

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 62-50

АЛГОРИТМ АДАПТИВНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ОБЪЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Гасанов А.С.

Введение

Математическое моделирование начинается с формализованного описания факторов и связей между ними, которые отражают течение технологического процесса. Построение различных математических моделей объектов производится на основе опытной информации о состоянии объекта (измерений) [1]. Среди них следует особенно выделить математические модели, которые строятся на основании гармонического анализа [2], поскольку, с увеличением количества членов разложения гармонического ряда может быть достигнуто сколь угодно малое различие между вычислениями модели и опытными данными (сколь угодно малые значения невязки). Однако, следует отметить, что на практике любые опытные данные измеряются с погрешностью. Кроме того, существуют стохастические колебания значений функции, которые не должны предсказываться в модели. Поэтому на практике нецелесообразно стремиться к сколь угодно малым значениям невязки.

С другой стороны, модель всегда лишь частично соответствует действительности, поэтому, когда поступает новая опытная информация, модель может быть откорректирована. Для этой цели может служить алгоритм Винера - Калмана [1]. Задачам построения адаптивных систем идентификации и управления посвящены также работы [3–5].

Целью настоящей работы является разработка алгоритма построения математической модели на основе гармонического анализа с применением адаптивных алгоритмов для уточнения параметров модели.

Постановка задачи

Рассмотрим метод построения математической модели объекта на основе гармонического анализа. Пусть требуется решить задачу прогнозирования значения функции $\varphi(t)$ на отрезке $t \in [0, T]$. Введем отображение:

$$x = -\pi + \frac{2\pi t}{T}, \quad (1)$$

и введем функцию

$$f(x) = \varphi\left(\frac{xT}{2\pi} + \frac{T}{2}\right), \quad (2)$$

с областью определения $x \in (-\pi, +\pi)$. Тогда, как известно, такая функция может быть разложена в сходящийся бесконечный ряд вида [2]

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots, \quad (3)$$

где коэффициенты a_k , b_k , называемые коэффициентами Фурье, определяются формулами:

$$a_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$b_n = 1/\pi \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx dx$$

Задача практического применения ряда Фурье сводится к представлению функции с помощью небольшого числа гармонических составляющих [6]. С помощью ряда Фурье можно аппроксимировать заданную функцию $y = f(x)$ на конечном интервале «равномерно хорошо» [2]. Это означает, что учитываются приближения функции во всех точках интервала.

Решение задачи

Рассмотрим процедуру определения коэффициентов ряда Фурье в выражении (3) с помощью метода наименьших квадратов (МНК). В точках измерений $i = \overline{1, n}$ значения модели:

$$f(x_1) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x_1 + a_2 \cos 2x_1 + \dots + a_n \cos nx_1 + b_1 \sin x_1 + b_2 \sin 2x_1 + \dots + b_n \sin nx_1$$

$$f(x_2) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x_2 + a_2 \cos 2x_2 + \dots + a_n \cos nx_2 + b_1 \sin x_2 + b_2 \sin 2x_2 + \dots + b_n \sin nx_2$$

$$\dots$$

$$f(x_n) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x_n + a_2 \cos 2x_n + \dots + a_n \cos nx_n + b_1 \sin x_n + b_2 \sin 2x_n + \dots + b_n \sin nx_n, \quad (4)$$

где $x_i, y_i - i$ – ое значение аргументов соответственно.

Введем обозначения η_i как разность между измеренным значением функции y_i и приближенным значением $f(x_i)$ при $x = x_i$, т.е.

$$\eta_i = y(x_i) - \frac{1}{2} a_0 - a_1 \cos x_i - a_2 \cos 2x_i - \dots - a_n \cos nx_i - b_1 \sin x_i - b_2 \sin 2x_i - \dots - b_n \sin nx_i \quad (5)$$

Значения a_i и b_i находятся из условия минимума суммы квадратов отклонений

$$S = \sum n_i^2 = \sum [y_i - a_0 - a_1 \cos x_1 - \dots - a_n \cos nx_i - b_1 \sin x_1 - \dots - b_n \sin nx_i]^2,$$

где m – количество значений y и x . Функция S , как положительно определенная квадратичная форма, достигает минимума при

