УДК 681.5.015.24

МЕТОД КОМПЕНСАЦИИ ОШИБОК ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Поливода О.В., Бражник А.М.

Введение.

Современная теория управления включает методы оптимального управления, с помощью которых можно разрабатывать оптимальные системы управления (т.е. системы, при функционировании которых минимизируется или максимизируется некоторый критерий качества), а также методы идентификации, которые позволяют определить структуру модели объекта управления [1]. Однако ошибка модели объекта вызывает ошибку статизма, и оптимальный регулятор не обеспечивает достижения заданного состояния. Для таких случаев в системе управления необходимо реализовать гарантийную составляющую, которая значительно уменьшит ошибку модели.

Постановка задачи.

В постановке задачи появляется вопрос об устранении ошибки статизма при оптимальном управлении. Рассмотрим линейно-квадратичные задачи.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

Требуется обеспечить достижение заданного целевого состояния с наименьшими возможными затратами ресурса управления. Качество управления определяется квадратичным критерием вида

$$I[\mathbf{u}(t)] = 0{,}5\mathbf{x}^T\mathbf{S}_f\mathbf{x} + 0{,}5\int_0^{t_f}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{Fx} + \mathbf{u}^T\mathbf{Eu}\right)dt, \tag{2}$$

где матрицы динамики $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ в общем случае зависят от времени, весовые матрицы $\mathbf{S}_f$, $\mathbf{F}(t)$ симметричны и положительно полуопределены, а весовая матрица $\mathbf{E}(t)$ симметрична и положительно определена.

Так как ошибка модели объекта вызывает ошибку статизма необходимо реализовать составляющую, которая уменьшит ошибку статизма.

Решение задачи

Решим поставленную задачу, предполагая, что модель объекта управления не содержит ошибок[2-4]. Для критерия (2) оптимальный регулятор задается выражением

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \tag{3}$$

$$\text{где } \mathbf{K}(t) = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}(t) \tag{4}$$

Таким образом, выведены зависимости, определяющие П-регулятор с зависящим от времени матричным коэффициентом усиления.

Рассмотрим химический реактор с непрерывным перемешиванием, в котором идет многокомпонентная реакция[2].

Введем квадратичный критерий

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[(x_1 - x_{1d})^2 + \alpha(x_2 - x_{2d})^2 + \beta(u - u_d)^2\right]dt, \tag{5}$$

Решение этой задачи дается формулами (3), (4) в которые нужно подставить

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1 + Da_1) & Da_2 \\ Da_1 & -(1 + Da_2 + Da_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \beta \tag{6}$$

Коэффициент усиления $\mathbf{K}(t) = \frac{1}{\beta}\left[S_{12} \quad S_{22}\right]$ задает закон оптимальной обратной связи

$$u(t) = u_d - \left[K_1(t)(x_1(t) - x_{1d}) + K_2(t)(x_2(t) - x_{2d})\right]. \tag{7}$$

Исследуем качество полученного регулятора для следующих значений параметров: Da_1=3, Da_2=0,5, Da_3=1, x_{1d}=0,3, x_{2d}=0,4, u_d=0,1, $x_1(0)$=1, $x_2(0)$=0, t_f=2, $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Выходы оптимального регулятора обеспечивают достаточно точное попадание в заданное состояние x_{1d}, x_{2d}.

Исследуем влияние ошибки модели на статическую ошибку управляемого процесса.

