

УДК 519.7

## О ВЛИЯНИИ КОНСТРУКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ОБРАТНОЙ МОДЕЛИ НА ЕЁ УСТОЙЧИВОСТЬ

Клименко А.К.

### 1. Постановка проблемы и её связь с практическими заданиями

Последние годы характеризуются бурным развитием компьютерных информационных технологий. Использование аналитических преобразований совместно с численными методами даёт возможность создавать новые подходы для решения задач в различных областях науки и техники.

Для решения многих задач управления и контроля требуется применение обратной модели (ОМ) динамического объекта (ДО). Идеальная ОМ реального объекта, как известно [1], неосуществима. На аналоговых средствах техники удавалось создавать лишь приближенные ОМ для ДО, описываемых уравнениями не выше второго порядка. Применение средств вычислительной техники позволило найти технические решения ОМ [2,3], приближающие её показатели качества к идеальным и не зависящие от порядка описываемых ДО уравнений. Кроме того, на этих средствах удалось разработать и ОМ для многосвязного ДО [4].

При создании дискретной ОМ возникают две проблемы.

Первой из них является определение пределов изменения конструктивных параметров ОМ, в которых обеспечивается её устойчивость, а второй — уточнение этих параметров для получения желаемых показателей качества.

При создании дискретной обратной модели обе эти проблемы решаются путём нахождения двух конструктивных параметров – дискретности времени  $T$  и временного сдвига  $\tau$ . Уменьшение этих параметров даёт возможность приближать показатели качества создаваемой модели к идеальной, но сопровождается повышением колебательности ОМ вплоть до потери устойчивости.

В техническом решении ОМ, приведенном в работах [2,3], не возникает проблемы обеспечения устойчивости в случае, когда ДО описывается уравнением первого порядка. Повышение порядка уравнения приводит к проблеме как устойчивости, так и показателей качества. В ОМ [5] удаётся подавить колебательность, но проблема обеспечения устойчивости сохраняется. В работе [6] предлагается техническое решение ОМ, обеспечивающее возможность улучшать её показатели качества за счёт одновременного уменьшения параметров  $T$  и  $\tau$ . Устойчивость в этом случае может быть обеспечена при определенном соотношении между этими параметрами.

В данной работе рассматривается проблема определения области устойчивости создаваемой ОМ в функции двух конструктивных параметров: дискретности времени  $T$  и временного сдвига  $\tau$ .

Проблема рассматривается на примере ОМ [6] с получением выводов о применимости полученных результатов к другим техническим решениям её.

### 2. Анализ известных решений и применение их к исследованию устойчивости ОМ

Каждая из ОМ, рассматриваемых в данной работе, является замкнутой импульсной системой без непрерывной части. В её математическом описании нет алгебраического характеристического уравнения, поэтому для исследования её на устойчивость целесообразно обращаться к критерию Найквиста. Для этого прежде всего нужно найти математическое выражение частотной характеристики ОМ в разомкнутом состоянии.

Обратная модель создаётся для линейного стационарного динамического объекта (ДО), который устойчив и функционирует в непрерывном времени. В качестве математического описания ДО может выступать его передаточная функция  $W(s)$  или переходная характеристика  $h(t)$ . Далее в качестве математического описания ДО будем рассматривать его переходную характеристику (кривую переходного процесса). Последняя может быть получена как обратное преобразование Карсона-Хевисайда от его передаточной функции или найдена экспериментальным путём. Полагаем, что переходный процесс равен нулю в начальный момент времени и устанавливается на конечном интервале  $T_2$ , т.е.

$$h(t)|_{t \leq 0} = 0, \quad h(t)|_{t > T_2} = h_{уст}, \quad (1)$$

где  $h_{уст}$  — установившееся значение переходного процесса.

Переходная характеристика может быть представлена в дискретном времени:

$$h(n, \gamma) = h(n + \gamma) = h(t)|_{t=(n+\gamma)T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_2, \quad (2)$$

где  $T$  — шаг квантования (дискретность времени),

$\gamma$  — дробная часть дискретного времени,

$N_2$  — время затухания переходного процесса ( $N_2 = T_2 / T$ ).

$n$  — дискретное время ( $n = \bar{t} / T$ , где  $\bar{t}$  — моменты непрерывного времени, кратные  $T$ ).

В качестве математического описания ДО при конструировании ОМ используется числовой массив его импульсной переходной функции (ИПФ), который может быть получен из переходной характеристики (2) в дискретном времени:

$$k(n, \gamma) = k(n + \gamma) = h(n + \gamma) - h(n - 1 + \gamma), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_2. \quad (3)$$

При разработке ОМ задаются численные значения дискретности времени  $T$  и временного сдвига  $\gamma = \tau$  в выражениях (2) и (3).

