УДК 519.873

# МОДЕЛЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО – ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ЧАСТИЧНОГО КАЛЕНДАРНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Песчанский А.И., Приходько Р.А.

Одной из важных проблем надёжности функционирования технических систем является организация технического обслуживания (ТО). Модели и стратегии ТО одно- и двухкомпонентных систем изучались достаточно интенсивно. Обзор работ по этой тематике можно найти в работах [1, 2]. Исследование многокомпонентных систем вызывает существенные трудности, связанные с размерностью и структурой системы. С классами моделей и методов исследования таких систем можно ознакомиться по работам [1-3].

В данной статье исследуется многокомпонентная система, имеющая следующую функциональную структуру: часть элементов системы соединены последовательно, а остальные параллельно. Распределения времен безотказной работы элементов и их восстановления предполагаются общего вида. В некоторый момент времени после начала работы проводится предупредительное ТО (полное обновление) элементов только последовательной части системы.

Требуется найти основные стационарные характеристики системы и определить оптимальные сроки проведения ТО.

Для решения задачи привлекается аппарат теории полумарковских процессов с дискретно – непрерывным фазовым пространством состояний. Приближённые значения стационарных характеристик системы находятся с помощью метода, основанного на алгоритме фазового укрупнения [4,5].

Система состоит из N+M технологических ячеек (ТЯ), из которых N ТЯ соединены последовательно между собой, а остальные M ТЯ – параллельно. Время безотказной работы i-той ТЯ из последовательной цепочки – случайная величина (СВ) $\alpha_i^p$ с функцией распределения (ФР) $F_i^p(t) = P(\alpha_i^p \le t)$ $i = \overline{1,N}$, время безотказной работы j-той ТЯ из параллельной части системы - СВ $\alpha_j$ с ФР $F_j(t) = P(\alpha_j \le t)$, $j = \overline{1,M}$. Индикация отказа ТЯ происходит мгновенно и восстановление (аварийное) i-й ТЯ из последовательной части системы длится случайное время $\beta_i^p$ с ФР $G_i^p(t) = P(\beta_i^p \le t)$, $i = \overline{1,N}$, а восстановление j-й ТЯ из параллельной части – случайное время $\beta_j$ с ФР $G_j(t) = P(\beta_j \le t)$, $i = \overline{1,M}$.

Отказ системы наступает либо в результате отказа любой ТЯ из последовательной цепочки, либо в результате отказа всех ТЯ, соединённых параллельно. При отказе системы работоспособные ТЯ отключаются, после возобновления работы отключённые ТЯ включаются в работу с теми же характеристиками безотказности, с которыми их застал отказ.

В момент начала работы системы (нулевой момент времени) планируется проведение предупредительного ТО последовательной части системы через время, получаемое как реализация СВ $\gamma$ с ФР $\Phi(t) = P(\gamma \le t)$. При этом ТО проводится только в том случае, если система находится в работоспособном состоянии. В противном случае проведение ТО перепланируется через время $\gamma$. Длительность проведения ТО – СВ $\zeta$ с ФР $\Psi(t) = P(\zeta \le t)$. В момент окончания ТО последующее ТО перепланируется. Предполагается, что после проведения любой из восстановительных работ ТЯ полностью обновляются. СВ $\alpha_i^p, \beta_i^p$, $i = \overline{1,N}$, $\alpha_i, \beta_i$, $i = \overline{1,M}$, $\gamma$, $\zeta$ предполагаются независимыми в совокупности, имеющими соответствующие плотности распределения $f_i(t)$, $f_i^p(t)$, $g_i^p(t)$, $g_i(t)$, $\varphi(t)$,

$\psi(t)$ конечные математические ожидания $M\alpha_i^p$, $M\beta_i^p$, $M\alpha_i$, $M\beta_i$, $M\gamma$, $M\zeta$. Требуется определить следующие стационарные характеристики системы при условии быстрого восстановления её элементов: среднюю наработку на отказ $T_+$, среднее время восстановления $T_-$, коэффициент готовности Кг; найти оптимальные моменты проведения ТО последовательной части для достижения максимального значения коэффициента готовности.

