в певному визначеному порядку).

Залежно від того, як співвідносяться кінцеві вершини перевірного ребра з іншими вершинами графа, можливі чотири випадки.

Випадок 1. ***Формування нового фрагмента.***

У цьому випадку жодна з вершин перевірного ребра не належить жодному з раніше сформованих фрагментів. Новий фрагмент формується з перевірного ребра і обох його вершин.

Випадок 2. ***Розширення існуючого фрагмента.***

У цьому випадку перша вершина перевірного ребра належить деякому раніше сформованому фрагменту, а друга — не належить жодному фрагменту. Розширений фрагмент формується з раніше сформованого фрагмента, перевірного ребра та його другої вершини.

Випадок 3. ***Об'єднання двох існуючих фрагментів.***

У цьому випадку перша вершина перевірного ребра належить одному раніше сформованому фрагменту, а друга — іншому. Об'єднаний фрагмент формується з обох зазначених раніше сформованих фрагментів та перевірного ребра.

Випадок 4. ***Збереження існуючих фрагментів.***

У цьому випадку обидві вершини перевірного ребра належать деякому раніше сформованому фрагменту. Перевірне ребро не включається до складу жодного з фрагментів.

Процес перевірки ребер закінчується, коли всі вершини графа увійдуть в один фрагмент або коли загальна кількість ребер, що увійшла в зазначений фрагмент, дорівнює числу вершин графа, зменшеному на одиницю.

Алгоритм побудови графа з мінімальною сумарною вагою ребер наведено на рис. 2.

