

УДК 519.95.

ЭНТРОПИЙНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
ГРАВИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ.

Марасанов В.В., Забитовская О.И., Щербина Е.В.

Постановка проблемы. Построение баз знаний экспертных систем прогноза спроса является актуальной проблемой и ее решения можно обосновать на аналогии между экономическими и физическими системами, которые являются столь глубокими, что были положены в основу исследования экономических систем и сформированы в виде принципов Ле Шателье – Самуэльсона и Карно – Хикса.

Решение поставленной задачи. Экономические системы относятся к классу систем, в которых детерминированный характер наблюдаемых процессов (усредненные характеристики) сочетается с их стохастической природой. Формальная модель этого класса, которую будем называть макросистемой, описывает преобразование случайных межэлементных микровзаимодействий (товарообмена) в некоторый вполне регулярный процесс (спроса на то (те) или иной (иные) виды продукции).

Тем самым в макросистеме выделяются два уровня: микроуровень, где связи между элементами случайны, и макроуровень, на котором связи между параметрами состояния системы, детерминированные в силу законов сохранения и усреднения. Взаимодействия между уровнями или характер преобразования случайных движений элементов макросистемы в регулярный процесс зависит как от конкретного вида системы, так и от тех экономических закономерностей, сочетание которых определяет ее функционирование. К таким системам можно отнести системы обмена или распределения экономических ресурсов. Обычно такой обмен осуществляется между экономическими ячейками и, в зависимости от степени централизации, принятой в данной экономической системе, может быть как чисто стихийным, так и регламентированным (частично или полностью). Однако как бы ни была степень централизации, экономическая система обмена столь сложна, что (случайные) неуправляемые факторы в ней всегда остаются. Тем самым на «микроуровне» экономической системы происходят обменные взаимодействия между ее элементами, которые имеют как случайную, так и детерминированную компоненты. Вес каждой из них зависит от возможностей вмешательства в единичные акты обмена, совершаемые в данной экономической системе. Если такие возможности отсутствуют, то обмен экономическими ресурсами носит чисто случайный характер. Но несмотря на это, система в целом все-таки приобретает «средний ресурс», то есть в ней происходит преобразование случайного процесса обмена в детерминированный процесс, определяющий ее состояние. Таким образом, в системе экономического обмена существует два существенно отличающихся друг от друга уровня: уровень стохастических межэлементных взаимодействий и уровень детерминированных характеристик поведения системы в целом. Это дает основание использовать макросистемную модель для исследования процессов в системах экономического обмена. Математические модели обмена и экономических рынков были построены в работах Парето, Вальраса, Гейла, Леонтьева, фон Неймана, Эджворта и других. Основное внимание в них уделяется изучению условий равновесия. При этом под равновесием понимается такое состояние, для которого функция полезности системы достигается максимума.

Функция полезности является обобщенной характеристикой системы экономического обмена и определяется на множестве частных функций полезности отдельных ее подсистем. Их формирование обычно не представляет большого труда, тогда как установление связи между функциями полезности отдельных подсистем и системы в целом оказывается задачей не формальной. Одна из гипотез приводит к функции полезности типа энтропии физической системы.

Закономерности, присущие равновесным состояниям в системах экономического обмена, во многом, аналогичны тем, которые имеют место в термодинамических системах. Они оказались столь глубокими и полезными, что были провозглашены в качестве неких общих для термодинамических систем и систем экономического обмена принципов: Ле Шателье - Самульсона, Карно - Хикса и другие.

Изучение равновесия и динамики систем экономического обмена касается только их макроуровня. Здесь имеется в виду, что модели исследования равновесных состояний, их основные характеристики формулируются через макропеременные системы: цена, процент, капитал и так далее. Характер микровзаимодействия описывается лишь качественно и служит для того, чтобы высказать определенные соображения о свойствах функции полезности системы экономического обмена.[1]

Наряду с существующими аналогиями между процессами, происходящими в термодинамических системах, и процессами экономического обмена последние обладают некоторыми специфическими свойствами, которые будут рассмотрены в дальнейшем и сводятся к тому, что гипотеза о том, что состояние равновесия в микросистеме достигается при максимуме ее энтропии, а с другой – что при этом должны выполняться некоторые дополнительные условия, учитывающие конечность ресурса. Прежде чем использовать гипотезу об аналогии термодинамических и экономических процессов введем понятие состояния и распределения. Под состоянием системы будем понимать полное описание системы – это описание микросостояния. Под распределением будем понимать описание макросостояния, которое может задаваться в виде матрицы или многомерной функции плотности вероятности. Наша задача, связана с прогнозированием спроса в конечном итоге, сводится к анализу межрегиональных потоков товаров отражающих реализацию этого спроса.

