УДК 519.63:539.3

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ФОРМЫ НА ГЕКСАГОНЕ

Хомченко А.Н. , Моисеенко С.В. , Цыбуленко О.В.

**Постановка проблемы, анализ предшествующих публикаций**

Дискретный элемент в форме правильного шестиугольника (гексагона) с узлами интерполяции в вершинах широко применяется в расчетах ядерных реакторов и других конструкций с фрагментами сотовой геометрии [1,2]. Попытка построить средствами матричной алгебры стандартный шестипараметрический полином, решающий задачу лагранжевой интерполяции на гексагоне, оказалась неудачной [1], так как привела к вырождению СЛАУ. Эта особенность гексагона стимулировала развитие геометрических подходов к построению гексагональных функций формы. Именно благодаря геометрическому моделированию появился дробно-рациональный базис гексагона [1,3], а вскоре и полиномиальный [4]. В работе [5] впервые показана возможность распространения геометрического моделирования на полиномиальные базисы гексагонов высших порядков.

Геометрическое конструирование на гексагоне полиномиальной функции формы, как правило, приводит к появлению “лишних” членов высших порядков, что вызывает аномальное поведение базисной функции внутри гексагона и/или на его границе. В некоторых случаях такие аномалии не имеют нежелательных последствий благодаря полному или частичному сглаживанию при ансамблировании функций формы [2]. В других случаях [3] могут потребоваться специальные приемы нормализации “базиса” для создания необходимых интерполяционных качеств и вычислительных свойств модели.

**Цель работы** – проиллюстрировать возможность геометрического конструирования системы полиномиальных функций формы, решающих задачу лагранжевой интерполяции на гексагоне по известным значениям искомой функции в вершинах элемента. Гексагон рассматривается как самостоятельный вычислительный шаблон, оснащенный унитарным набором функций формы для восстановления финитной полевой функции. Поэтому традиционные для МКЭ вопросы ансамблирования элементов и межэлементной непрерывности здесь не рассматриваются.

*Основная часть.* В плоскости $0xy$ рассмотрим правильный шестиугольник, вписанный в окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис.1).

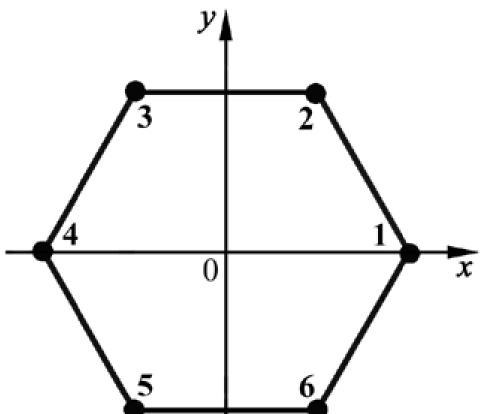


Рис.1 Гексагональный элемент с 6-ю узлами


ISBN 7-776-8361-7

Главная задача заключается в построении набора из шести полиномов $p_i(x,y)$, удовлетворяющих интерполяционной гипотезе Лагранжа:

$$p_i(x_k, y_k) = \delta_{ik} \qquad (k = \overline{1,6}), \tag{1}$$

где $\delta_{ik}$ - символ Кронекера.

Мы начнем построение с функции $p_1(x,y)$, которая ассоциируется с узлом 1(1;0). Из условий (1) следует, что эта функция равна единице в "своём" узле и нулю в остальных узлах. Геометрически $p_1(x,y)$ – это поверхность, "нависающая" над гексагоном и образованная перемещением (трансляцией) выпуклой параболы $Y(y) = \frac{1}{3}(3-4y^2)$ по вогнутой параболе $X(x) = \frac{1}{6}(2x^2+3x+1)$. Такие поверхности в теории конструкционных оболочек называют трансляционными. Таким образом, мы получаем первую функцию в виде:

$$p_1(x,y) = \frac{1}{18}(2x^2+3x+1)(3-4y^2)\,. \tag{2}$$

Остальные функции получаются из (2) вращением системы координат на угол, кратный $60^0$. На рис.2 показана функция $p_1(x,y)$.