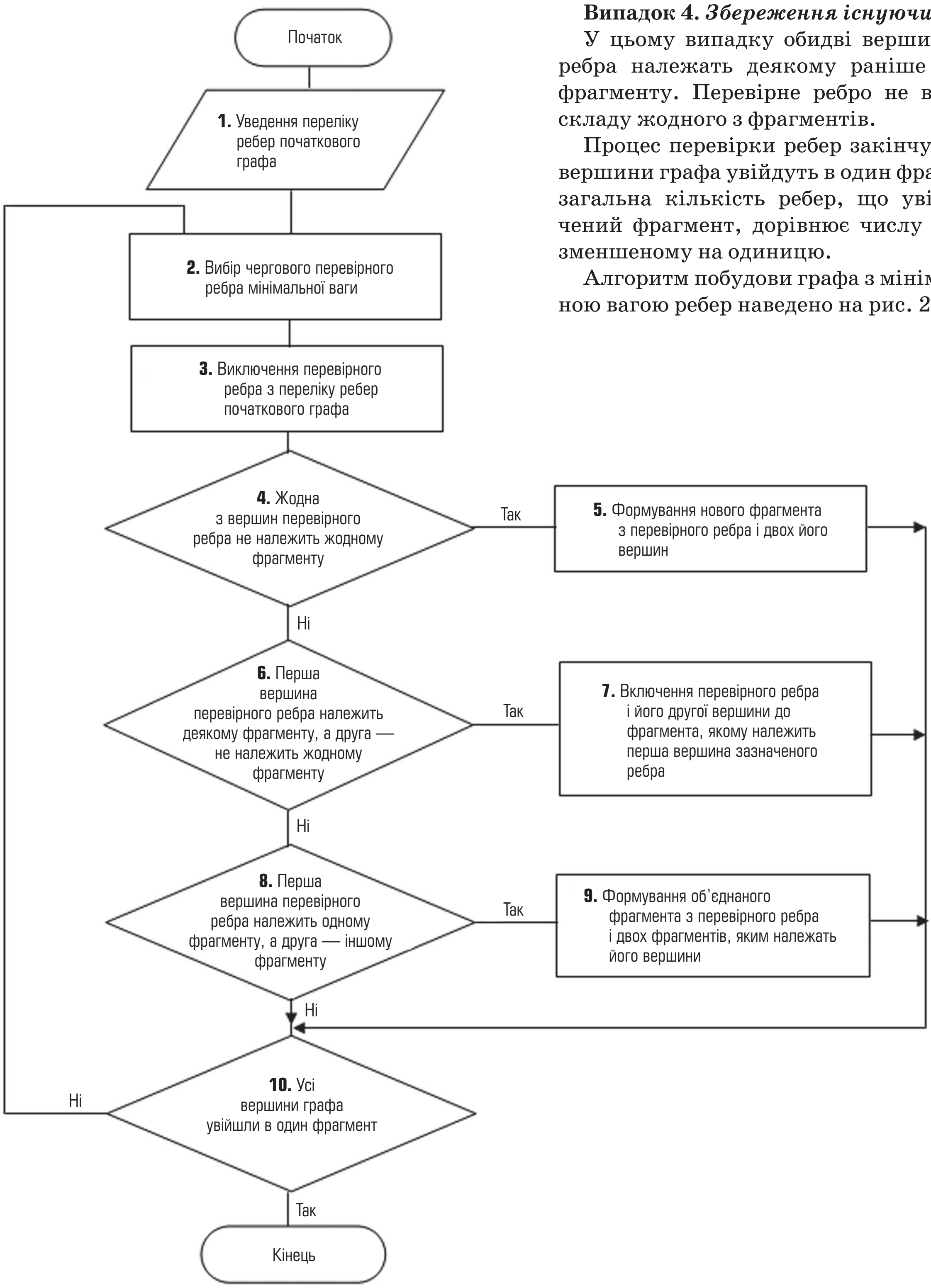

Рис. 2. Алгоритм побудови графа з мінімальною сумарною вагою ребер

Алгоритм містить 10 блоків.

У блоці 1 здійснюється введення в довільному порядку переліку ребер початкового графа із зазначенням їхніх ваг.

У блоці 2 відбувається вибір чергового перевірного ребра мінімальної ваги згідно з будь-яким алгоритмом пошуку мінімального числа.

У блоці 3 із переліку ребер початкового графа виключається перевірне ребро для запобігання його повторному вибору.

У блоці 4 перевіряється умова формування нового фрагмента (випадок 1). У разі виконання умови — перехід до блока 5, у разі невиконання — до блока 6.

У блоці 5 виконується формування нового фрагмента.

У блоці 6 перевіряється умова розширення існуючого фрагмента (випадок 2). У разі виконання умови — перехід до блока 7, у разі невиконання — до блока 8.

У блоці 7 провадиться формування розширеного фрагмента.

У блоці 8 перевіряється умова об'єднання двох існуючих фрагментів (випадок 3). У разі виконання умови — перехід до блока 9, у разі невиконання — до блока 10.

У блоці 9 здійснюється формування об'єднаного фрагмента.

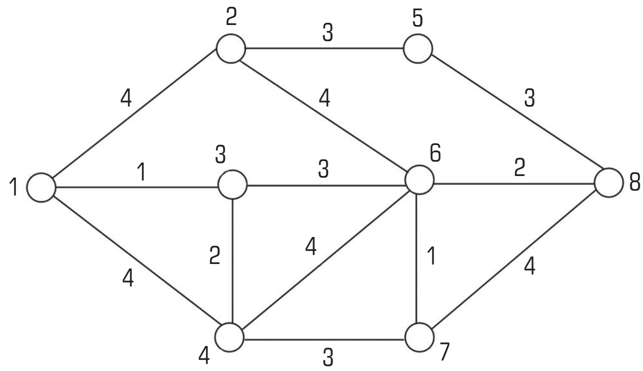

Рис. 3. Граф початкової МПЗ

У блоці 10 перевіряється умова закінчення формування графа. У разі невиконання умови — повернення до блока 2, у разі виконання — закінчення роботи алгоритму.

Зазначимо, що оскільки перевірка будь-якого ребра завжди призводить до одного з чотирьох зазначених випадків, достатньо перевірити умови виконання лише трьох із них, тому в наведеному алгоритмі умова виконання випадку 4 не перевіряється.

Наведемо приклад побудови найкоротшої МПЗ. Граф початкової МПЗ зображено на рис. 3. Біля ребер графа зазначено їхні ваги.

Перелік ваг ребер початкового графа наведено в табл. 2.

Таблиця 2

Перелік ваг ребер початкового графа

Ребро	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(2,6)	(3,4)	(3,6)	(4,6)	(4,7)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
Вага	4	1	4	3	4	2	3	4	3	3	1	2	4

Послідовність кроків формування мінімального покриваючого графа-дерева подано в табл. 3.