Предположим, что имеется некоторое множество регионов (предприятий, фирм) i, j, k, \dots , обменивающихся экономическими товарами, причем товары разбиты на группы r, s, p, \dots (продукты питания, сырье, энергоносители и так далее). Межрегиональную транспортную сеть можно описать с помощью стоимостей перевозок отдельных продуктов между регионами и сформулировать задачу в виде экономической гравитационной модели. Кроме того, будем предполагать, что имеется всего один тип коммуникаций (например автотранспорт). Пусть c_{ij}^r -средняя стоимость перевозки единицы продукта типа r из пункта отправления i в пункт назначения j ; c_{ii}^r -средняя стоимость перевозки продукции типа r из пункта отправления, находящегося в i в пункт назначения, находящегося в i (внутригородские перевозки, c_{ij}^r -междугородние перевозки). Пусть x_{ij}^r -полный поток продукта типа r (спрос на продукт r в пункте j , удовлетворяемый пунктом i) измеряемый в единицах, принятых для данной группы продуктов.

Тогда $x_{i*}^r = \sum_j x_{ij}^r$ есть полный объем продукта r , производимый в регионе i .

Аналогично x_{*j}^r -полный объем продукта r , используемый для производства других продуктов или потребления в регионе j (спроса на продукт r в регионе j). Обозначим также через X_i^r и Y_i^r полное производство и потребление (понимая под «потреблением» использование всеми секторами, в том числе и личное потребление) в регионе i ; X^r - полное производство в системе; $X^r = \sum_i X_i^r = \sum_j Y_j^r$, так как предполагаем, что система замкнута (тогда $\sum_i X_i^r$ - общее производство продукта r , например сбора зерна, а $\sum_j Y_j^r$ - общий спрос - общее потребление).

После введенных обозначений для нахождения оптимальных решений введем понятие гравитационной модели, основанной на аналогии пространственных взаимодействий в классической физике.

Будем интерпретировать X_i^r, Y_j^r как массы (количества продукта r связанные с отправлениями и прибытиями из i в j). Стоимость c_{ij}^r можно соотнести с расстоянием. Строго ньютоновское взаимодействие сведем к величине x_{ij}^r .

$$x_{ij}^r = K^r \frac{X_i^r Y_j^r}{(c_{ij}^r)^2} \quad (1)$$

где K^r - нормирующий множитель, обеспечивающий выполнение равенства

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^r = X^r$$

Это означает

$$K^r = \frac{X^r}{(\sum_i \sum_j x_{ij}^r) / (c_{ij}^r)^2}$$

В общем случае взаимодействие может управляться функцией отличной от закона степени (-2), то есть формула (1) может быть записана в виде

$$x_{ij}^r = K^r X_i^r Y_j^r f^r(c_{ij}^r) \quad (2),$$

где $f^r(c_{ij}^r)$ - убывающая функция c_{ij}^r , а $K^r = \frac{X^r}{\sum_i \sum_j X_i^r Y_j^r f^r(c_{ij}^r)}$ (3)

При этом следует иметь в виду, что для разных продуктов эти функции будут иметь различный вид.

Задача оптимизации гравитационной модели может решаться при различной информации о производстве и спроса и может быть четыре возможных случая:

- 1) существует независимая оценка X^r ;
- 2) существуют независимые оценки X_i^r , которые определяют X^r ;
- 3) существуют независимые оценки спроса Y_i^r , который определяют общий спрос Y^r ;
- 4) существуют независимые оценки X_i^r, Y_j^r , полученные так, что они определяют X^r по формулам $\sum_i X_i^r = X^r$ и $\sum_j Y_j^r = Y^r$.

