УДК 65.012

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ ГОРНОРУДНОГО ПРЕДПРИЯТИЯ, ФУНКЦИОНИРУЮЩЕГО В РАЗЛИЧНЫХ РЫНОЧНЫХ УСЛОВИЯХ.

Багашов И. И.

Повсеместное использование компьютерной техники для решения задач экономики, как ни парадоксально, резко снизило актуальность и приоритетность решения оптимизационных задач управления экономическими процессами, и в первую очередь, на уровне конкретного предприятия. Наша славянская привязанность к «громким и умным» фразам, всевозможным советам и здесь сделала свое дело. Тысячи компьютеров на наших предприятиях заменили нам работу печатающих машинок, калькуляторов и прочих устройств. Но, в своей основе, они стали быстрее решать те традиционные задачи, которые до этого решались и без них. Практически нет применения дорогостоящей техники для решения новых задач оптимизационного плана.

И здесь свое слово должна сказать наша наука, которая должна «привязать» уже имеющиеся математические методы оптимизации к конкретным предприятиям и к условиям их работы с разработкой и внедрением соответствующего программного обеспечения.

Одной из таких проблем, а именно математическому моделированию функционирования горнорудного предприятия в различных рыночных условиях и посвящена эта статья.

Прежде всего, об определениях. Под математическим моделированием будем понимать по [1] процесс исследования системы (в данном случае предприятия) на основе использования математических моделей. В качестве рыночных условий, в которых может работать предприятие, рассмотрим две основные ситуации [2]:

- совершенная конкуренция;
- монополия.

Данное предприятие осуществляет свою деятельность в условиях совершенной конкуренции, если [2]:

- цена на производимую продукцию предприятия является фиксированной;
- цены на используемые ресурсы также являются фиксированными;
- предприятие имеет возможность сбыть всю производимую продукцию;
- предприятие имеет возможность приобретать любое количество необходимых для производства ресурсов;
- цены на производимую продукцию и на используемые ресурсы не зависят от принимаемых другими предприятиями, производящими аналогичную продукцию, решений.

Это означает, что данное предприятие производит такое количество продукции, что изменение объемов выпуска этой продукции предприятием не сказывается на цене ее на рынке продукции. То же касается и ресурсов.

Напротив, предприятие функционирует в условиях монополии, если оно является единственным поставщиком этой продукции на рынке. Ясно, что изменение объемов выпуска продукции на этом предприятии прямо влияет на цену продукции. Можно даже сказать больше, цена продукции предприятия на рынке зависит от объема выпуска продукции.

Обозначим через y – выпуск продукции предприятия, а через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - объемы используемых ресурсов. Тогда математическая модель производственной функции:

 ISBN 7-776-8361-7

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_n) . \tag{1}$$

Значение объемов используемых ресурсов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяет системе неравенств:

$$\begin{aligned} &x_i \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n; \\ &\frac{\partial f}{\partial x_i} \ge 0, \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти неравенства определяют экономическую область определения $x_1, x_2 \ldots x_n$.

Пусть в условиях совершенной конкуренции предприятие работает и реализует свою продукцию по цене ρ, а приобретает ресурсы по ценам: $q_1, q_2, \ldots q_n$. Тогда задачей оптимального функционирования предприятия в этих условиях является выпуск такого количества продукции y и приобретение такого количества ресурсов $x_1, x_2 \ldots x_n$, которые максимизируют прибыль предприятия:

$$\Pi = \rho \cdot y - \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \tag{3}$$

Тогда задача максимизации прибыли:

$$\max \left\{ \rho f(x_1, x_2, \ldots x_n) - \sum_{i=1}^{n} q_i x_i \right\} \tag{4}$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} &x_i \ge 0, i = 1,2,\ldots n; \\ &\frac{\partial t}{\partial x_i} \ge 0, i = 1,2,\ldots n. \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку, по определению, производственная функция является функцией вогнутой, а ограничения (5) в практических задачах определяют выпуклое множество, то вышестоящую задачу можно решить исходя из условий Куна-Таккера для задач на условный экстремум [3]. Суть этих условий – это сведение задачи на условный экстремум с условиями типа неравенства к задаче на условный экстремум с условиями типа равенства. Для этих целей вводятся дополнительные неизвестные k_i $(i = 1,2,\ldots n)$ и l_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ такие что:

$$\begin{aligned} &-x_i + k_1^2 = 0, \ i = 1,2,\ldots n; \\ &-\frac{\partial f}{\partial x_i} + l_i^2 = 0, \ i = 1,2,\ldots n. \end{aligned} \tag{6}$$