Построим полумарковскую модель рассматриваемой системы. Введём следующую кодировку физических состояний ТЯ: 1 – ТЯ находится в работоспособном состоянии, 0 – в отказовом состоянии. Кодами физических состояний системы будут совокупности двух двоичных векторов $\bar{d}$ *и* $\bar{b}$. Компоненты N-мерного вектора $\bar{d}$ описывают состояния ТЯ из последовательной части, а компоненты M – мерного вектора $\bar{b}$ - состояния ТЯ из параллельной части системы.

Фазовое пространство полумарковских состояний рассматриваемой системы S имеет вид:

$$E = \{i\bar{d}\bar{x}^{(i)}\bar{b}\bar{y}z, \quad i = \overline{1,N}; \quad \bar{d}\bar{x}j\bar{b}\bar{y}^{(j)}z, \quad j = \overline{1,M}; \quad 0\bar{d}\bar{x}\bar{b}\bar{y}, \quad k\bar{y}, k = 0,1\},$$

где i(j) – номер ТЯ, изменившей своё состояние последней, $\bar{x} = (x_1,...x_N), x_k$ - время, оставшееся до ближайшего изменения состояния к-ой последовательной ТЯ, $k = \overline{1,N}$; $\bar{y} = (y_1,...y_M), y_k$ - время, оставшееся до ближайшего изменения состояния к-ой параллельной ТЯ, $k = \overline{1,M}$; $\bar{x}^{(i)}, \bar{y}^{(j)}$ - векторы, у которых соответственно i-я и j-я компоненты равны нулю, z – время до ближайшего планового момента проведения ТО. Кодом $0\bar{y}$ обозначено начало проведения ТО, $1\bar{y}$ - начало работы системы после ТО, $0\bar{d}\bar{x}\bar{b}\bar{y}$ - наступление планового момента проведения ТО, которое не проводится вследствие нахождения системы в отказе.

Для нахождения приближённых значений стационарных характеристик используем метод, основанный на алгоритме фазового укрупнения [4,5].

Предположим, что времена аварийного восстановления ТЯ и длительность ТО зависят от некоторого малого параметра $\varepsilon$ так, что для $\beta_i^p = \beta_i^{p,\varepsilon}$, $\beta_j = \beta_j^\varepsilon$, $\zeta = \zeta^\varepsilon$ справедливы предельные равенства $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} M\beta_i^{p,\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} M\beta_j^\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} M\zeta^\varepsilon = 0$.

Опорная система имеет пространство состояний:

$$E_0 = \{\ i\bar{1}^{(i)}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z, i\bar{1}\bar{x}^{(i)}\bar{1}\bar{y}z,\ i = \overline{1,N};\ \bar{1}\bar{x}j\bar{1}^{(j)}\bar{y}^{(j)}z,\ \bar{1}\bar{x}j\bar{1}\bar{y}^{(j)}z,\ j = \overline{1,M};\ 0\bar{y};\ 1\bar{y}\ \},$$

где $\bar{1}$ - вектор, все компоненты которого равны 1, $\bar{1}^{(i)}(\bar{1}^{(j)})$ – вектор, у которого i-я (j-я) компонента равна 0, остальные 1.

Временная диаграмма функционирования опорной системы приведена на рис. 1.

Фазовое пространство системы $E$ разобьём на два непересекающихся подмножества $E_+$ и $E_-$: $E_+$ - подмножество работоспособных состояний, $E_-$ - отказовых состояний. Приближённые значения стационарных характеристик системы: среднюю наработку на отказ $T_+$, среднее время восстановления $T_-$, коэффициент готовности *Кг,* найдём по формулам [4,5]

$$T_+ \approx \frac{\int\limits_{E_+} m(x)\rho(dx)}{\int\limits_{E_+} \rho(dx)P(x,E_-)}, T_- \approx \frac{\int\limits_{E_-} m(x)\rho(dx)}{\int\limits_{E_+} \rho(dx)P(x,E_-)}, Кг = \frac{T_+}{T_+ + T_-}, \tag{1}$$

где $\rho(\bullet)$ – стационарное распределение ВЦМ $\{\xi_n^0, n \ge 0\}$ опорной системы; $m(x)$ – средние времена пребывания в состояниях исходной системы; $P(x, E_-)$ – вероятности переходов ВЦМ $\{\xi_n, n \ge 0\}$ исходной системы из работоспособных состояний в отказовые.