Таблиця 3

Послідовність кроків формування мінімального покриваючого графа-дерева

Крок	**Перевірне ребро**	**Вага перевірного ребра**	**Ребра графа**		
			Фрагмент 1	**Фрагмент 2**	**Фрагмент 3**
1	(1,3)	1	(1,3)		
2	(6,7)	1	(1,3)	(6,7)	
3	(3,4)	2	(1,3), (3,4)	(6,7)	
4	(6,8)	2	(1,3), (3,4)	(6,7), (6,8)	
5	(2,5)	3	(1,3), (3,4)	(6,7), (6,8)	(2,5)
6	(3,6)	3	(1,3), (3,4), (6,7), (6,8), (3,6)		(2,5)
7	(4,7)	3	(1,3), (3,4), (6,7), (6,8), (3,6)		(2,5)
8	(5,8)	3	(1,3), (3,4), (6,7), (6,8), (3,6), (2,5)		

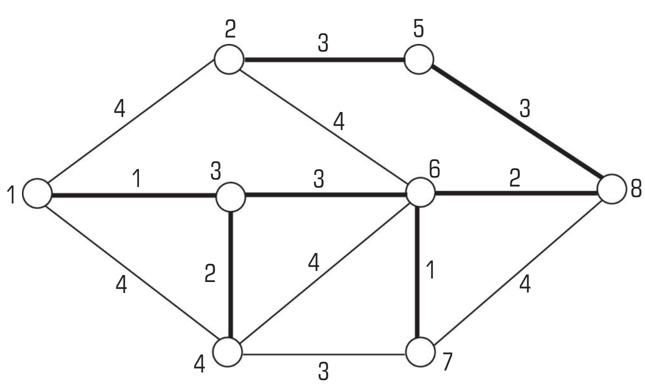

Рис. 4. Мінімальний покриваючий граф-дерево

Усього для формування мінімального покриваючого графа-дерева знадобилось 8 кроків, причому крок 7 (перевірка ребра (4,7)) виявився зайвим.

Граф, на якому жирними лініями виділено мінімальний покриваючий граф-дерево, зображено на рис. 4.

У наведеному прикладі сумарна вага ребер початкового графа становить 38, а мінімального покриваючого графа-дерева — 15.

Зазначимо, що згідно з іншим порядком перевірки ребер однакової ваги можна отримати інший мінімальний покриваючий граф-дерево, але значення цієї сумарної ваги не зміниться.

2. Задача побудови мінімальної сукупності ПМ на графі-дереві

Нагадаємо деякі поняття.

Зв'язність вершини графа — кількість ребер, які з'єднуються в цій вершині графа.

Парна вершина графа — вершина графа, в якій з'єднується парна кількість ребер.

Непарна вершина графа — вершина графа, в якій з'єднується непарна кількість ребер.

Сформулюємо деякі загальні правила побудови ПМ на графі-дереві, які або очевидні, або можуть бути легко доведені.

Правило 1. Сумарна кількість непарних вершин графа завжди парна.

Правило 2. ПМ повинні розпочинатися і закінчуватися тільки у непарних вершинах графа.

Правило 3. Мінімальна сумарна кількість ПМ дорівнює половині сумарної кількості непарних вершин графа.

Правило 4. Будь-яке ребро графа має входити до складу лише одного ПМ.

Правило 5. Усі ребра графа мають входити до складу ПМ.

Правило 6. Усі ребра графа, що ввійшли до складу чергового ПМ, мають вилучатися з подальшого розгляду.

Правило 7. Усі вершини графа зі зв'язністю $m = 1$ або $m = 2$, що ввійшли до складу чергового ПМ, мають вилучатися з подальшого розгляду.

Правило 8. Усі вершини графа зі зв'язністю $m \geq 3$, що ввійшли до складу чергового ПМ, мають залишатися, але їх зв'язність має зменшуватися на 1, якщо ПМ в них закінчуються, і зменшуватися на 2, якщо ПМ через них проходять.

Правило 9. Сумарна протяжність усіх ПМ має дорівнювати сумарній протяжності всіх ребер графа-дерева, а отже, бути мінімальною.

Розглянемо граф-дерево, зображений на рис. 4.

Непарними вершинами зазначеного графа-дерева є 1, 2, 3, 4, 6, 7.

Існує 9 варіантів можливого з'єднання цих вершин трьома ПМ.