В уравнениях 2, 3 X_j^r следует заменить на x_{*j}^r , а Y_j^r на x_{*j}^r в случаях, когда их независимые оценки отсутствуют. По предположению оценка X^r существует во всех случаях (например, прогнозируемый сбор зерна), то для оценки K^r может быть всегда использовано уравнение вида 3. Таким образом уравнения 2 и 3 представляют собой ньютоновскую гравитационную модель для четвертого случая и легко могут быть решены относи-

тельно x_{ij}^r . Для случаев 1 - 3 уравнения 2 и 3 сводятся к квадратному уравнению относительно x_{ij}^r . [1]

Эти уравнения должны для случая 1 решаться при ограничениях

$$\sum_j x_{ij}^r = x_{i*}^r \quad (4)$$

$$\sum_i x_{ij}^r = x_{*j}^r \quad (5);$$

-для случая 2 – при ограничениях:

$$\sum_i x_{ij}^r = x_{*j}^r \quad (5)'$$

$$\sum_j x_{ij}^r = X_i^r \quad (6)$$

-для случая 3

$$\sum_j x_{ij}^r = x_{i*}^r \quad (4)'$$

$$\sum_i x_{ij}^r = Y_j^r \quad (7)$$

-для случая 4

$$\sum_j x_{ij}^r = X_i^r$$

$$\sum_i x_{ij}^r = Y_j^r$$

Ограничения 4-7 отвечают условиям производства и полного спроса на произведенную продукцию и соответственно уравнения (2) и (3) никогда не удовлетворяют приведенным условиям непротиворечивости. Поэтому при дальнейшем усовершенствовании модели введем их в качестве ограничений.

Первый случай соответствует модели без ограничений. Заменяв X_i^r и Y_j^r на x_{i*}^r и x_{*j}^r можно использовать уравнения (2) и (3).

Второй случай – модель с ограничением на производство. Уравнение (6) выступает в роли ограничения на полное производство в регионе i (например, при заданных технологиях объем выпуска различных видов с/х продукции на ограниченных площадях). Можно найти набор нормирующих множителей, которые заменят единственный множитель K^r , что обеспечит выполнение соотношения (6). Введем множитель A_i^r и уравнение 2 перепишем в виде

$$x_{ij}^r = A_i^r X_i^r x_{*j}^r f^r(c_{ij}^r) \quad (8),$$

где вместо Y_j^r в уравнении (2) используется x_{*j}^r , поскольку независимая оценка Y_j^r во втором случае не предполагается. Тогда по уравнению (6) можно вычислить A_i^r , если x_{ij}^r из (8) подставить в (6). Получим

$$A_i^r = [\sum_j x_{*j}^r f^r(c_{ij}^r)]^{-1} \quad (9)$$

Случай 3 – модель с ограничением на потребление (например, ввиду ограниченности бюджета потребителей). В этом случае ограничением будет уравнение (7). Множитель K^r заменяется нормирующим множителем, B_j^r и стандартные преобразования приводят к следующим выражениям:

$$x_{ij}^r = B_j^r x_{i*}^r Y_j^r f^r(c_{ij}^r) \quad (8)'$$

$$B_j^r = [\sum_i x_{i*}^r f^r(c_{ij}^r)]^{-1} \quad (9)'$$

Случай 4 – модель с ограничением на производство и потребление. В качестве ограничений используются оба уравнения (6) и (7), поэтому нужно заменить K^r двумя множителями $A_i^r B_j^r$, чтобы можно было провести соответствующую модификацию модели. Тогда уравнение (2) приобретет вид

$$x_{ij}^r = A_i^r B_j^r X_i^r Y_j^r f^r(c_{ij}^r) \quad (10),$$

а множители можно вычислить, подставляя x_{ij}^r из уравнения (10) в уравнение (6) и (7) соответственно, что дает

$$A_i^r = [\sum_j B_j^r Y_j^r f^r(c_{ij}^r)]^{-1} \quad (11)$$

$$B_j^r = [\sum_i A_i^r X_i^r f^r(c_{ij}^r)]^{-1} \quad (12)$$

Уравнение (11) и (12) можно решить итерационными методами. И модель четвертого случая позволяет найти простые оценки x_{ij}^r , остальные три модели сводятся к квадратным уравнениям относительно x_{ij}^r . Все четыре рассмотренные гравитационные модели были получены для независимых потоков товаров; на самом деле эти потоки должны быть взаимосвязаны. Часть потока продукта r из i в j может быть вызвана спросом, связанным с использованием производителями в j продукте r в качестве сырья.

