МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 519.6

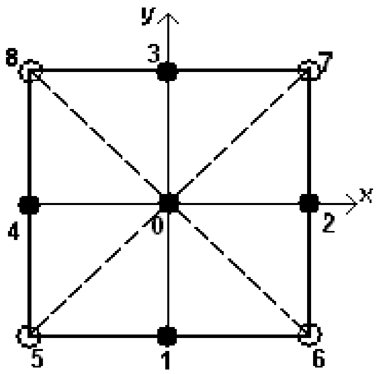
ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

Хомченко А.Н., Моисеенко С.В.

Постановка проблемы. Основная проблема алгебраизации задач теории потенциала связана с обеспечением достаточной точности и вычислительной устойчивости дискретных аналогов уравнения Лапласа. Конечно-разностные аналоги рассматриваются здесь с точки зрения конечно-элементной техники интерполяции. Это позволяет изучить зависимость структуры интерполянта от схемы расположения расчетных узлов в шаблоне. Подходящий интерполянт используется для исследования характера интерполирующей поверхности в окрестности контрольного узла (в центре шаблона). Такой анализ дает возможность установить причины возникновения невязок в межузловых промежутках.

Анализ предшествующих публикаций и цели статьи. Одно из первых применений МКР для решения уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле связывают с появлением вычислительного шаблона «крест» (Л.Ричардсон, 1910). Ключевые идеи метода, а также вопросы устойчивости разностных схем изложены в [1-4]. Обычно КР-аналоги производных конструируют с помощью тейлоровских разложений искомой функции в окрестности контрольного узла с последующим усечением ряда. Наша цель – аппроксимировать потенциальное поле путем прямого построения на шаблоне МКР интерполяционного полинома в форме Лагранжа, как это принято делать в методе конечных элементов (МКЭ). В зависимости от расположения расчетных узлов мы рассматриваем стандартный «крест», жестко вмонтированный в декартову систему прямоугольных координат, и ортогональный «крест», повернутый на 45^0.

Основная часть. Пусть контрольный узел O помещен в начало координат (рис.1).



$|x| \le 1;$
$|y| \le 1.$

Рис.1. Две основные схемы МКР.

Не уменьшая общности рассуждений, будем считать, что ячейки сетки имеют форму квадрата с единичной стороной. Сплошными линиями изображен стандартный «крест», пунктиром – повернутый. Конечный носитель гармонической функции – квадрат 5678.

Начнем с построения интерполяционного полинома на стандартном «кресте». Учитывая число расчетных узлов, будем строить полином в виде

$$P(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 \qquad (1)$$

ISBN 7-776-8361-7

Наш выбор продиктован естественным стремлением сохранить геометрическую изотропию поля. В решении (1) мы реализуем нетрадиционный вариант разделения переменных. Традиционно разделение переменных достигается представлением решения в виде произведения функций, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных, чем в исходном уравнении $f''_{xx} + f''_{yy} = 0$. Однако, для ряда задач проблема разделения переменных решается другим способом. Например, представление решения в виде суммы функций, каждая из которых зависит от меньшего числа переменных. Такой метод используют в классической механике при решении дифференциальных уравнений [5]. Поверхность (1) образуется перемещением (трансляцией) образующей параболы второй степени по направляющей параболе второй степени. В теории оболочек такие поверхности называют трансляционными. Очевидно, что эти параболы имеют различные направления выпуклости, так как $f''_{xx} \cdot f''_{yy} < 0$.

Использование интерполяционной гипотезы Лагранжа

$$P(x_i, y_i) = f_i \qquad (i = 0,1,2,3,4)$$

приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров α_i. Подставляя коэффициенты α_i в (1), путем несложных преобразований приведем полином к форме Лагранжа:

$$P(x,y) = \sum_{i=0}^{4} L_i(x,y) \cdot f_i\,, \tag{2}$$

где f_i – узловые значения функции на стандартном шаблоне; $L_i(x,y)$ – коэффициенты Лагранжа, обладающие свойствами:

$$L_i(x_k,y_k) = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

$$\sum_{i=0}^{4} L_i = 1.$$

Приведем явные выражения коэффициентов Лагранжа на стандартном «кресте»:

$$L_0(x,y) = 1 - x^2 - y^2; \quad L_{1,3}(x,y) = \frac{1}{2}(y^2 \mp y); \quad L_{2,4}(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 \pm x).$$

Перейдем к построению интерполяционного полинома на повернутом «кресте». Очевидно, что и в этом случае полином должен содержать пять параметров. Однако, попытки воспользоваться формой (1), наталкиваются на непреодолимые трудности, так как матрица СЛАУ вырождается. Попытаемся использовать полином

$$P(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2y^2. \tag{3}$$

Как видим, интерполяционный полином зависит от ориентации шаблона на конечном носителе. Теперь для аппроксимации потенциального поля мы имеем следующий полином в форме Лагранжа:

$$P(x,y) = \sum_{i} L_i(x,y) \cdot f_i, \quad (i = 0, 5, 6, 7, 8), \tag{4}$$

где $L_0(x,y) = 1 - x^2y^2; \quad L_{5,7}(x,y) = \frac{1}{4}(x^2y^2 + xy \mp x \pm y);$

$$L_{6,8}(x,y) = \frac{1}{4}(x^2y^2 - xy \pm x \mp y)$$

На рис.2 и 3 изображены функции формы (коэффициенты Лагранжа) в центральном и периферийном узлах для стандартного и повернутого шаблонов соответственно.