Математическое описание приведенной в [3] ОМ имеет вид:

$$c(n) = \left\{ x(n) - \sum_{m=1}^{N_2} c(n-m)k(m+\tau) \right\} / k(\tau), \quad (4)$$

где  $x(n)$  и  $c(n)$  — соответственно входной и выходной сигналы ОМ,

$m$  — переменная суммирования,

$\tau$  — конструктивный временной сдвиг, удовлетворяющий условиям:

$$0 < \tau \leq 1,$$

$$|k(\tau)| = |k(n+\tau)|_{n=0} > 0. \quad (5)$$

На основании приведенных в [3] материалов можно показать, что описываемая уравнением (4) ОМ устойчива по Найквисту, если на комплексной плоскости точку с координатами  $-1, j0$  не охватывает частотный годограф

$$K(j\bar{\omega}) = \sum_{n=1}^{N_2} \frac{k(n+\tau)}{k(\tau)} \cos(\bar{\omega}n) - j \sum_{n=1}^{N_2} \frac{k(n+\tau)}{k(\tau)} \sin(\bar{\omega}n), \quad 0 \leq \bar{\omega} \leq 2\pi, \quad (6)$$

где  $\bar{\omega}$  — приведенная к дискретному времени частота ( $\bar{\omega} = \omega T$ ).

Приведенные выше зависимости (1-6) предназначены для использования при решении задач данной работы.

### 3. Постановка задач

Сформулированное выше условие устойчивости относится к техническому решению ОМ, приведенному в работе [3]. Оно не дает сведений о конкретном влиянии

конструктивных параметров  $T$  и  $\tau$  на устойчивость. Кроме того, нет сведений о возможности использования этого условия при исследовании на устойчивость ОМ по работе [6].

Задачами данной работы являются:

- нахождение условия устойчивости ОМ по техническому решению [6],
- определение границы устойчивости обратных моделей на плоскости параметров

$T$  и  $\tau$  независимо от их технического выполнения.

#### 4. Изложение материалов исследования

Известная из [6] ОМ описывается математической зависимостью

$$c(n) = \left[ Bx(n) - \sum_{m=1}^{N_2} c(n-m)k(m+\tau) \right] / k(\tau), \quad (7)$$

где  $B$  – постоянный коэффициент, определяемый в процессе моделирования.

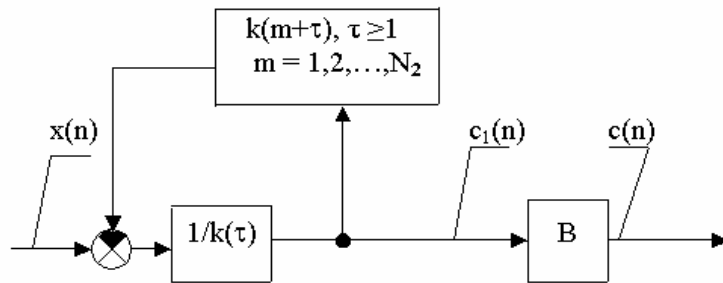


Рис.1 Структурная схема обратной модели

Эта ОМ может быть представлена как импульсная следящая система с изображённой на рис.1 структурной схемой. Звено с коэффициентом передачи  $B$  находится вне замкнутого контура и на устойчивость не влияет. Замкнутый же контур описывается уравнением (4), а его частотная характеристика в разомкнутом состоянии имеет вид (6).

Отсюда следует, что условия устойчивости у технических решений ОМ по [3] и [6] идентичны.

Для определения границы устойчивости ОМ на плоскости параметров  $T$  и  $\tau$  поступаем следующим образом.

Как известно [7], частотная характеристика разомкнутой импульсной системы симметрична относительно действительной оси и пересекает её при относительной частоте  $\bar{\omega} = \pi$ . Полагаем, что разомкнутый контур устойчив и его частотный годограф не пересекает действительной оси при  $\pi > \bar{\omega} > 0$ . Тогда необходимым и достаточным условием устойчивости замкнутого контура будет выполнение неравенства:

$$K(j\bar{\omega}) \Big|_{\bar{\omega}=\pi} > -1. \quad (8)$$

Подставляем в неравенство (8) выражение для  $K(j\bar{\omega})$  из (6) и решаем его, принимая во внимание, что  $\sin(\pi n) = 0$ , а  $\cos(\pi n) = (-1)^n$ . В результате решения получаем условие устойчивости:

$$k(\tau) > \sum_{i=1}^{N_2} (-1)^{i+1} k(i+\tau). \quad (9)$$

Обозначим правую часть неравенства (9) символом  $\tilde{S}_k$  и назовём её остаточной

суммой знакопеременного ряда чисел ИПФ ДО. Сам же числовой массив  $k(n + \tau)$  получен из математического описания ДО при выбранных параметрах  $T$  и  $\tau$  ОМ с использованием зависимостей (3) и (5).