 ISBN 7-776-8361-7

Стационарное распределение $\rho(\bullet)$ ВЦМ $\{\xi_n^0, n \geq 0\}$ удовлетворяет системе интегральных уравнений

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\rho(i\overline{1}^{(i)}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z) = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ x_i=0}}^{N} \int\limits_0^{\infty} f_j^p(t+x_j)\rho\left(j\overline{1}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})^{(j)}\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})(z+t)\right)dt + \\
+ \sum\limits_{j=1}^{M} \int\limits_0^{\infty} f_j(t+y_j)\rho\left(\overline{1}(\overline{x}^{(i)}+\overline{t})j\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})^{(j)}(z+t)\right)dt + \\
+ \int\limits_0^{\infty} f_i^p(t)\prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{N} f_l^p(t+x_l)\varphi(z+t)\rho(1(\overline{y}+\overline{t}))dt, i=\overline{1,N}, \\
\rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\overline{x}^{(j)}z) = \sum\limits_{\substack{l=1 \\ y_j=0}}^{M} \int\limits_0^{\infty} f_l(t+y_l)\rho\left(\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})l\overline{1}(\overline{y}^{(j)}+\overline{t})^{(l)}(z+t)\right)dt + \\
+ \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\infty} f_i^p(x_i+t)\rho\left(i\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})^{(i)}\overline{1}(\overline{y}^{(j)}+\overline{t})(z+t)\right)dt + \\
+ \int\limits_0^{\infty} \varphi(t+z)\prod\limits_{i=1}^{N} f_i^p(t+x_i)\rho(1(\overline{y}^{(j)}+\overline{t}))dt, j=\overline{1,M}, \\
\rho(0\overline{y}) = \int\limits_0^{\infty} \varphi(t)\prod\limits_{i=1}^{N} \overline{F}_i^p(t)\rho(1(\overline{y}+\overline{t}))dt + \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{R_+^{N,i}} d\overline{x}^{(i)} \int\limits_0^{\infty} \overline{F}_i(t)\rho\left(i\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})^{(i)}\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})t\right)dt + \\
+ \sum\limits_{j=1}^{M} \int\limits_0^{\infty} f_j(t+y_j)dt \int\limits_{R_+^N} \rho\left(\overline{1}(\overline{x}+\overline{t})j\overline{1}(\overline{y}+\overline{t})^{(j)}t\right)d\overline{x}, \\
\rho(0\overline{y}) = \rho(1\overline{y}), \rho(i\overline{1}^{(i)}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z) = \rho(i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z), \rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\overline{y}^{(j)}z) = \rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{y}^{(j)}z), \\
2\int\limits_{R_+^M} \rho(0\overline{y})d\overline{y} + \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_{R_+^{N,i}} d\overline{x}^{(i)} \int\limits_{R_+^M} d\overline{y} \int\limits_0^{\infty} \rho(i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z)dz + \\
+ 2\sum\limits_{j=1}^{M} \int\limits_{R_+^N} d\overline{x} \int\limits_{R_+^{M,j}} d\overline{y}^{(j)} \int\limits_0^{\infty} \rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{x}^{(i)}z)dz = 1,
\end{array}
\right. \tag{2}
$$

где $R_+^N (R_+^M)$ - N(M) – мерные ортанты векторов с неотрицательными компонентами; $R_+^{N,i} = \{\overline{x}^{(i)}, x_k \geq 0, k=\overline{1,N}\}$, $R_+^{M,j} = \{\overline{y}^{(j)}, y_l \geq 0, l=\overline{1,M}\}$.