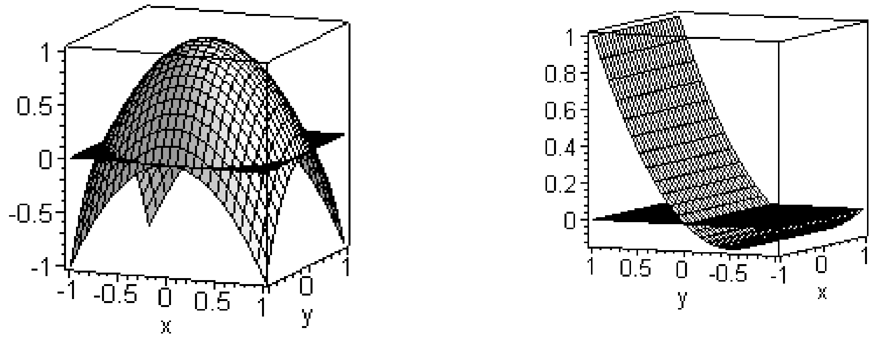


Рис.2 Функции формы $L_0(x,y)$ и $L_3(x,y)$ на стандартном шаблоне.

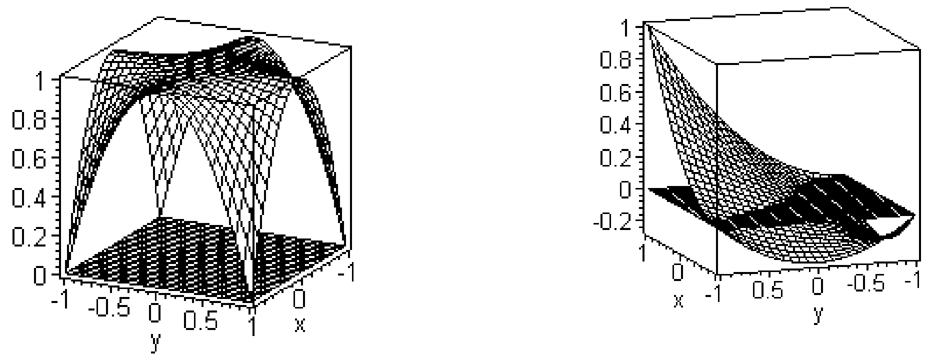
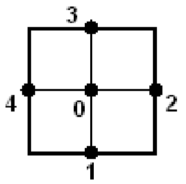
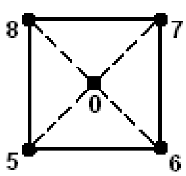


Рис.3 Функции формы $L_0(x,y)$ и $L_7(x,y)$ на повернутом шаблоне.

Как и следовало ожидать, независимо от ориентации шаблона обращение лапласиана в нуль дает одинаковые КР-аналоги уравнения:



$$f_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} f_i \,, \tag{5}$$



$$f_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=5}^{8} f_i \,, \tag{6}$$

Заметим, что подстановка (4) в уравнение Лапласа дает невязку

$$\delta = 0.5(x^2 + y^2)(\sum_{i=5}^{8} f_i - 4f_0),$$

которая зависит от координат произвольной точки в носителе. Возможно, именно эта за-висимость – одна из причин вычислительной неустойчивости на повернутом шаблоне [6].

 ISBN 7-776-8361-7

Чтобы получить вычислительную формулу повышенной точности (на 9 узлов), достаточно наложить один шаблон на другой, а формулу (5) и (6) взвесить по правилу Симпсона с коэффициентами $\frac{4}{5}$ и $\frac{1}{5}$ соответственно:

$$f_0 = \frac{1}{20}(4\sum_{i=1}^{4} f_i + \sum_{i=5}^{8} f_i).$$

Выводы. Для построения КР-аналогов уравнения Лапласа вместо тейлоровских разложений в окрестности контрольного узла можно использовать специальные полиномы в форме Лагранжа, как это принято в МКЭ. Представляет интерес прямое построение девятипараметрического полинома Лагранжа на шаблоне повышенной точности с целью получения соответствующего КР-аналога.

In the article the possibility of construction of a polynomial in the shape of the Lagrange for interpolation of a potential field for the first and second the basic plans of method of finite differences from the point of view of a finite element method is described. It is shown, that the boosted exactitude of finite-difference of the equation of the Laplace is reached by weighing of two basic plans with Simpson's rule (1:4).

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.: Гостехиздат, 1949.- С.179-258.
2. Гавурин М.К. Лекции по методам вычислений. - М.: Наука, 1971.-С.131-187.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.- С.257-269.
4. Филин А.П. Приближенные методы математического анализа, используемые в механике деформируемых тел. - Л.: Стройиздат,1971.- С.127-140.
5. Метьюз Дж., Уокер Р. Математические методы физики. - М.: Атомиздат, 1972.- 392с.
6. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. - М.: Мир, 1977.- 349с.