Тогда функция Лагранжа:

$$\begin{aligned} L(x_1,\ldots x_n, k_1,\ldots k_n, l_1,\ldots, l_n, \lambda_1,\ldots \lambda_{2n}) = \rho f(x_1,\ldots x_n) - \sum_{i=1}^{n} q_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(-x_i + k_i^2\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+i} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_i} + l_i^2\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Необходимые условия для отыскания экстремума:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial k_i} = 0, \quad i = 1,2,...,n; \\
&\frac{\partial L}{\partial k_i} = 0, \quad i = 1,2,.....,n; \\
&\frac{\partial L}{\partial l_i} = 0, \quad i = 1,2,......,n; \\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \lambda = 1,2,....,2n;
\end{aligned} \tag{8}$$

Эти условия определяют следующие соотношения:

$$\begin{cases}
\rho\dfrac{\partial f}{\partial x_i} - q_i - \lambda_i - \lambda_{n+i}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0, \quad i = 1,2,....,n; \\
2k_i\lambda_i = 0, \quad i = 1,2,.....,n; \\
2l_i\lambda_{n+i} = 0, \quad i = 1,2,......,n; \\
-x_i + k_i^2 = 0, -\dfrac{\partial f}{\partial x_i} + l_i^2 = 0, \quad i = 1,2,....,n.
\end{cases} \tag{9}$$

Будем предполагать, что при достижении максимума прибыли не может быть таких условий, при которых потребление хотя бы одного ресурса было равно нулю, что соответствует реальному положению работы большинства предприятий, т.е. $x_i \neq 0, i = 1,2,....,n$. Тогда $k_i \neq 0$ и $л_i = 0$ для $i = 1,2,...,n$. Значит, система первых n уравнений из (9) будет выглядеть так:

$$с\frac{\partial f}{\partial x_i} - q_i - л_{n+i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0, \; i = 1,2,...,n; \tag{10}$$

Пусть n – мерная точка $\bar{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ является точкой, где достигается максимум прибыли предприятия. Если в этой точке для некоторого i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 , \tag{11}$$

то тогда: $l_i = 0$ и $-\lambda_{n+i}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = q_i$. (12)

Тогда по этому ресурсу:

$$-\lambda_{n+i} = \frac{q_i}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \cdot x_i^2}} . \tag{13}$$

Если же в точке $\bar{x}^*$ для ресурса j выполняется условие:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} > 0 , \tag{14}$$

то: $l_j = 0$ и $л_{n+1} = 0$. (15)

Тогда: $\rho\dfrac{\partial f}{\partial x_j} - q_j = 0$, (16)

т.е. предельная производительность ресурса j равна частному от деления цены на ресурс на цену продукции:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{q_j}{p} . \tag{17}$$

 ISBN 7-776-8361-7

В условиях монополии цена на продукцию является функцией от выпуска продукции:

$$p(y)\ . \tag{18}$$

Более того, эта функция является убывающей:

$$\frac{d\rho}{dy} < 0\ . \tag{19}$$

Тогда прибыль предприятия:

$$\Pi = \rho(y)\cdot y - \sum_{i=1}^{n} q_i x_i\ . \tag{20}$$

Используя те же ограничения (5) и введя неизвестные k_i и l_i аналогично (6) получаем функцию Лагранжа:

$$\begin{gathered} L(x_1, x_2, \ldots x_n, k_1, \ldots k_n, l_1, \ldots l_n, y, \lambda_1, \ldots \lambda_{2n}, r) = \rho(y)\cdot y - \sum_{i=1}^{n} q_i x_i + \\ + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\left(-x_i + k_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{n+i}\left(-\frac{\partial f}{\partial x_i} + l_i^2\right) + r\left[y - f(x_1 \ldots x_n)\right]. \end{gathered} \tag{21}$$