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_n} = 0.$$

Выполнив дифференцирование в (4) получим систему алгебраических уравнений с равным количеством неизвестных n уравнений

$$\begin{bmatrix}
 m & \sum_{i=1}^m \cos x_i & \sum_{i=1}^m \cos 2x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \cos nx_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i & \sum_{i=1}^m \sin 2x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \\
 \sum_{i=1}^m \cos x_i & \sum_{i=1}^m \cos^2 x_i & \sum_{i=1}^m \cos 2x_i \cos x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \cos nx_i \cos x_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i \cos x_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \cos x_i \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \sum_{i=1}^m \cos nx_i & \sum_{i=1}^m \cos x_i \cos nx_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \cos^2 nx_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i \cos nx_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \cos nx_i \\
 \sum_{i=1}^m \sin x_i & \sum_{i=1}^m \cos x_i \sin x_i & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \cos nx_i \sin x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \sin^2 x_i & \dots & \sum_{i=1}^m \sin nx_i \sin x_i \\
 \sum_{i=1}^m \sin nx_i & \sum_{i=1}^m \cos x_i \sin nx_i & \dots & \dots & \dots & \dots & \sum_{i=1}^m \cos nx_i \sin nx_i & \sum_{i=1}^m \sin x_i \sin nx_i & \sum_{i=1}^m \sin^2 nx_i
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_0 \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i \cos x_i \\ \dots \\ \sum y_i \cos nx_i \\ \sum y_i \sin x_i \\ \sum y_i \sin nx_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

Решив систему (6), найдем значения неизвестных параметров модели a_i и b_i .

Рассмотрим теперь рекуррентные соотношения (фильтр Винера-Калмана [1,3]) для определения неизвестных параметров модели. Систему (4) представим в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos x_1 & \cos 2x_1 & \dots & \cos nx_1 & \sin x_1 & \dots & \sin nx_1 \\ 1 & \cos x_2 & \cos 2x_2 & \dots & \cos nx_2 & \sin x_2 & \dots & \sin nx_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos x_k & \cos 2x_k & \dots & \cos nx_k & \sin x_k & \dots & \sin nx_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_k \end{bmatrix}$$

или

$$X_k \vec{a}_k = \vec{y}_k, \quad (7)$$

где $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n)^T$. Произведя $k+1$ -ое измерение из (7) получим $X_{k+1} \vec{a}_{k+1} = \vec{y}_{k+1}$, где

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} & & & X_k & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \cos x_{k+1} & \cos 2x_{k+1} & \dots & \cos nx_{k+1} & \sin x_{k+1} & \dots & \sin nx_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k \\ \dots \\ \vec{a} \end{bmatrix}$$

$$\vec{y}_{k+1} = \begin{cases} \vec{y}_k \\ y_{k+1} \end{cases}, \quad \vec{a} = (1 \quad \cos x_{k+1} \quad \cos 2x_{k+1} \quad \dots \quad \cos nx_{k+1} \quad \sin x_{k+1} \quad \dots \quad \sin nx_{k+1})$$

Применяя рекуррентные формулы из [1] имеем:

$$\begin{aligned}
 P_{k+1} &= P_k - P_k \vec{a}^T (\vec{a} P_k \vec{a}^T + 1)^{-1} \vec{a} P_k \\
 \vec{a}_{k+1} &= P_k \vec{a}^T (\vec{a} P_k \vec{a}^T + 1)^{-1} (y_{k+1} - \vec{a} \vec{a}_k)
 \end{aligned} \quad (8)$$

Алгоритм построения математической модели с помощью гармонического анализа

Представим общий алгоритм построения и адаптации параметров математической модели объекта. Для построения математической модели объекта обычно используется опытная информация о состоянии объекта, которую можно использовать для априорного

определения параметров модели [3]. Для этой цели в случае построения модели с помощью гармонического анализа можно использовать МНК (соотношения (6)). На рис. 1 представлен алгоритм построения математической модели объекта по априорным данным.

Алгоритм, представленный на рис. 1, состоит из следующих основных этапов.

1. Ввод исходных данных и преобразование по формулам (1) и (2).

2. Вычисление нулевого члена разложения функции $f(x)$ (модели) в ряд Фурье. В

качестве начального приближения можно взять среднее значение: $a_0 = \overline{f(x_i)}$.

3. Для следующего члена разложения в ряд Фурье проводится вычисление параметров по МНК.