Эту трудность можно частично преодолеть, если используемые варианты гравитационной модели включают в себя независимые оценки X_i^r, Y_j^r . Оценку этих величин можно получить с помощью регрессионного анализа. Независимые переменные в уравнениях регрессии относительно X_i^r, Y_j^r могут включать в себя характеристики производства и потребления в регионах i , и j продуктов, отличных от r . Коэффициенты этих уравнений аналогичны технологическим коэффициентам в моделях «затраты - выпуск». [2]

Для оценки набора переменных потоков x_{ij}^r при известных ограничениях в виде равенств необходимо максимизировать энтропию связанную с x_{ij}^r распределения вероятностей, в результате чего получится наиболее вероятная оценка x_{ij}^r (наиболее вероятный прогноз потока спроса продукта r из i -го района в j -й район).

Для этого предварительно выясним вид функции $f^r(c_{ij}^r)$, определяющей вид коэффициента K^r и зависящего от функции полезности. Обоснование выбора коэффициента K^r в гравитационной модели основывается на так называемой изопериметрической задаче вариационного исчисления. Мы находим наиболее вероятные значения потоков спроса продукта r , производимого в регионе i , потребителями в регионе j как решение задачи максимизации энтропии. В простейшем случае это выглядит следующим образом. Необходимо отыскать функцию $p(x)$, которая при данных условиях обеспечивает максимум энтропии

$$H = - \int p(x) \log P(x) dx \quad (13)$$

В общем виде, применительно к нашим целям, задача сводится к отысканию P как функции x , при которой интеграл

$$I = \int_a^b F(x, p) dx \quad (14)$$

принимает максимальное значение при условиях, что

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \varphi_1(x, p) dx &= K_1 \\ \int_a^b \varphi_2(x, p) dx &= K_2 \\ \dots & \\ \int_a^b \varphi_n(x, p) dx &= K_n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где K_1, K_2, \dots, K_n - константы (заданы) и равенства (15) выражают ограничения, наложенные на интеграл (14). Соответствующая теорема вариационного исчисления гласит, что функция $p(x)$, обеспечивающая максимум интеграла (14), находится с помощью решения уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial P} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial p} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial p} = 0 \quad (16)$$

Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - неопределенные множители, которые находятся подстановкой $p(x)$, удовлетворяющей уравнению (16) в равенства (15).

Конкретизируя решение оптимизации гравитационной модели с учетом того, что мощности предприятий ограничены, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma_x^2, \quad (17)$$

найдем распределение вероятностей $p = p(x)$ при котором энтропия максимальна,

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p \log p dx \quad (18),$$

а условия, которые должны быть выполнены, суть нормирующее равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} p dx = 1 \quad (19)$$

и равенство 17 [2]

Итак,

$$F(x, p) = -p \log P \quad (20)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -(1 + \log P) \quad (21)$$

$$\varphi_1(x, p) = P \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 1 \quad (23)$$

$$\varphi_2(x, p) = x^2 p \quad (24)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial p} = x^2 \quad (25)$$

Подставляя найденные величины в 16, получаем

$$-(1 + \log p) + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0 \quad (26)$$

$$p = e^{\lambda_2 x^2 + \lambda_1 - 1} = e^{\lambda_1 - 1} e^{\lambda_2 x^2} \quad (27)$$

Для того, чтобы исключить λ_1 и λ_2 подставим сначала найденное значение p в 19

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda_1 - 1} e^{\lambda_2 x^2} dx = 2e^{\lambda_1 - 1} \int_0^{\infty} e^{\lambda_2 x^2} dx = 2e^{\lambda_1 - 1} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{-\lambda_2}} \quad (28)$$

откуда $e^{\lambda_1 - 1} = \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\pi}}$ (29)

λ_2 должен быть отрицательным, иначе интеграл (28) не существует. Подставим 27 и 29 в (17).

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\pi}} e^{\lambda_2 x^2} dx = 2 \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\pi}} ;$$

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{\lambda_2 x^2} dx = 2 \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\pi}} * \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{(-\lambda_2)^3}} = -\frac{1}{2\lambda_2} \quad (30)$$

Следовательно

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2\sigma^2} \quad (31)$$

$$\text{и } e^{\lambda_1 - 1} = \sqrt{\frac{-\lambda_2}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \quad (32)$$

подставляя найденные величины в 27, находим функцию p , для которой при заданных условиях энтропия максимальна:

$$p = e^{\lambda_1 - 1} e^{\lambda_2 x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (33)$$

Собственно энтропия H находится подстановкой (33) в (13),

$$H = \log \sqrt{2\pi\sigma^2} \quad (35)$$

и что весьма полезно, что при заданной энтропии гауссовское (нормальное) распределение имеет наименьшую из всех одномерных распределений дисперсию.