Варіант 1. ПМ 1: 1 – 3;	ПМ 2: 4 – 3 – 6;	ПМ 3: 7 – 6 – 8 – 5 – 2.
Варіант 2. ПМ 1: 1 – 3;	ПМ 2: 4 – 3 – 6 – 7;	ПМ 3: 6 – 8 – 5 – 2.
Варіант 3. ПМ 1: 1 – 3;	ПМ 2: 4 – 3 – 6 – 8 – 5 – 2;	ПМ 3: 6 – 7.
Варіант 4. ПМ 1: 1 – 3 – 4;	ПМ 2: 3 – 6;	ПМ 3: 7 – 6 – 8 – 5 – 2.
Варіант 5. ПМ 1: 1 – 3 – 4;	ПМ 2: 3 – 6 – 7;	ПМ 3: 6 – 8 – 5 – 2.
Варіант 6. ПМ 1: 1 – 3 – 4;	ПМ 2: 3 – 6 – 8 – 5 – 2;	ПМ 3: 6 – 7.
Варіант 7. ПМ 1: 1 – 3 – 6;	ПМ 2: 3 – 4;	ПМ 3: 7 – 6 – 8 – 5 – 2.
Варіант 8. ПМ 1: 1 – 3 – 6 – 7;	ПМ 2: 3 – 4;	ПМ 3: 6 – 8 – 5 – 2.
Варіант 9. ПМ 1: 1 – 3 – 6 – 8 – 5 – 2;	ПМ 2: 3 – 4;	ПМ 3: 6 – 7.

Враховуючи наявність багатьох варіантів побудови ПМ на графі-дереві, для спрощення такої побудови введемо до наведених правил три обмеження.

Обмеження 1. Початковою вершиною чергового ПМ є непарна вершина з найменшим номером.

Обмеження 2. За можливості продовження ПМ в різних напрямах обирається той, що прямує до вершини з найменшим номером.

Обмеження 3. Кінцевою вершиною ПМ є перша після початкової непарна вершина.

Побудову ПМ на графі-дереві, поданому на рис. 4, виконану за наведеними правилами і обмеженнями ілюструє рис. 5 (*а* — граф-дерево перед побудовою ПМ 1: 1 – 3; *б* — граф-дерево перед побудовою ПМ 2: 2 – 5 – 8 – 6; *в* — граф-дерево перед побудовою ПМ 3: 4 – 3 – 6 – 7).

Насамкінець зазначимо, що оператор поштового зв'язку зацікавлений не лише в мінімізації сумарної протяжності ПМ, а й у мінімізації їх сумарної кількості, оскільки при цьому зменшується кількість поштових автомобілів, зменшуються амортизаційні відрахування, зменшуються витрати на зберігання, технічне обслуговування і ремонт цих автомобілів, скорочується кількість бригад водіїв тощо.

Оскільки сумарна кількість ПМ визначається сумарною кількістю непарних вершин мінімального покриваючого графа-дерева, доцільно в процесі формування фрагментів такого графа-дерева контролювати зв'язність його вершин і за наявності перевірних ребер однакової протяжності обирати те з них, якому відповідає мінімальна сумарна кількість непарних вершин графа-дерева.

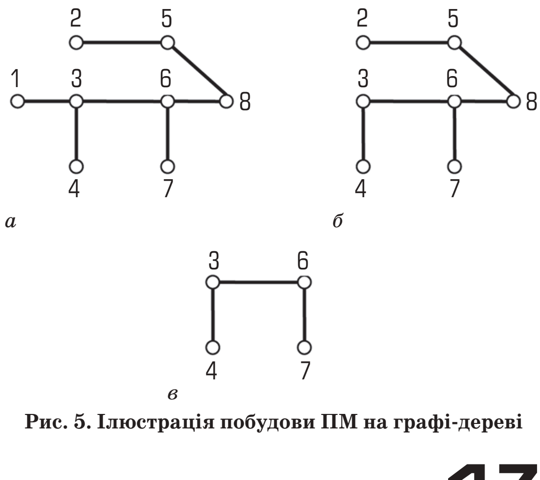

Рис. 5. Ілюстрація побудови ПМ на графі-дереві

Враховуючи, що в результаті формування того чи іншого фрагмента графа-дерева зв'язність обох вершин перевірного ребра зростає на одиницю, парна вершина цього ребра стає непарною, а непарна — парною. При цьому сумарна кількість непарних вершин може залишатися незмінною, збільшуватися на 2 або зменшуватися на 2.

Значення сумарної кількості непарних вершин графа-дерева в процесі формування його фрагментів подано в табл. 4. Початкова зв'язність усіх вершин графа-дерева вважається нульовою. Вершини перевірного ребра позначено як x і y.