4. Вычисляется невязка значений модели и исходной функции в точках измерений по формуле

$$f(x), \quad (9)$$

5. Если невязка удовлетворяет заданному критерию

$$\delta < \varepsilon, \quad (10)$$

то модель можно считать построенной. Если нет, – то добавляется еще один член ряда Фурье и заново проводится этап 3 вычисление невязки по формуле (9) и проверки условия (10).

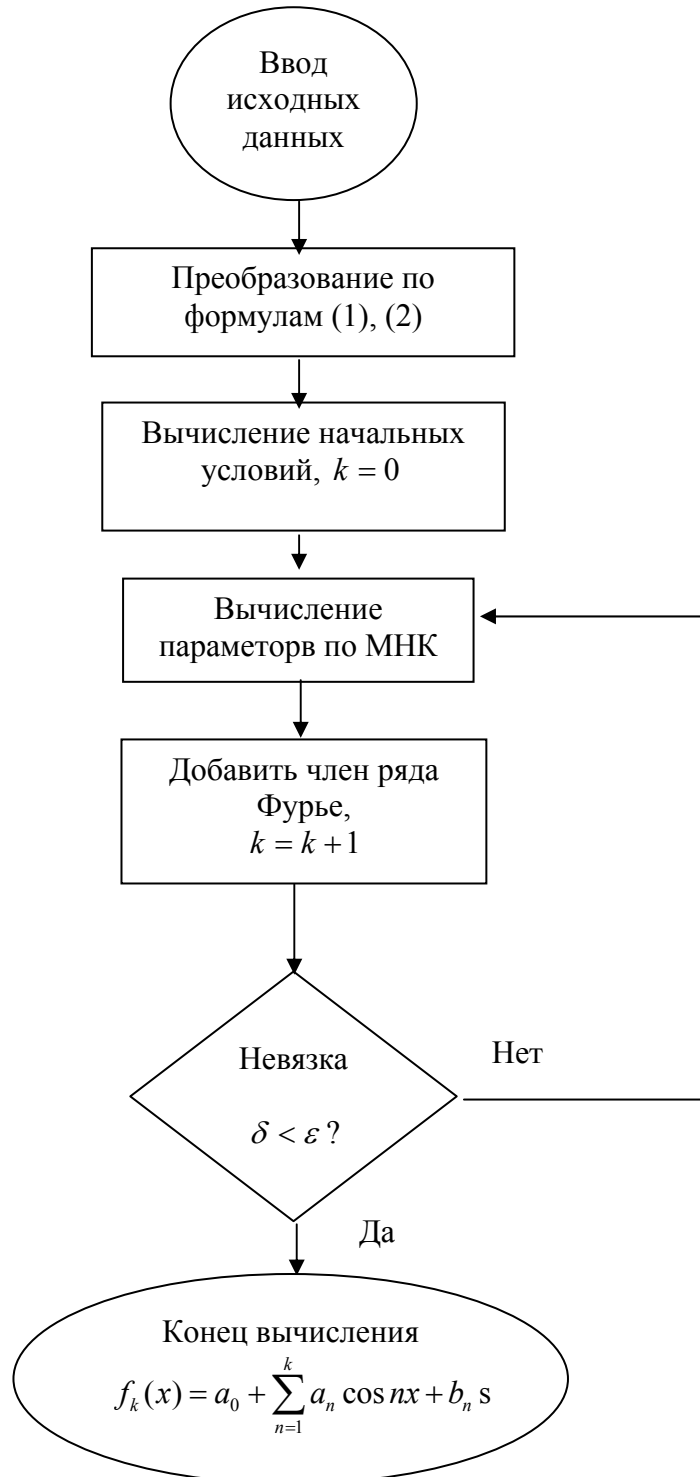


Рис. 1. Алгоритм построения математической модели по априорным данным

Отметим, что на практике в связи со стохастическим характером функции и ошибками измерений не следует задавать слишком малым значение ε в формуле (10). Значение ε должно быть порядка величины среднеквадратической ошибки измерений.

Представим далее алгоритм уточнения математической модели в процессе прогнозирования и поступления новых данных (см. рис. 2).

В начале производится прогноз с помощью модели, построенной по априорным данным. Затем, при поступлении новых данных, производится адаптация параметров модели по Винеру-Калману (10) и производится новый прогноз. В дальнейшем, при поступлении новых данных цикл адаптации и прогнозирования повторяется.

