УДК 519.71

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРУЕМОГО ПРОЦЕССА

Баранов Ю.В., Гречухин А.В., Гагарин В.В.

Введение. Синтез систем обработки реальных сигналов в условиях неопределенности требует решения задач фильтрации, сглаживания и прогнозирования. Все эти задачи заключаются в нахождении наилучшей в определенном смысле оценки исследуемого процесса и сводятся к минимизации некоторого наперед выбранного критерия оценивания. Таким образом, указанные задачи сводятся к построению математической модели исследуемого процесса, вид и параметры которой определяются в процессе решения задачи идентификации.

Простота и удобство использования линейных моделей обеспечили их довольно широкое применение на практике. Однако зачастую такие модели недостаточно адекватно отражают свойства исследуемого процесса, что обусловливает необходимость построения более сложных, нелинейных, моделей. Отсутствие общих рекомендаций для построения подобных моделей существенно усложняет решение задачи получения адекватного математического описания.

Целью данной работы является решение задачи построения нелинейной математической модели, описываемой уравнением Гаммерштейна и достаточно адекватно отражающей свойства довольно широкого круга нелинейных динамических процессов.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу текущего прогнозирования стохастического процесса по данным о его предыстории. Проблема сводится к нахождению оценки данного процесса в реальном времени по мере поступления данных.

В линейном случае эта задача достаточно хорошо исследована и может быть успешно решена с помощью адекватных прогнозирующих регрессионных моделей [1]. Для построения же нелинейной модели прогнозируемого процесса необходимо выбрать структуру модели и определить ее параметры. Достаточно общей и в то же время эффективной является нелинейная модель Гаммерштейна, представляющая собой последовательное соединение нелинейной статической и линейной динамической частей и предложенная для решения задачи идентификации в работе [2].

В момент времени t в нелинейной части модели входной сигнал x(t) преобразовывается в выходной u(t) с помощью нелинейного преобразования $f[x(t)] = u(t)$, а выходной сигнал модели получается пропусканием сигнала u(t) через линейную часть. Таким образом, модель Гаммерштейна имеет вид

$$u(t) = f[x(t)]; \tag{1}$$

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t), \tag{2}$$

где $A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_m q^{-m}; B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \ldots + b_n q^{-n}$.

Задача построения модели (идентификации) заключается в оценивании нелинейной функции $f[\bullet]$ и параметров линейной части модели a_i, b_i, $i = \overline{1,m}; j = \overline{0,n}$.

Решение задачи. Пусть $f[x(t)]$ представляет собой асимметричную кусочно-непрерывную нелинейность [3]

 ISBN 7-776-8361-7

$$u(t)=\begin{cases} f[x(t)], \text{ если } x(t)>0, \\ g[x(t)], \text{ если } x(t)<0, \\ \quad 0, \text{ если } x(t)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Введем последовательность $\{h(t)\}$, определяемую как

$$h(t)=h[x(t)]=\begin{cases} 0, \text{ если } x(t)\ge 0, \\ 1, \text{ если } x(t)<0. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда зависимость выхода нелинейного элемента u(t) от входного сигнала x(t) может быть записана так

$$u(t)=f[x(t)]+\{g[x(t)]-f[x(t)]\}h(t). \tag{5}$$

Аппроксимируем нелинейные функции f [•] и g[•] следующим образом:

$$\begin{aligned} f[x(t)] &= \sum_{i=1}^{r} f_i x^i(t), \\ g[x(t)] &= \sum_{i=1}^{r} g_i x^i(t), \end{aligned} \tag{6}$$

где f_i, g_i –коэффициенты разложения, подлежащие определению (i=1,2,…,r).

В этом случае соотношение (5) принимает вид:

$$u(t)=\sum_{i=1}^{r} f_i x^i(t)+\sum_{i=1}^{r}[g_i-f_i]x^i(t)h(t)=\sum_{i=1}^{r} f_i x^i(t)+\sum_{i=1}^{r} l_i x^i(t)h(t), \tag{7}$$

Где $l_i = g_i - f_i$.

Данное уравнение является линейным относительно неизвестных коэффициентов g_i и f_i.

Пусть линейная часть модели описывается уравнением (2).

Уравнение (2) также является линейным относительно неизвестных параметров a_i (i=1,2,…,m), b_j (j=1,2,…,n).

Так как входным сигналом линейной части модели является выходной сигнал нелинейной части, то подставляя (7) в (2), получаем

$$A(q^{-1})y(t)=B(q^{-1})\left[\sum_{i=1}^{r} f_i x^i(t)+\sum_{i=1}^{r} l_i x^i(t)h(t)\right]. \tag{8}$$

Как следует из (8), полученное уравнение является нелинейным относительно искомых параметров a_i (i=1,2,…,m), b_j (j=1,2,…,n), f_k и g_k (k=1,2,…r). Эти параметры могут быть определены с помощью какого-либо метода нелинейной оптимизации [4].

Однако решение данной задачи существенно упрощается, если воспользоваться принципом разделения [5]. Предположим, что b_0=1, (это не ограничивает общности данного подхода). С этой целью перепишем уравнение (2) следующим образом:

$$y(t) = u(t) + \left[B(q^{-1}) - 1\right]u(t) + \left[1 - A(q^{-1})\right]y(t) + \xi(t). \tag{9}$$

Подставив вместо отдельно выделенного сигнала u(t) в (9) его выражение (7), получим

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} f_i x^i(t) + \sum_{i=1}^{r} l_i x^i(t)h(t) + \left[B(q^{-1}) - 1\right]u(t) + \left[1 - A(q^{-1})\right]y(t) + \xi(t). \tag{10}$$

Данное уравнение представляет собой одну из разновидностей модели Гаммерштейна, определяемую через входные, выходные и внутренние ее сигналы и использующую в качестве статической нелинейности асимметрическую кусочно-непрерывную функцию вида (3). Следует, однако, подчеркнуть что данная модель уже является линейной относительно искомых параметров a_i (i=1,2,…,m), b_j (j=1,2,…,n), f_k и g_k (k=1,2,…r).