Решения системы (2) определяются формулами (3):

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\rho(i\overline{1}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z) = \rho(i\overline{1}^{(i)}\overline{x}^{(i)}\overline{1}\overline{y}z) = \rho_0 \prod\limits_{j=1}^{M} \overline{F}_j(y_j) \int\limits_0^{\infty} h_i^p(t) \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{N} v_l^p(t, x_l)\varphi(z+t)dt, \quad i=\overline{1,N}, \\
\rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}\overline{y}^{(j)}z) = \rho(\overline{1}\overline{x}j\overline{1}^{(j)}\overline{y}^{(j)}z) = \rho_0 \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{M} \overline{F}_l(y_l) \int\limits_0^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{N} v_i^p(t, x_i)\varphi(z+t)dt, \quad i=\overline{1,M}, \\
\rho(0\overline{y}) = \rho(1\overline{y}) = \rho_0 \prod\limits_{j=1}^{M} \overline{F}_j(y_j), \\
\rho_0 = \dfrac{1}{2}\left[\prod\limits_{l=1}^{M} M\alpha_l \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{N} \int\limits_0^{\infty} h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt + M\gamma \sum\limits_{j=1}^{M} \dfrac{1}{M\alpha_j}\right)\right]^{-1}.
\end{array}
\right. \tag{3}
$$

где $\overline{F}_j(t) = 1 - F_j(t)$, $\overline{\Phi}(t) = 1 - \Phi(t)$, $h_i^p(t)$ - плотность функции восстановления $H_i^p(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_i^{p*(n)}(t)$ рекуррентного потока, порождённого СВ $\alpha_i^p$, $v_i^p(t, x_i)$ - плотность функции распределения остаточного времени восстановления (перескока).

Приближённое значение стационарного коэффициента готовности, используя (1) находится по формуле

$$Кг = \frac{T_+}{T_+ + T_-} \approx \frac{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)}{M\gamma\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\int_0^{\infty}h_i^p(t)\overline{\Phi}(t)dt}.$$

В работе [1] доказано, что локальные экстремумы дробно – линейного функционала достигаются на вырожденных функциях распределения. Если $\overline{\Phi}(t)=\begin{cases}1, t\in[0,\tau]\\0, t\in(\tau,+\infty]\end{cases}$, тогда коэффициент готовности Кг зависит от параметра $\tau$ :

$$Кг(\tau) \approx \frac{\tau\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)}{\tau\left(1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}\right)+M\zeta+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p H_i^p(\tau)},$$

Оптимальный момент времени $\tau_K$ проведения ТО последовательной части системы, при которых Кг достигает экстремального значения, находится из уравнения

$$\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p\left(\tau\cdot h_i^p(\tau)-H_i^p(\tau)\right)=M\zeta, \qquad (4)$$

В случае существования единственного корня (4) оптимальные показатели качества функционирования системы определяются формулой

$$Кг_{max} \approx \frac{1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}}{1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}+\sum_{i=1}^{N}M\beta_i^p h_i^p(\tau_K)}. \qquad (5)$$

Если уравнение (4) имеют несколько корней, оптимальные значения $\tau$ находятся прямой подстановкой каждого их них в формулу (5) для случая единственного корня с последующим отбором лучшего из них, причём необходимо учесть значение показателя при $\tau=\infty$:

$$Кг(\infty) \approx \frac{1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}}{1+\sum_{j=1}^{M}\frac{M\beta_j}{M\alpha_j}+\sum_{i=1}^{N}\frac{M\beta_i^p}{M\alpha_i^p}}.$$

С помощью предложенной в работе методики определяются оптимальные сроки проведения ТО системы для достижения экстремальных значений экономических показателей качества функционирования системы. В качестве примера их использования приведём задачу: имеется 6 последовательно соединённых ячеек, пять из которых - средней надёжности и одна (шестая)– низкой. Требуется оценить, какой из следующих способов наиболее экономически целесообразен:

1. проводить плановое ТО всех шести ТЯ.
2. дублировать низконадёжную ТЯ (поставить параллельно ей нагруженный резерв), и проводить ТО только последовательной цепочки (пяти ТЯ средней надёжности).