Результаты расчетов

Проверим сходимость и устойчивость предложенного метода по определению неизвестных параметров a_n , b_n определяющих аппроксимацию временной зависимости $\varphi(t_i)$, представленной в таблице 1, на интервале $t \in [0, T]$, где $T = 48$ – интервал прогнозирования.

Таблица 1

Временная зависимость $y(t)$

t	x	y	t	x	y	t	x	y	t	x	y
1	-3.011	0.7	13	-1.440	6.2	25	0.131	5.7	37	1.702	5.0
2	-2.880	2.1	14	-1.309	6.2	26	0.262	5.7	38	1.833	5.0
3	-2.749	3.9	15	-1.178	6.2	27	0.393	5.6	39	1.963	4.9
4	-2.618	5.3	16	-1.047	6.2	28	0.524	5.6	40	2.094	4.9
5	-2.487	6.0	17	-0.916	6.2	29	0.654	5.5	41	2.225	4.8
6	-2.356	6.2	18	-0.785	6.1	30	0.785	5.5	42	2.356	4.7
7	-2.225	6.2	19	-0.654	6.1	31	0.916	5.4	43	2.487	4.7
8	-2.094	6.2	20	-0.524	6.0	32	1.047	5.3	44	2.618	4.6
9	-1.963	6.2	21	-0.393	6.0	33	1.178	5.3	45	2.749	4.5
10	-1.833	6.2	22	-0.262	5.9	34	1.309	5.2	46	2.880	4.4
11	-1.702	6.2	23	-0.131	5.9	35	1.440	5.2	47	3.011	4.4
12	-1.571	6.2	24	0.000	5.8	36	1.571	5.1	48	3.142	4.3

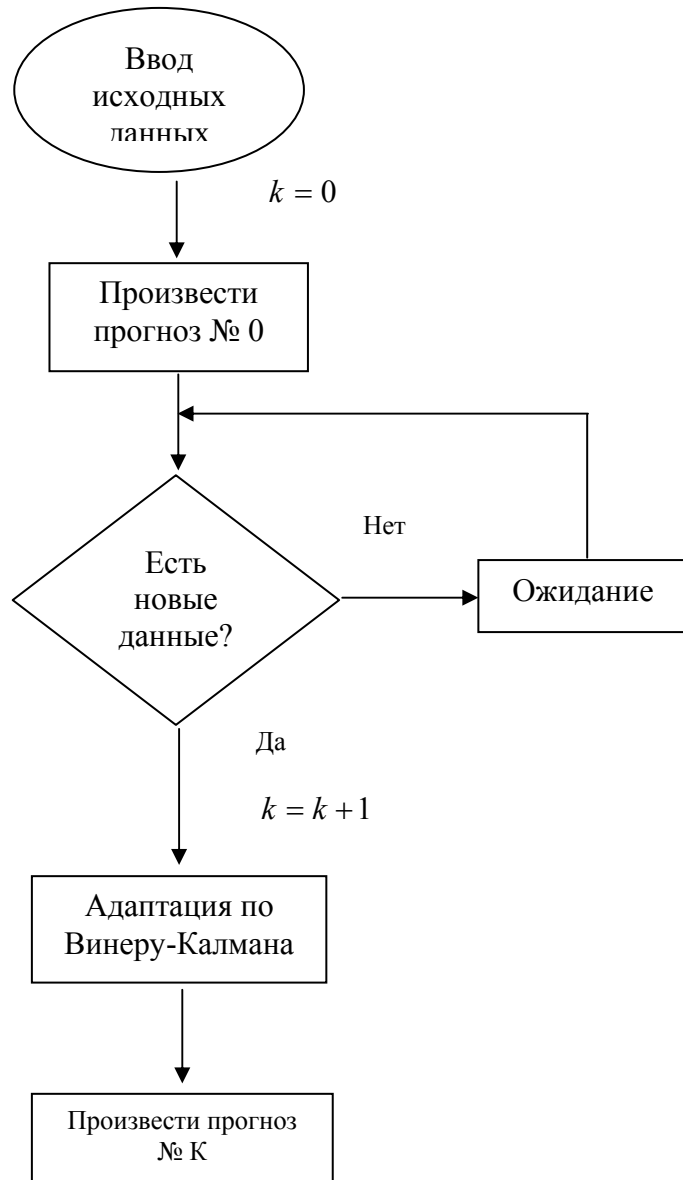


Рис. 2 Адаптация параметров модели в процессе прогнозирования.