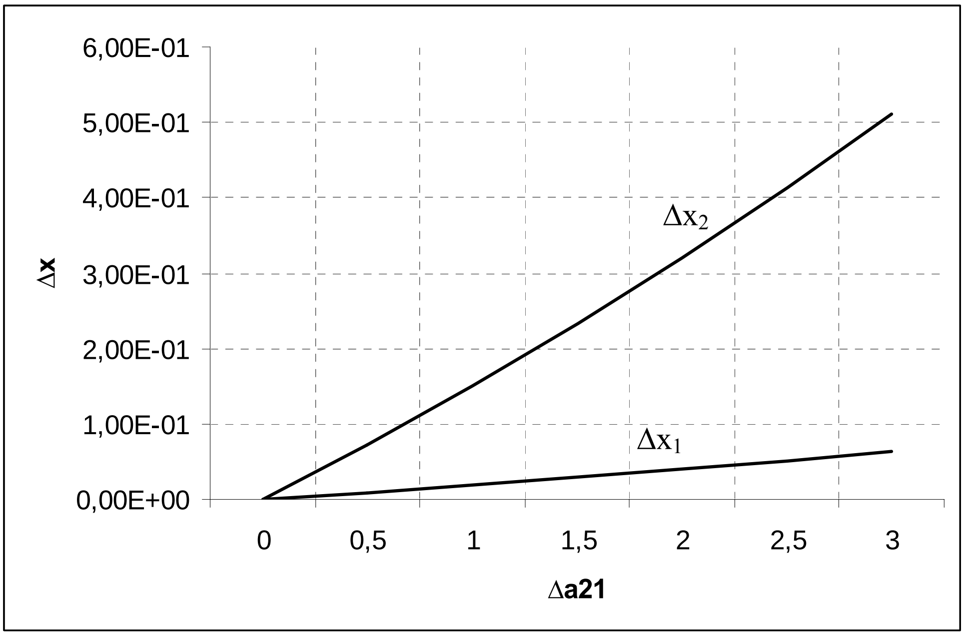

Рис.1 Зависимость статической ошибки от ошибки модели

Из рис.1 видно, что при Δa_{21}>0,3 статическая ошибка превышает 5%, полученный оптимальный П-регулятор не обеспечивает достижение заданного состояния, и возникает необходимость реализации гарантийной составляющей, которая значительно уменьшит

 ISBN 7-776-8361-7

ошибку модели. Гарантийную составляющую можно реализовать в виде интегральной составляющей, т.е. оптимальный регулятор будет ПИ-регулятором.

Один из методов получения интегральной составляющей – введение производной $\dot{\mathbf{u}}$ непосредственно в критерий оптимальности[2].

$$I[\mathbf{u}(t)] = 0{,}5\mathbf{x}^T\mathbf{S}_f\mathbf{x} + 0{,}5\int_0^{t_f}\left(\mathbf{x}^T\mathbf{F}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{E}\dot{\mathbf{u}}\right)dt, \tag{8}$$

При этом необходимо продифференцировать уравнения динамики процесса.

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \tag{9}$$

После замены переменных

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{w}_1 = \mathbf{x}, \qquad \mathbf{w}_2 = \dot{\mathbf{x}}, \qquad \mathbf{w} = \begin{bmatrix}\mathbf{w}_1\\ \hdashline \mathbf{w}_2\end{bmatrix} \tag{10}$$

Перейдем к уравнению

$$\dot{\mathbf{w}} = \left[\begin{array}{c:c}0 & \mathbf{I}\\ \hdashline 0 & \mathbf{A}\end{array}\right]\mathbf{w} + \begin{bmatrix}0\\ \hdashline \mathbf{B}\end{bmatrix}\mathbf{v} \tag{11}$$

и критерию оптимальности

$$I = 0{,}5\left(\mathbf{w}^T\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{S}_f & 0\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right]\mathbf{w}\right) + 0{,}5\int_0^{t_f}\left(\mathbf{w}^T\left[\begin{array}{c:c}\mathbf{F} & 0\\ \hdashline 0 & 0\end{array}\right]\mathbf{w} + \mathbf{v}^T\mathbf{E}\mathbf{v}\right)dt \tag{12}$$

Воспользуемся теперь выражением оптимального закона регулирования

$$\left(\dot{\mathbf{S}} + \mathbf{S}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S} + \mathbf{F}\right)\mathbf{x}(t) = 0 \tag{13}$$

Для того чтобы это уравнение выполнялось при произвольных значениях **x**(t), необходимо, чтобы обращался в нуль матричный множитель при **x**(t). Оптимальный регулятор задается выражением

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t), \tag{14}$$

$$\text{где } \mathbf{K}(t) = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}(t) \tag{15}$$

Тогда получим

$$\mathbf{v}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{w} = -\left[\mathbf{K}_1 \;\vdots\; \mathbf{K}_2\right]\begin{bmatrix}\mathbf{w}_1\\ \hdashline \mathbf{w}_2\end{bmatrix}, \tag{16}$$

или возвращаясь к исходным переменным,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(t) - \int_0^{t_f} \left(\mathbf{K}_1 - \dot{\mathbf{K}}_2\right)\mathbf{x}(t)dt\,. \tag{17}$$

В установившемся состоянии при $t_f \to \infty$ оптимальный регулятор примет вид

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_2\mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_1\int_0^{t_f} \mathbf{x}(t)dt\,. \tag{18}$$

Применив этот метод к задаче о химическом реакторе, получим оптимальный ПИ-регулятор в виде

$$u(t) = u_d - \left[K_2(t)(x_1(t) - x_{1d}) + K_4(t)(x_2(t) - x_{2d})\right] + \\ + \left[\int_0^{t_f} \left(K_1 - \dot{K}_2\right)(x_1(t) - x_{1d})dt + \int_0^{t_f} \left(K_3 - \dot{K}_4\right)(x_2(t) - x_{2d})dt\right]. \tag{19}$$