 ISBN 7-776-8361-7

Таблица 1.

Исходные данные системы ( $i = \overline{1,5}$ , $j = \overline{6,7}$ )

| $\lambda_i, ч^{-1}$ | $k_i$ | $M\alpha_i, ч$ | $\mu_i, ч^{-1}$ | $m_i$ | $M\beta_i, ч$ | $\lambda_j, ч^{-1}$ | $k_j$ | $M\alpha_j, ч$ | $\mu_j, ч^{-1}$ | $m_j$ | $M\beta_j, ч$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,05 | 4 | 80,00 | 1,50 | 4 | 2,67 | 0.1 | 4 | 40 | 1.5 | 4 | 2,67 |

| $\mu_{TO}, ч^{-1}$ | $m_{TO}$ | $M\zeta, ч$ |
|---|---|---|
| 4,00 | 4 | 1,00 |

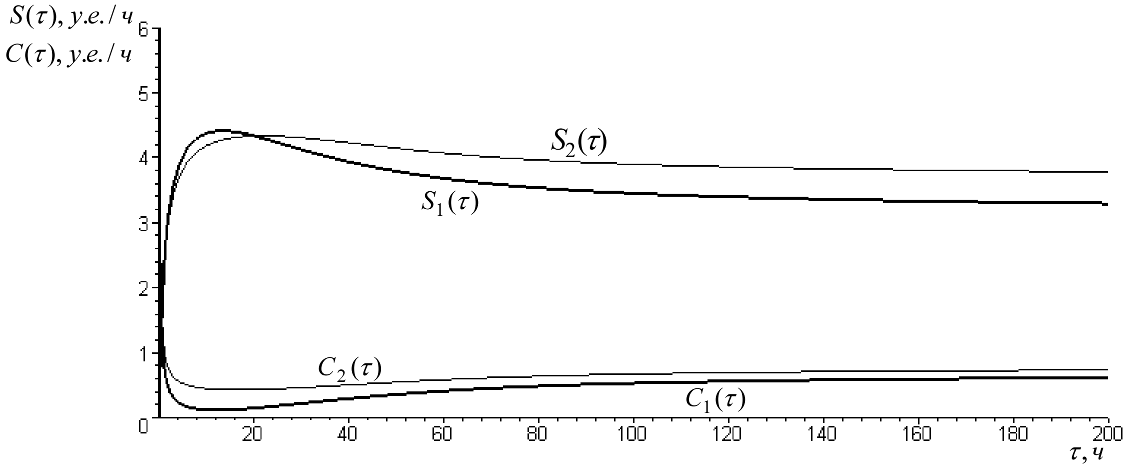


Рис. 1. Сравнение стратегий ТО: Зависимость средней прибыли S и средних затрат C от времени между ТО соответственно для первой и второй стратегий ТО

The mathematical model is constructed and the approximated values of reliability stationary characteristics of consistently - parallel system with partial calendar maintenance service of its consecutive part are found. Optimum terms of maintenance service realization are determined.

1. Барзилович Е.Ю. Каштанов В.А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. – М.: Сов. радио, 1971. – 272 с.
2. Каштанов В.А., Медведев А.И. Теория надёжности систем (теория и практика). – М.: “Европейский центр по качеству”, 2002. – 470 с.
3. Dekker R., Wildeman R.A. A review of multi-component maintanence models with economic dependence// Math. methods of oper. res. – 1997. – 45. – P. 411 – 435.
4. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Процессы марковского восстановления в задачах надёжности систем. – К.: Наук. думка, 1982. – 236 с.
5. Корлат А.Н., Кузнецов А.Н., Новиков М.И., Турбин А.Ф. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания. – Кишинёв: Штиинца, 1991. – 209 с.