Проведенные рассуждения говорят о том, что функция $f^r(c_{ij})$ при целевой функции полезности в виде максимума энтропии должны быть экспоненциального типа.

Рассмотрим 4-й случай – ограничено производство и потребление. Предположим, что на перевозку продукта r тратится величина C^r . Тогда надо максимизировать

$$S^r = \sum_i \sum_j \ln x_{ij}^r !$$

при ограничениях (6) и (7) и с учетом стоимостного ограничения

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^r c_{ij}^r = C^r \quad (36)$$

Решение данной задачи имеет вид

$$x_{ij}^r = A_i^r B_j^r X_i^r Y_j^r \exp(-\mu^r c_{ij}^r) \quad (37)$$

где
$$A_i^r = [\sum_j B_j^r Y_j^r \exp(-\mu^r c_{ij}^r)]^{-1} \quad (38)$$

$$B_j^r = [\sum_i A_i^r X_i^r \exp(-\mu^r c_{ij}^r)]^{-1} \quad (38)'$$

Величина μ^r теоретически определяется через уравнение (36);

-при увеличении C^r , μ^r уменьшается.

Аналогично можно получить решения для остальных трех случаев. Например, для случая 2 (ограничение на производство) по этой процедуре получим

$$x_{ij}^r = A_i^r X_i^r \exp(-\mu^r c_{ij}^r) \quad (39)$$

где
$$A_i^r = [\sum_j \exp(-\mu^r c_{ij}^r)]^{-1} \quad (40)$$

Здесь отсутствует член x_{*j}^r , как и в уравнениях (8) и (9). Это означает, что продукт X_i^r размещается между регионами (потребителями) j пропорционально «транспортной доступности» j по отношению к i , которая характеризуется величиной $\exp(-\mu^r c_{ij}^r)$. Возможны и другие характеристики региона j (отличные от «транспортной доступности»), которые делают более выгодным для j по сравнению с любым другим регионом ввозить продукт r . Пусть, например, v_j^r - прибыль региона j от использования единицы продукта r по сравнению с использованием этой же единицы продукта любым другим регионом. Будем выбирать единицы измерения, так, чтобы они были непосредственно сопоставимы с транспортными затратами c_{ij}^r . Тогда уравнение (39) и (40) переписываются в виде

$$x_{ij}^r = A_i^r X_i^r \exp(\mu^r v_j^r) \exp(-\mu^r c_{ij}^r) \quad (41)$$

$$A_i^r = [\sum_j \exp(\mu^r v_j^r) \exp(-\mu^r c_{ij}^r)]^{-1} \quad (42)$$

Величины v_j^r порождаются уровнем экономики в регионе j , поэтому их можно приблизительно описать текущим уровнем потребления r в j , а это есть x_{*j}^r . Обычно предположение в такой ситуации заключается в том, что прибыль пропорциональна логарифму единицы измерения, поэтому

$$\mu^r v_j^r = \alpha^r \ln x_{*j}^r \quad (43),$$

где α^r – некоторый параметр. При подстановке v_j^r из уравнения (43) в уравнение (41) и (43) они переходят в уравнение (8) и (9).

После приведенного обоснования приведенной гравитационной модели несложно полученные результаты распространяются на модель «затраты - выпуск», которая логично вытекает из теории экономической базы. Эта теория успешно применяется для местного и регионального прогноза, так как представляет собой наиболее простую формулировку взаимозависимости между экономическими секторами.

Определяются два сектора экономической активности, измерения которых проводятся в единицах занятости. Сектор 1 – базовой занятости, сектор 2 – небазовой занятости. Экономическая активность базовой занятости направлена на производство, ориентированное на внешние рынки (в других регионах или экспорт), а небазовый сектор производит товар для внутренних рынков.