Условие устойчивости (9) словесно можно сформулировать так: численные значения дискретности времени  $T$  и конструктивного временного сдвига  $\tau$  ОМ должны выбираться таким образом, чтобы первый член числового ряда ИПФ ДО  $k(\tau)$  был больше остаточной суммы  $\tilde{S}_k$ .

Переменные  $k(\tau)$  и  $\tilde{S}_k$  являются функциями конструктивных параметров ОМ:  $T$  и  $\tau$ . На рис.2 в качестве примера приведены графики зависимостей  $k(\tau)$  и  $\tilde{S}_k$  от величины дискретности  $T$  при постоянном значении  $\tau$ . При весьма малой дискретности имеет место  $k(\tau) < \tilde{S}_k$ , что свидетельствует о неустойчивости ОМ. При росте дискретности остаточная сумма  $\tilde{S}_k$  сначала увеличивается вместе с  $k(\tau)$ , а затем быстро уменьшается. При определённом значении дискретности  $T = T^*$  справедливо равенство  $k(\tau) = \tilde{S}_k$ , что свидетельствует о границе устойчивости.

В случае изменения параметра  $\tau$  изменится и значение дискретности  $T^*$ , соответствующее границе устойчивости. Поэтому возникает потребность построить кривую границы устойчивости в плоскости параметров  $T$  и  $\tau$ . Границе устойчивости соответствует преобразование неравенства (9) в равенство. Перенеся сумму из правой

части неравенства в левую и заменив знак неравенства на знак равенства, получим уравнение для построения кривой границы устойчивости:

$$\sum_{i=0}^{N_2} (-1)^i k(i + \tau) = 0.$$

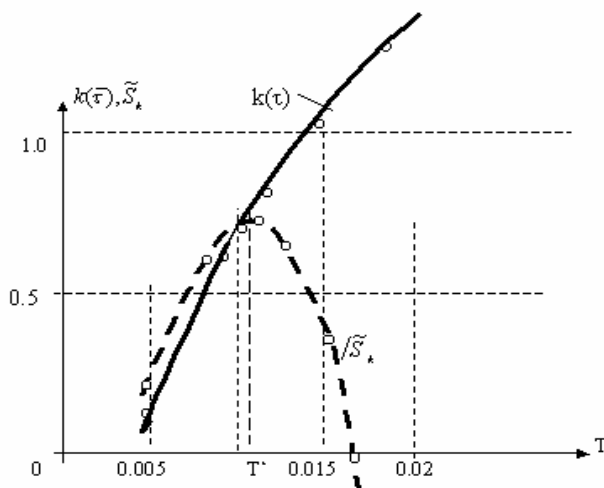


Рис.2 Графики зависимостей  $k(\tau)$  и  $\tilde{S}_k$  от дискретности  $T$

Левая часть полученного уравнения представляет собой полную сумму знакопеременного ряда из числового массива ИПФ ДО. Она является функцией двух переменных. Обозначим её символом

$$S_k(T, \tau) = \sum_{i=0}^{N_2} (-1)^i k(i + \tau).$$

Уравнение границы устойчивости получает вид:

$$S_k(T, \tau) = 0. \quad (10)$$

### 5. Экспериментальная часть

Порядок построения кривой границы устойчивости на плоскости параметров  $T$  и  $\tau$  для проверки полученных теоретических результатов состоит в следующем.

1. Задаются исходные данные о ДУ, для которого создается ОМ. Таковыми является математическое описание кривой переходного процесса  $h(t)$  в непрерывном времени.

2. Задаются первые приближенные значения конструктивных параметров  $T$  и  $\tau$ . Например,  $\tau = 1$ , а дискретность  $T$  принимается равной одной десятой от времени затухания переходного процесса  $T_2$ .

3. Вычисляется числовой массив  $h(n)$  по формуле (2), учитывая, что  $\gamma = \tau$ .

4. Вычисляется числовой массив  $k(n+\tau)$  по формуле (3).

5. Вычисляется полная сумма знакопеременного ряда и проверяется соответствие полученного значения уравнению (10).

6. Если  $S_k(T, \tau) = 0$ , то при заданных параметрах  $T$  и  $\tau$  ОМ находится на границе устойчивости. Это можно отметить постановкой точки на плоскости параметров и перейти к п.2, задав новое значение  $\tau$ .