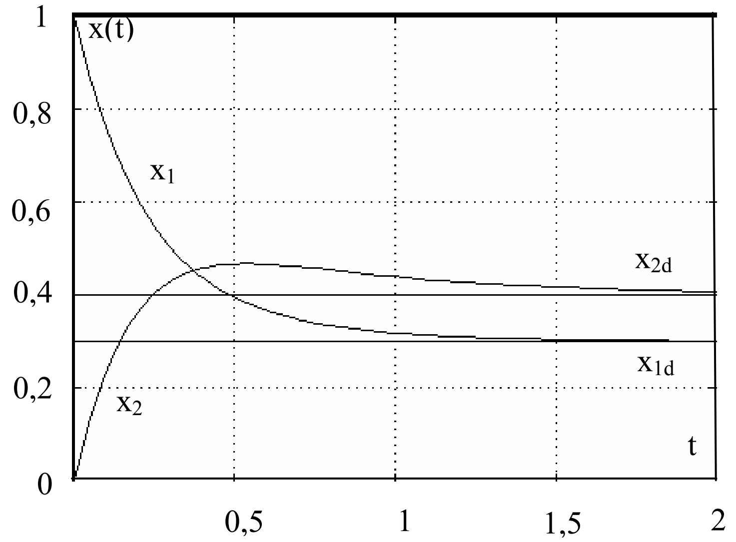

Рис.2 Поведение замкнутой системы с П-регулятором при отсутствии ошибки модели

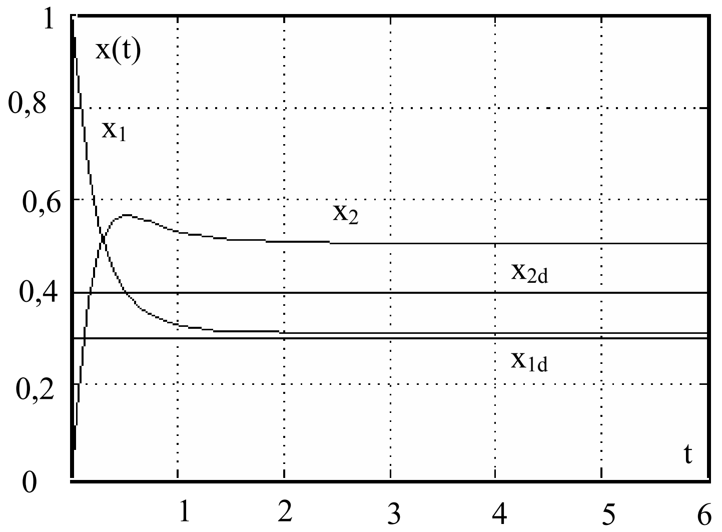

Рис.3 Поведение замкнутой системы с П-регулятором при наличии ошибки модели

ISBN 7-776-8361-7

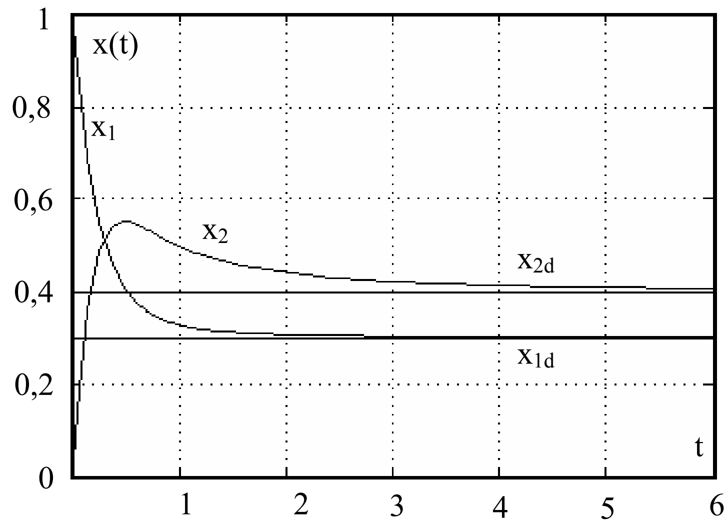

Рис.4 Поведение замкнутой системы с ПИ-регулятором

Использование интегральной составляющей позволило снизить ошибку статизма, при этом время регулирования увеличилось незначительно.

В приведенных примерах моделирование проводилось в пакете MATLAB-Simulink.

Заключение

Исходя из вышеизложенного, можно сделать вывод, что гарантийная составляющая, необходимая при невысокой частоте идентификации, позволяет устранить ошибки статизма при оптимальном управлении. Гарантийную составляющую можно реализовать в виде интегральной составляющей регулятора.

As the title implies the article describes one method of compensation errors identification at case of optimal control. The results of research system with P-regulator and PI-regulator are presented. Results of the modeling which has been carried out in package MATLAB-Simulink are submitted.

1. Д. Гроп. Методы идентификации систем. – М.:Мир, 1979. – 302 с.
2. У. Рей. Методы управления технологическими процессами. – М.:Мир, 1983. – 368 с.
3. Х. Квакернаак, Р.Сиван. Линейные оптимальные системы управления. – М.:Мир, 1977. – 653 с.
4. Справочник по теории автоматического управления/ Под ред. А. А. Красовского. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 712 с.