Обозначим: X - полная занятость, n - небазовая занятость, y – базовая занятость.

$$X - n = y \text{ или } X(1 - \frac{n}{x}) = y$$

пусть $a = \frac{n}{X}$, тогда $X = (1 - a)^{-1} y$ (44)

Величина « a » принимается константой. Вернемся к тому, что X^r - полный объем производства продукта r . Он может потребляться внутренними секторами региона или внешним сектором «окончательного спроса» (экспорта). Для однорегиональной модели введем обозначения:

часть X^r , обозначаемая через Z^{rp} , потребляемая сектором p , а y^r потребляется сектором окончательного спроса. Тогда по всем S сектора внутреннего спроса

$$\sum_{p=1}^s Z^{rp} + y^r = X^r \quad (45)$$

Величина продукта r на производство продукта p

$$a_{rp} = \frac{Z^{rp}}{X^p} \text{ и } \sum_p a^{rp} X^p + Y^r = X^r$$

Пологая $r = 1, 2$, получим систему уравнений, откуда

$$\vec{X} = (I - a)^{-1} \vec{y} \quad (46)$$

Здесь a - известная матрица технологических коэффициентов «затраты – выпуск», I – единичная матрица. Уравнение (46) совпадает с (44), только в (44) - все величины скалярные, а в (46) – матрицы и векторы и уравнение (45) дает реалистическую оценку экономической структуры города или региона. При развитии модели на многорегиональный случай будем действовать по аналогии и основными результатами Леонтьева – Страута, в которых предполагается, что производителей не интересует окончательное распределение товаров, а потребителей – их происхождение. Это означает, что все товары, производимые в регионе i , как бы поступают в общий фонд предложения, и все товары, потребляемые в i , предварительно извлекаются из фонда потребления. Изобразим существенные потоки продукта r в модели Леонтьева – Страута.

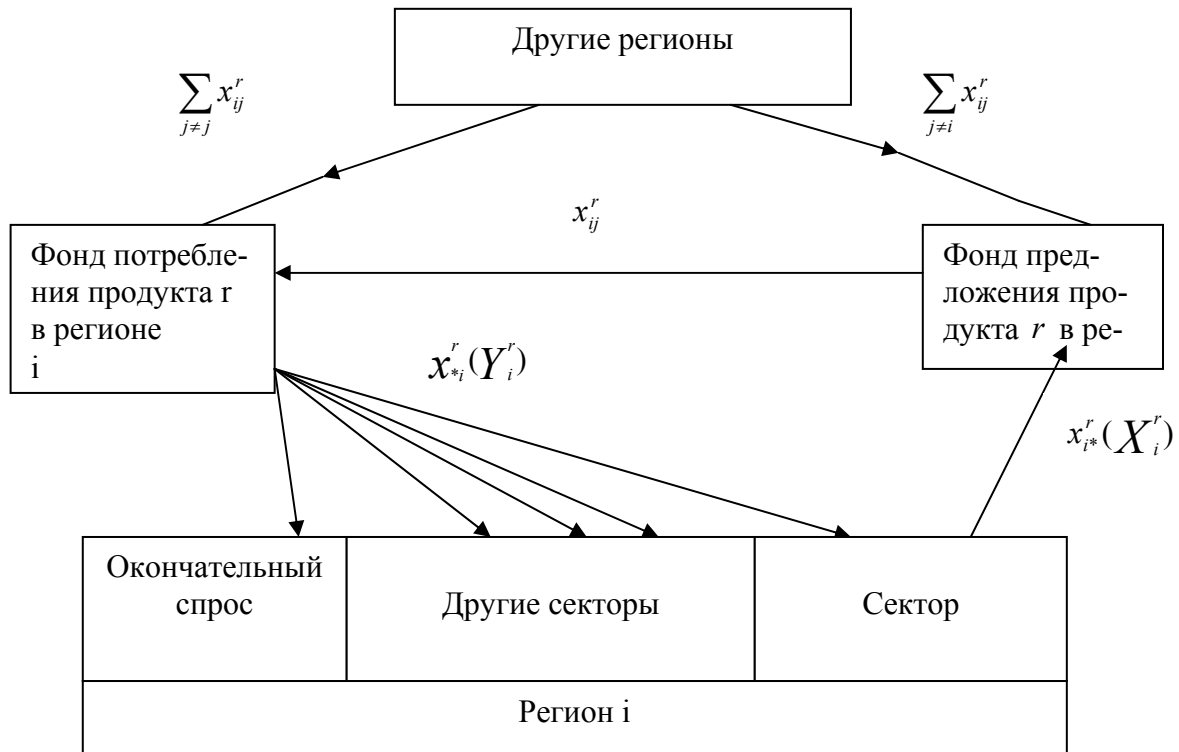


Рис. 1 Потоки продукта r в модели Леонтьева – Страута [3].