В данном случае будем считать, что априорные данные о представленной зависимости отсутствуют, и начальные значения параметров модели берутся произвольными.

Далее проведем вычисления параметров модели a_n, b_n по рекуррентным формулам (8), и проверим сходимость к апостериорным оценкам тех же параметров, полученных с помощью МНК по формулам (6) $a_n^{МНК}, b_n^{МНК}$.

Вычисления проведем для случаев максимального количества членов разложения $n_{\max} = 0, 1, 2$, то есть на примерах моделей, когда ряды Фурье имеют вид

$$\begin{aligned}
 y_0 &= a_0; \\
 y_2 &= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x; \\
 y_3 &= a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x.
 \end{aligned}$$

На рис. 3, 4 показаны отклонения значений неизвестных параметров, вычисленных детерминированным МНК и адаптивным методом (по рекуррентным формулам (8)) при $n_{\max} = 1$, $n_{\max} = 2$ в зависимости от количества измерений.

На этих рисунках по оси ординат отложена невязка ($a_i - a_i^{\text{МНК}}$), а по оси абсцисс количество итераций.

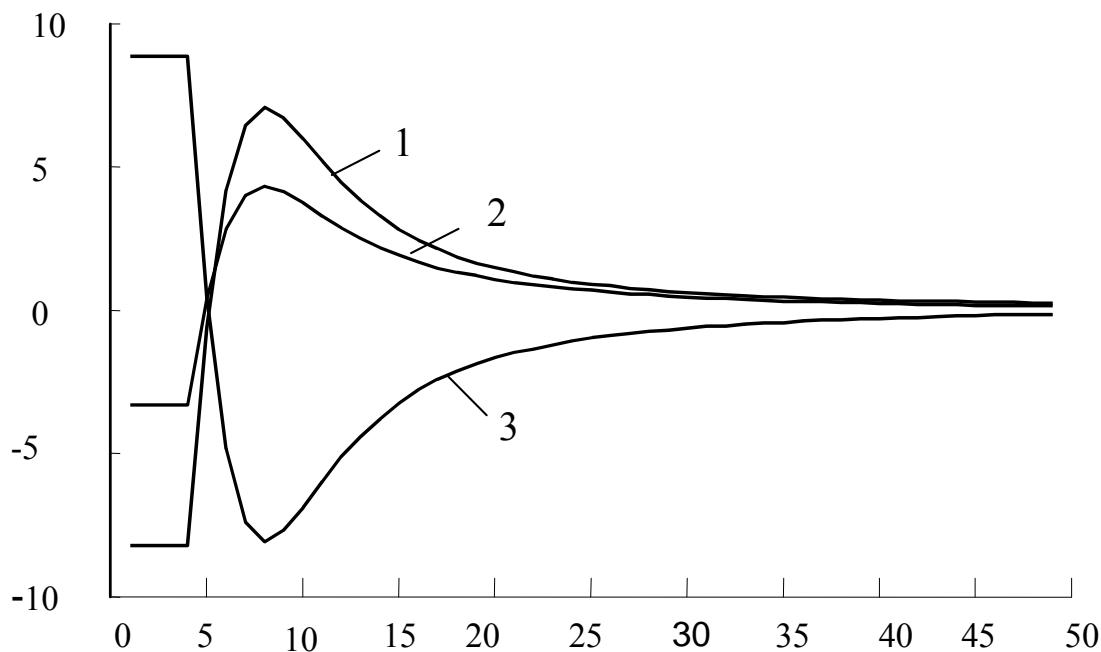


Рис. 3 Текущие отклонения параметров a_0 (кривая 1), a_1 (кривая 2), b_1 (кривая 3) при $n_{\max} = 1$ от рассчитанных по МНК