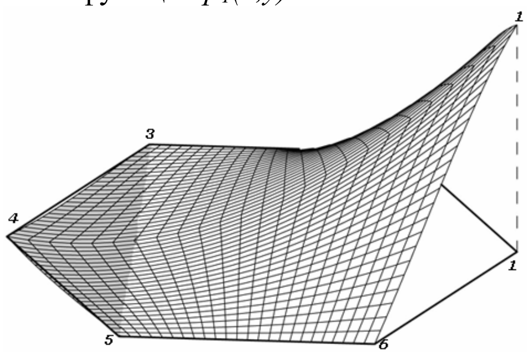


Рис.2 График функции $p_1(x,y)$

Заметим, что поверхности $p_1(x,y)$ и $p_4(x,y)$симметричны относительно координатной плоскости y=0. Вообще, поверхность $p_i(x,y)$ симметрична относительно вертикальной диагональной плоскости, проходящей через узел $i$ и центр гексагона. Все функции $p_i(x,y)$ одинаковы, что является следствием симметрии гексагона. При безусловном соблюдении интерполяционной гипотезы всё же имеет место нарушение весового баланса в системе трансляционных функций формы. Подобный недостаток был обнаружен в несовершенной системе полиномов Ишигуро [1,3]. Однако, в отличие от сильно избыточной модели Ишигуро, здесь дисбаланс гораздо слабее

$$1 \le \sum_{i=1}^{6} p_i(x,y) \le 1{,}08(3). \tag{3}$$

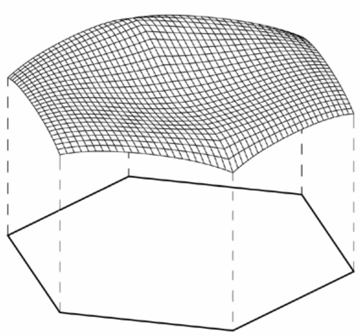

Рис.3. Сумма функций формы гексагона

Рис.3 дает наглядное представление об отклонениях суммы (3) от стандарта. Как видим, трансляционный базис практически не отличается от синтетического [6], что позволяет рассчитывать на практическую пригодность построенной системы функций. Ясно, что в большинстве задач интерполяции потенциального поля трансляционный базис будет давать вполне приемлемые результаты. В условиях повышенных требований к точности вычислений можно нормализовать трансляционный базис с целью полного устранения дисбаланса, как это было сделано с полиномами Ишигуро [1,3]. Правда, в этом случае нормирующий множитель должен обеспечить немонотонное сжатие поверхности (рис.3) к плоскости $0xy$. Ясно, что это приведет к новому дробно-рациональному базису.

*Выводы.* Идея разделения переменных в интерполяционном коэффициенте Лагранжа $p_1(x,y)$ дает простой и наглядный способ конструирования трансляционных функций формы на гексагоне. Слабое нарушение весового баланса не влияет существенно на вычислительные качества модели и при необходимости может быть устранено с помощью функционального нормирующего множителя. Возникающий при этом новый дробно-рациональный базис будет описан в последующих публикациях.

The possibility of geometrical model operation of translating basis functions such as the Lagrange for restitution of a potential field on hexagon is explored. The appearance feeble weight dizbalance in a system of functions of the shape is analyzed.

1. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied in the Galerkin-type finite element method // J. Inf. Process. 1984. V. 7, №2. – P.89-95.
2. Хомченко А.Н. К расчету температурных полей в сотовых структурах методом конечных элементов // Инж.-физ. журнал. – 1987. – Т.52, №2. – С.301-305.
3. Хомченко А.Н. О дробно-рациональной интерполяции на шестиугольном конечном элементе//Вісник Запорізького Державного університету (Серія: фізико-математичні науки).-2002.-№3.-С.84-84.
4. Хомченко А.Н. Об одном проекционно-сеточном алгоритме вычислительной механики // VI Всесоюз. съезд по теор. и прикл. механике: Аннот. докл .- Ташкент, 1986.-С.628-629.
5. Гучек П.И., Литвиненко Е.И., Хомченко А.Н. Геометрическое моделирование полиномиальных базисов гексагональных конечных элементов // Матем. моделирование. - К.: Институт математики НАМ Украины, 1996.-С.84-87.
6. Хомченко А.Н. Синтетична модель гексагонального скінченного елемента // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Тавр. держ. агротехн. академія. – Вип.4, т.20. – Мелітополь: ТДАТА, 2003.- С.9-13.


ISBN 7-776-8361-7