Отметим, что при одном регионе i должно выполняться равенство между X_i^r, Y_i^r , но в многорегиональной системе это уже не обязательно. Теперь x_{ij}^r - это объем продукта r , производимый в регионе i и перевозимый в фонд потребления в регионе j .

Теперь каждый регион в отдельности должен удовлетворять соотношению «затраты – выпуск» типа (45) и соответствующая система уравнений согласно рис. 1 принимает вид

$$x_{*i}^r = \sum_p a_{rp}^i x_{i*}^p + y_i^r \quad (47),$$

где x_{*i}^r - количество продукта r , используемое в регионе i ;

y_i^r - потребление сектором окончательного спроса в регионе i ;

$\sum_p a_{rp}^i x_{i*}^p$ - количество продукта r , используемое другими секторами (в этом выражении a_{rp}^i - матрица технологических коэффициентов «затраты – выпуск» в регионе i).

Основными переменными являются x_{ij}^r , относительно которых следует искать решение, но здесь принимаются более слабые допущения: не только нельзя провести независимой оценки $x_{i*}^r, x_{*j}^r, (X_i^r, Y_j^r)$, но даже величину X^r нельзя оценить независимо. Предположения гравитационного типа допускаются, но предполагается, что $\sum_i \sum_j x_{ij}^r = x_{**}^r$ выполняется лишь при $i \neq j$.

При этом система уравнений

$$X_{ij}^r = \frac{X_i^r Y_j^r}{X^r} D_{ij}^r; \quad D_{ij}^r = \frac{\hat{x}_{ij}^r \hat{X}^r}{\hat{X}_i^r \hat{Y}_j^r}$$

$$x_{*i}^r = \sum_p a_{rp}^i x_{i*}^p + y_i^r$$

(где D_{ij}^r - эмпирически оцениваемая функция расстояния) нелинейная по x_{ij}^r и имеет столько уравнений, сколько неизвестных (включая x_{ii}^r). Она может быть решена приближенно при помощи предположения, что известны все потоки \hat{x}_{ij}^r в некоторый базовый период; после этого их можно решить относительно приращений потоков в следующий период. Отсюда следует, что при заданном наборе окончательного спроса можно определить приращения потоков с точностью до величин первого порядка малости и использовать при краткосрочном прогнозе спроса.

Объединим модели «затраты – выпуск» и гравитационную модель, используя метод максимизации энтропии. Из четырех рассмотренных случаев рассмотрим только первый и последний (без ограничений и с ограничениями на спрос и производство). Для этого предположим для первого случая, что нет и независимой оценки для X^r , что соответствует гипотезе Леонтьева и Страута. Единственным ограничением будет уравнение

$$\sum_i \sum_j x_{ij}^r c_{ij}^r = C^r \quad (48)$$

Теперь будем рассматривать уравнение Леонтьева – Страута в качестве ограничения на x_{ij}^r . Запишем его в виде

$$\sum_j x_{ij} = \sum_p a_{rp}^i \sum_j x_{ij}^p + y_i^r \quad (49).$$

Максимизируем энтропию распределения вероятностей, связанного с x_{ij}^r (здесь r переменный индекс, как и i и j). $S = -\sum_i \sum_j \sum_r x_{ij}^r \ln x_{ij}^r$ при ограничениях 48 и 49.

Для решения задачи запишем функцию Лагранжа

$$L = S + \sum_i \sum_r v_i^r (y_i^r + \sum_p a_{rp}^i \sum_j x_{ij}^p - \sum_j x_{ji}^r) + \sum_r \mu^r (C^r - \sum_i \sum_j x_{ij}^r c_{ij}^r),$$

где v_i^r и μ^r - множители Лагранжа, связанные с уравнениями (48) (49), соответственно. Теперь получим оценку x_{ij}^r , решая систему равнений $\frac{\partial L}{\partial x_{ij}^r} = 0$ совместно с уравнениями (25) и (26). Будем иметь

$$x_{ij}^r = \exp(\sum_p v_i^p a_{pr}^i - v_j^r - \mu^r c_{ij}^r) \quad (50)$$

(единица включена в множитель v_j^r).