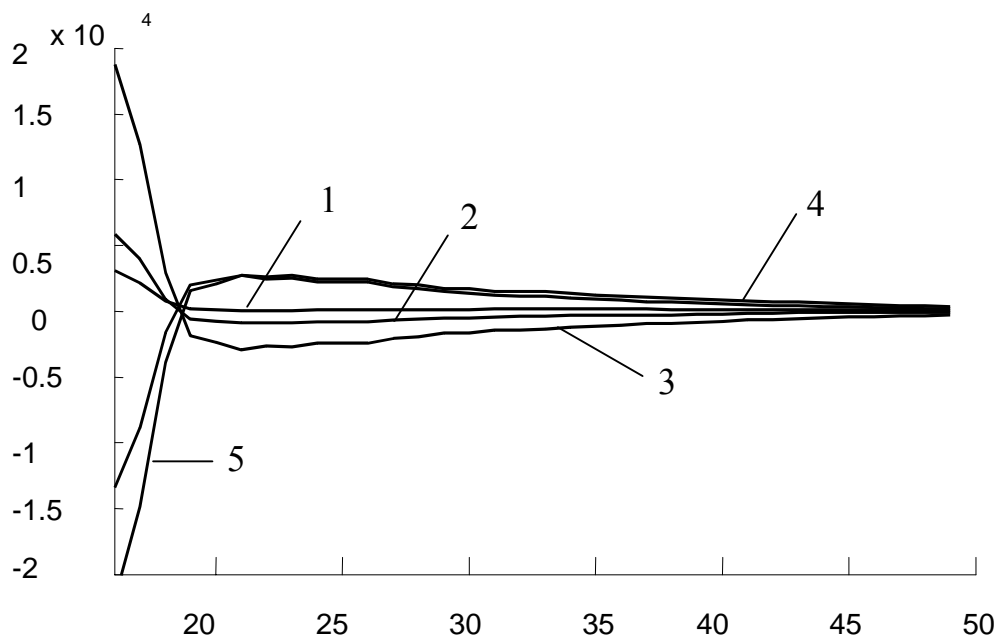


Рис. 4 Текущие отклонения параметров a_0 (кривая 1), a_1 (кривая 2), b_1 (кривая 3), a_2 (кривая 4), b_2 (кривая 5) при $n_{\max} = 2$ от рассчитанных по МНК

Анализ графиков свидетельствует о сходимости значений параметров, вычисленных при помощи адаптивных формул (8) к значениям, вычисленным *a posteriori* по МНК уже при количестве итераций, равной 50.

Заключение

Сформулирован алгоритм построения математической модели объекта с помощью гармонического анализа и адаптивного уточнения параметров. Используется алгоритм Винера-Калмана для адаптивного уточнения численных параметров математических моделей. Алгоритм применялся для построения математической модели зависимости, заданной таблицей 1. Бралось ограниченное количество членов ряда Фурье $n_{\max} = 1$, $n_{\max} = 2$. Показана сходимость и устойчивость рекуррентных соотношений (8) к соотношениям, определяемым по МНК.

Таким образом, полученная математическая модель объекта, может быть использована в системе управления, в котором модель корректируется на каждом шаге измерения по формуле (8). При этом для корректировки модели на каждом шаге используется только последняя точка измерений.

Problems of applying of Winner-Kalman filter for adaptive defining of objects mathematics model with using of harmony analyse are considered in this article. Equations for providing of necessary calculation and example for characterising the convergence of recurrent formulas are given.

1. Р. Ли. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление.—М.: Наука, 1966.—176 с.
2. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство / Под ред. А.М. Лопшица.—М.: Госфизматлит, 1961.—521 с.
3. Згуровский М.З., Подладчиков В.Н. Аналитические методы Калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью.—К.: Наукова думка, 1995.—283 с.
4. Гасанов А.С. Адаптивные методы построения математических моделей объектов / Кибернетика и вычислительная техника.—2004.—№ 142.—С. 57-68.
5. Бидюк П.И., Гасанов А.С., Подладчиков В.Н. Прогнозирование значений параметров динамических систем с помощью адаптивного фильтра Калмана / Кибернетика и системный анализ.—2001.—№ 4.—С. 21–33.
6. Гасанов А.С. Адаптивные методы построения математических моделей объектов с помощью гармонического анализа / Международная научная конференция “Интеллектуальные системы принятия решений и прикладные аспекты информационных технологий” (IDMIT'2005).—Евпатория: Херсонский морской институт, 2005.—Том 1.—С. 56–60.