Таблиця 4

Значення сумарної кількості непарних вершин графа-дерева в процесі формування його фрагментів

Операція побудови графа-дерева	Значення зв'язності вершин перевірного ребра				Сумарна кількість непарних вершин
	До формування фрагмента		Після формування фрагмента		
	x	y	x	y	
Формування нового фрагмента	0	0	1	1	Збільшується на 2
Розширення існуючого фрагмента	Парна Непарна	0 0	Парна Непарна	1 1	Збільшується на 2 Залишається незмінною
Об'єднання двох існуючих фрагментів	Парна Парна Непарна Непарна	Парна Непарна Парна Непарна	Непарна Непарна Парна Парна	Непарна Парна Непарна Парна	Збільшується на 2 Залишається незмінною Залишається незмінною Зменшується на 2

Так, при формуванні табл. 3 на кроці 6 виникла альтернатива: обирати наступним перевірним ребром ребро (3,6) або ребро (4,7), протяжність кожного з яких дорівнює 3.

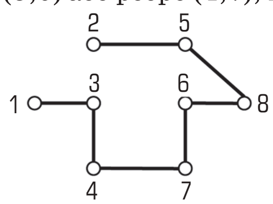

Рис. 6. Граф-дерево з мінімальною кількістю непарних вершин

Оскільки кожна з вершин 3 і 6 перевірного ребра (3,6) до об'єднання фрагментів графа-дерева мала зв'язність 2, а після об'єднання цих фрагментів — зв'язність 3, сумарна кількість непарних вершин графа-дерева збільшилась на 2; у той же час, оскільки кожна з вершин 4 і 7 перевірного ребра (4,7) до об'єднання фрагментів графа-дерева мала зв'язність 1, а після об'єднання цих фрагментів — зв'язність 2, сумарна кількість непарних вершин графа-дерева зменшилась на 2, отже перевагу слід було віддати перевірному ребру (4,7).

Граф-дерево з мінімальною кількістю непарних вершин, рівною 2, а отже, лише з одним ПМ: 1 – 3 – 4 – 7 – 6 – 8 – 5 – 2 наведено на рис. 6.

Висновки

1. Спроба пошуку сукупності ПМ мінімальної сумарної протяжності перебором усіх можливих варіантів не під силу ані для сучасних, ані для майбутніх ЕОМ.

2. Побудова сукупності ПМ мінімальної сумарної протяжності може бути зведена до розв'язання двох задач — задачі побудови на графі МПЗ мінімального покриваючого графа-дерева і задачі побудови на зазначеному графі-дереві мінімальної сукупності ПМ.

3. Мінімізація кількості ПМ мінімальної сумарної протяжності потребує при розгляданні перевірних ребер графа МПЗ рівної протяжності обирати те перевірне ребро, якому відповідає мінімальна кількість непарних вершин мінімального покриваючого графа-дерева, а отже, і мінімальна кількість ПМ.

Рецензент: доктор техн. наук, професор **В. М. Тупкало**, Державний університет телекомунікацій, Київ.

Л. Е. Ящук

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ ПОЧТОВЫХ МАРШРУТОВ МИНИМАЛЬНОЙ СУММАРНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ

Решение актуальной задачи почтовой связи — построения минимальной совокупности почтовых маршрутов (ПМ) минимальной суммарной протяженности — сведено к решению двух задач: задачи построения на графе сети почтовой связи (СПС) минимального покрывающего графа-дерева и задачи построения на указанном графе-дереве минимальной совокупности ПМ.

Ключевые слова: СПС; объект почтовой связи (ОПС); ПМ; граф СПС; минимальный покрывающий граф-дерево; связность вершин графа; четная вершина графа; нечетная вершина графа.

L. O. Yashchuk

CONSTRUCTING THE MINIMAL COLLECTION OF THE POSTAL ROUTS WITH MINIMAL TOTAL LENGTH

The solving of the urgent postal problem that is constructing the minimal collection of the postal routs with minimal total length is devided as two problems — problem with constructing on postal network graph minimal covering graph-tree and problem with constructing on this graph-tree minimal collection of the postal routs.

Keywords: postal network; postal object; postal rout; postal network graph; minimal covering graph-tree; vertex of the graph connectedness; twin vertex of the graph; odd vertex of the graph.