Множитель Лагранжа μ^r получается подстановкой x_{ij}^r в уравнении (25), множитель Лагранжа v_j^r находится подстановкой x_{ij}^r из (50) в уравнении (49), что дает

$$\exp(-v_i^r) \sum_i \exp(\sum_p v_j^p a_{pr}^j - \mu^r c_{ji}^r) - \sum_p a_{rp}^i \exp(\sum_g v_i^g a_{gp}^i) \sum_j \exp((-v_j^p) - \mu^r c_{ij}^p) - y_i^r = 0 \quad (51)$$

$$\text{Обозначим } \sigma_i^r = \exp(\sum_p v_i^p a_{pr}^i) \quad (52)$$

$$E_j^r = \exp(-v_j^r) \quad (53)$$

$$\text{тогда } \sigma_i^r = \prod_{p=1}^s (E_i^p)^{-a_{rp}^i} \quad (54)$$

Перепишем уравнение (51) в более компактном виде

$$E_i^r \sum_j \sigma_j^r \exp(-\mu^r c_{ji}^r) - \sum_p a_{rp}^i \sigma_i^p \sum_j E_j^p \exp(-\mu^p c_{ij}^p) - y_i^r = 0$$

$$\text{и из него получим } E_i^r = \frac{y_i^r + \sum_p a_{rp}^i \sigma_i^p \sum_j E_j^p \exp(-\mu^p c_{ij}^p)}{\sum_j \sigma_j^r \exp(-\mu^r c_{ij}^r)} \quad (55)$$

Это уравнение нельзя решить в явном виде. Используя итерационную процедуру: задать E_i^r , вычислить σ_i^r из уравнения (54), вычислить E_i^r из уравнения (55) и продолжить процедуру пока процесс не сойдется. С помощью уравнений (52) и (53) выражение (50) для x_{ij}^r может быть переписано в виде

$$x_{ij}^r = \sigma_i^r E_j^r \exp(-\mu^r c_{ij}^r) \quad (56)$$

Таким образом, с помощью метода максимизации энтропии первый случай в модели Леонтьева – Страута описывается уравнениями (56),(55),(54). Произведение $\sigma_i^r E_j^r$ обеспечивает согласованность потоков с уравнением Леонтьева – Страута. Из уравнения (32) следует, что размерность этого произведения совпадает с размерностью единицы измерения количества продукта r и гравитационная модель (56) является простейшей: величины x_{ij}^r пропорционально $\exp(-\mu^r c_{ij}^r)$.

В четвертом наиболее реальном с точки зрения практики случае, где есть ограничения на производство и потребление в роли ограничений одновременно выступают уравнения (8) и (9) вместе с модифицированными уравнениями (36) и (49). Поэтому $\sum_j x_{ij}^r$ заменим на X_i^r , а $\sum_i x_{ij}^r$ - на Y_j^r , что дает

$$Y_j^r = \sum_{p=1}^s a_{rp}^j X_i^p + y_j^r \quad (57)$$

Теперь x_{ij}^r в (57) не входит, следовательно, наши предположения отделяют ту часть модели, которая связана с моделью «затраты - выпуск», от гравитационной части. Отсюда следует, что процедуры, используемые для оценки X_i^r и Y_j^r , должны быть такими, чтобы удовлетворялось уравнение (57); тогда потоки спроса можно оценить с помощью гравитационной модели 37 - 38'

Выводы: в реальной ситуации имеется множество различных товаров, некоторые из них являются промежуточными, другие конечными; прогнозировать спрос на одни и другие можно лишь на основе гибридной гравитационной модели, которая будет получена с помощью метода максимизации энтропии на следующем этапе исследований. При этом центральным вопросом остается возможность оценки величин x_{i*}^r и x_{*j}^r независимо от процедуры оценки x_{ij}^r . Поскольку при различных исходных предположениях получается различные модели, то наиболее важный вывод состоит в том, что включаемые в модель гипотезы должны подвергаться всесторонней проверки.

On the basis of analogy between the thermodynamics and economic systems at the use of function of utility as entropy we will consider the method of receipt and optimization of function of demand at limitations of four types on production and consumption

1. А. Дж. Вильсон. Энтропийные методы моделирования сложных систем. М.: «Наука», 1978.
2. С. Голдман. Теория информации. М.: ИЛ., 1957
3. Leontief W., Strout A. Multi – regional input – output analysis. – In: Structural Futerdependence and Economic Deuelopment /Ed. T.Barna, Macmillan, London, 1963.