7. Если  $S_k(T, \tau) > 0$ , что свидетельствует об устойчивости ОМ, вернуться к п.2, уменьшить ранее заданную величину  $T$  и повторить операции по пунктам 3-5. В случае, если  $S_k(T, \tau) < 0$ , сделать то же самое, но при увеличении  $T$ .

По полученным данным строится кривая границы устойчивости.

Пример такой кривой приведен на рис.3. Находящаяся ниже полученной кривой область параметров 1, отмеченная штриховкой, является областью неустойчивости.

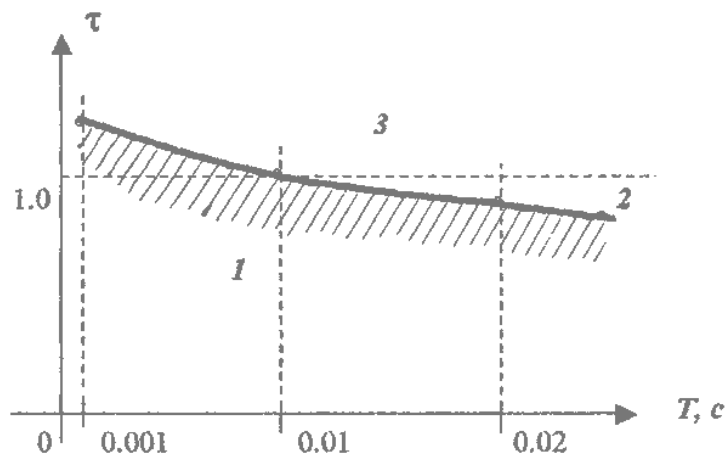


Рис.3 Граница устойчивости на плоскости параметров  $T$  и  $\tau$

Полученные результаты подтверждены моделированием. При этом были использованы как специально разработанные программы, так и пакет прикладных программ MathCad.

### 6. Выводы по результатам исследования и перспективы

Наличие графика границы устойчивости на плоскости параметров облегчает разработку обратной модели для данного ДУ. Сам график может выступать как составная часть математического описания ДУ.

Процесс конструирования ОМ сводится к выполнению следующих операций.

Из исходного математического описания ДО строится кривая переходного процесса и устанавливается время его угасания. Определяются первоначальные значения параметров  $T$  и  $\tau$ , Вычисляются числовые массивы  $h(n)$  и  $k(n)$ .

Строится кривая границы устойчивости (10).

По кривой границы устойчивости выбирается техническое решение ОМ.

Выбор совокупности значений  $T$  и  $\tau$  в области 1 по рис.3 неприемлем, т.к. не обеспечивает устойчивости ОМ. Если желаемые параметры находятся в области 2, то может быть использовано техническое решение ОМ из [3] или [5]. При нахождении совокупности конструктивных параметров ОМ в области 3 выбирается техническое решение [6].

Полученные результаты создают предпосылки для разработки методики численного конструирования ОМ с получением желаемых показателей качества. Работа в этом направлении ведётся.

Изложенные результаты могут быть использованы и в инженерно-педагогических учебных пособиях для освоения новых способов решения задач на основе современных компьютерных технологий.

Influence of step-type behavior of time and shift of time for stability of discrete inverse model is considered. The condition of stability as a function of initial parameters of modeling object and design data of inverse model is determined. The limit of stability on a plane of parameters is considered.

1. Петров Б.Н., Кухтенко А.И. Теория проектирования инвариантных систем. Современные методы проектирования систем автоматического управления / Под ред. Б.Н. Петрова, В.В. Солодовникова, Ю.И. Топчеева. – М.: Машиностроение, 1967. – С. 18 – 78.
2. Клименко А.К., Клименко В.Г. Корректирующее устройство. А.с. 1406563 (СССР).
3. Клименко А.К. Обратная динамическая модель для решения задач управления и контроля качества // Методы менеджмента качества . – 1999. - № 8. – С. 32 – 39.
4. Клименко А.К. Обратная модель для контроля качества многосвязных динамических объектов // Методы менеджмента качества. – 2000. - № 5. – С. 36-40.
5. Клименко А.К. О подавлении колебаний в дискретной обратной модели // Надёжность и качество 2002: Труды международного симпозиума /Под ред. Н.К.Юркова.— Пенза : Информационно-издательский центр Пенз. гос. ун-та, 2002. – С. 138-139.
6. Клименко А.К. Обратная модель с улучшенными показателями качества // Надёжность и качество 2003: Труды международного симпозиума /Под ред. Н.К.Юркова.— Пенза : Информационно-издательский центр Пенз. гос. ун-та, 2003. – С.237-239.
7. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. – М.: Физматгиз, 1963. – С.269.