Уравнение модели Гаммерштейна (10), содержащее асимметрическую кусочно-непрерывную статическую нелинейность, может быть переписано в виде уравнения псевдолинейной регрессии

$$y(t) = \Theta^{*T} q(t) + \xi(t), \tag{11}$$

где $\Theta^* = \left[f_1, f_2, ..., f_r, l_1, l_2, ..., l_r, b_1, b_2, ..., b_n, a_1, a_2, ..., a_m\right]^T$ - вектор параметров размерности (2r+n+m)x1;

$q(t) = [x(t), x^2(t), ..., x^r(t),\ x(t)h(t), x^2(t)h(t), ..., x^r(t)h(t),$

$u(t-1), u(t-2), ..., u(t-n), -y(t-1), -y(t-2), ..., -y(t-m)]^T$ – обобщенный вектор сигналов размерности (2*r*+*n*+*m*)x1.

Как видно из приведенных формул, обобщенный вектор сигналов модели содержит вектор неизмеряемых внутренних сигналов модели, компонентами которого являются u(t-1), u(t-2),…, u(t-n). Поэтому непосредственно воспользоваться каким-либо методом оценивания параметров модели (11) не представляется возможным. С другой стороны можно получить некоторую оценку ненаблюдаемого сигнала u(t), используя информацию о входных, выходных переменных и оценках искомых параметров, а затем итерационно уточнять эту оценку, одновременно используя ее при нахождении оценок параметров модели.

Обозначим рассогласование выходных сигналов модели и объекта после k тактов оценивания

$$e(t) = y(t) - \hat{\Theta}_k^T \hat{q}_k(t), \tag{12}$$

где $\hat{\Theta}_k$, $\hat{q}_k(t)$ - оценки векторов Θ и q(t) соответственно.

Выбор в качестве критерия оценивания квадратичного

$$I(t) = \sum_{i=1}^{t} e^2(i) \tag{13}$$

приводит к получению оценки МНК

$$\hat{\Theta}_k = \left[\hat{\Theta}_k(t)\hat{\Theta}_k^T\right]^{-1} \hat{\Theta}_k(t)Y(t), \tag{14}$$

 ISBN 7-776-8361-7

где $\hat{\Theta}_k(t) = \left[\hat{q}_k^T(1), \hat{q}_k^T(2), ..., \hat{q}_k^T(t)\right]^T$ - оценка обобщенной матрицы наблюдений размерности (2r+n+m)xt; $Y(t) = [y(1), y(2), ..., y(t)]^T$ - вектор выходных сигналов tx1.

Учитывая, что нелинейность имеет вид (7), запишем оценку ненаблюдаемого сигнала u(t) после k тактов

$$\hat{u}(t) = \sum_{i=1}^{r} \hat{f}_i x^i(t) + \sum_{i=1}^{r} \hat{l}_i x^i(t)h(t) . \tag{15}$$

Тогда используемая в (15) оценка обобщенного вектора сигналов запишется в виде

$$\hat{q}(t) = [x(t), x^2(t), ..., x^r(t),\ x(t)h(t), x^2(t)h(t), ..., x^r(t)h(t),$$
$$\hat{u}(t-1), \hat{u}(t-2), ..., \hat{u}(t-n), -y(t-1), -y(t-2), ..., -y(t-m)]^T. \tag{16}$$

Таким образом, итерационный алгоритм оценивания параметров модели может быть записан так

Шаг 1. На основе выбранного критерия (13) с использованием оценки обобщенного вектора сигналов вычисляется оценка МНК параметров модели линейной и нелинейной частей.

Шаг 2. Вычисляется новая оценка в соответствии с (15).

Шаг 3. Вычисляется значение критерия (13). Если критерий удовлетворен, то останов, если нет – повторяются шаги 2 и 3.

Выводы. В статье рассмотрен метод построения нелинейной модели Гаммерштейна, в которой используется асимметричная кусочно-непрерывная нелинейность. Аппроксимация данной нелинейности степенными рядами приводит к нелинейной относительно искомых параметров системе уравнений, решение которой может быть осуществлено с помощью известных методов нелинейной оптимизации.

Несколько упростить решение поставленной задачи позволяет применение принципа разделения. Однако и получаемая при этом модель псевдолинейной регрессии содержит неизвестные внутренние сигналы, для оценивания которых следует применять итерационные схемы.

The problem of nonlinear Hammerstein model synthesis for forecasting is considered. Estimation algorithm for linear and non-symmetric nonlinear parts of the model is proposed.

1. Montgomery D.C., Johnson L.A., Gardiner J.S. Forecasting and time series analysis. – N.Y.: Mc Graw-Hill, 1990. – 394 p.
2. Narendra K., Gallman P.G. An iterative method for the identification of nonlinear system using a Hammerstein model // IEEE Trans. Aut. Control. – 1966. – Vol. 11, №3. – P. 546-550.
3. Kung M.C., Wormack B.F. Discrete time adaptive control of linear dynamic systems with preload nonlinearity // Automatica. – 1984. – Vol. 20, №2. – P. 477-479.
4. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.