В состав неизвестных уже включена и переменная y, обозначающая объем выпуска продукции. Необходимые условия экстремума задаются системой уравнений:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial x_i} = -q_i - \lambda_i - \lambda_{n+i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - r\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,\ldots n; \\ \frac{\partial L}{\partial k_i} = 2\lambda_i k_i = 0,\quad i = 1,2,\ldots n; \\ \frac{\partial L}{\partial l_i} = 2\lambda_{n+i} l_i = 0,\quad i = 1,2,\ldots n; \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{dp}{dy}y + \rho(y) + r = 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -x_i + k_i^2,\quad i = 1,2,\ldots,n;\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_{n+i}} = -\frac{\partial t}{\partial x_i} + l_i^2 = 0, i = 1,2,\ldots,n; \\ \frac{\partial L}{\partial r} = y - f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Как и раньше, предполагаем, что в n-мерной точке $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*)$ в которой достигается максимум прибыли, для всех ресурсов $x_i > 0$. Тогда:

$$k_i \neq 0,\ i = 1,2,\ldots n;\ \text{ и }\ \lambda_i = 0, i = 1,2,\ldots n. \tag{23}$$

Тогда первые n уравнений (22) можно переписать в виде:

$$-q_i - \lambda_{n+i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \left[\frac{dp}{dy}\cdot y + p(y)\right]\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,\ i = 1,2,\ldots n\ . \tag{24}$$

Если в точке $\bar{x}^*$ для некоторого ресурса:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\ , \tag{25}$$

то как и для условий совершенной конкуренции:

$$-\lambda_{n+i}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = q_i\ . \tag{26}$$

В противном случае:

$$\left[\frac{dp}{dy}\cdot y+\rho(y)\right]\frac{\partial f}{\partial x_i}=q_i. \qquad (27)$$

Соотношения (17) и (27) являются основными для определения тактики принятия решений руководством предприятий в условиях работы этих предприятий в различных экономических условиях.

Важнейшим вопросом для применения изложенных выше соотношений в практической деятельности предприятий является определение вида функции $c(y)$ и производственной функции предприятия $y=f(x_1,.....x_n)$. Для этих целей может быть применен широко используемый на практике аппарат нелинейного регрессионного анализа с использованием статистических данных работы предприятий. Причем, в качестве ресурсов можно взять важнейшие из них, а их не так много. Например, для горно-обогатительных комбинатов в качестве основных ресурсов могут быть взяты расходы электроэнергии, технической и оборотной воды.

Рассмотрим модель производственной функции:

$$y=\frac{ax_1x_2..x_n}{(k_1 1/1)(k_2 1/2)..(k_n+1/4)}\ , \qquad (28)$$

где: $a, k_1, k_{2,}..k_n$ - параметры.

Используя статистические данные (среднечасовые значения) работы горнорудного предприятия методом Брандона вычисляем значения параметров. Для практических целей в качестве зависимости цены на продукцию от ее выпуска удобнее всего, как показала практика, взять одну из трех основных зависимостей:

$$\rho(y)=\begin{cases}\rho_0, y\le y_0;\\ \rho_0-\lambda(y-y_0), y>y_0;\end{cases} \qquad (29)$$

$$\rho(y)=\begin{cases}\rho_0, y\le y_0;\\ \rho_0-\lambda\sqrt{y-y_0}, y>y_0;\end{cases} \qquad (30)$$

$$r=\begin{cases}1, & x\in N,\\ 0, & x\notin N,\end{cases} \qquad (31)$$

где: ρ_0, y_0, λ - параметры, которые задаются.

В такой постановке, учитывая точность определения выпуска продукции Δy, достаточно просто возложить функцию определения оптимальных значений ресурсов $x_1^*, x_2^*, ..x_n^*$ на компьютер с использованием соответствующего программного обеспечения.

Выводы. В данной статье рассмотрены основные соотношения, позволяющие оптимизировать работу горнорудного предприятия в различных экономических условиях его функционирования. Несмотря на сложность применяемого математического аппарата, данная работа имеет прямой практический результат: предприятие должно работать с максимальной прибылью. Для практической реализации разработок, изложенных в данной статье, в конце статьи намечены дальнейшие перспективные направления развития этих работ.

This article considers the problems of modeling mining enterprise to function on are enrichment under the circumstances of tough competition and monopolies in modern market to maximize income. Means of production functions and methods of conventional optimization are used to reach this goal.

 ISBN 7-776-8361-7

1. Ситник В.Ф., Карагодова Е.Л. Математические модели в планировании и управлении предприятиями. – К.: Вища школа, 1985.
2. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Математическое моделирование микроэкономических процессов. – Кишинеу: Штиница, 1996.
3. Табак Д., Куо Б. Оптимальное управление и математическое программирование. – М.: 1975.