

# ЦИФРОВЫЕ И ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.5.01

## АНАЛИЗ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПЕРЕСТРАИВАЕМОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА НИЖНИХ ЧАСТОТ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ситников В.С., Брус А.А.

При построении систем управления, которые работают в сложной помехо-сигнальной обстановке, большое внимание уделяется качеству управления. В этих условиях один из путей повышения качества управления состоит в применении фильтрации сигналов, поступающих от датчиков. Однако фильтрация дает существенный результат, когда спектры сигнала и помехи разнесены.

В системах автоматического управления информационная составляющая полезного сигнала обычно находится в низкочастотной части спектра, а помеха в высокочастотной части. Такое соотношение между сигналом и помехой позволяет использовать фильтры нижних частот для выделения полезной составляющей. Однако в производственных условиях уровень зашумленности сигнала может изменяться в широком диапазоне. Для фильтрации в таких условиях на практике используют банки фильтров [1].

Сложная и громоздкая организация банков фильтров не всегда целесообразна и удобна для реализации, поэтому можно рекомендовать перестраиваемые фильтры, которые могут быть построены на основе фильтров первого и второго порядков [2].

Широкое применение фильтров второго порядка обуславливает необходимость проведения анализа влияния изменения коэффициентов передаточной функции на свойства фильтра.

Для построения перестраиваемого цифрового фильтра нижних частот (ЦФНЧ) второго порядка воспользуемся передаточной функцией аналогового ФНЧ второго порядка [3]

$$T(p) = \frac{B_{10}(y)}{p^2 + A_{11}(y)p + A_{10}(y)}. \quad (1)$$

Перестройка фильтра при постоянстве плоского уровня затухания в полосе пропускания осуществляется за счет регулирования коэффициентов  $A_{11}(y) = a_{11}y$ ,  $A_{10}(y) = a_{10}y^2$  и  $B_{10}(y) = b_{10}y^2$ , где  $y$  - параметр управления.

Применяя билинейное z-преобразование к передаточной функции (1), получаем передаточную функцию цифрового фильтра

$$T(z) = k \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2a_1z^{-1} + a_2z^{-2}}, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

$$k = \frac{b_{10}}{a_{10f} + a_{11f} + 1}, \quad a_1 = \frac{a_{10f} - 1}{a_{10f} + a_{11f} + 1}, \quad a_2 = \frac{a_{10f} - a_{11f} + 1}{a_{10f} + a_{11f} + 1}, \quad (3)$$

$$a_{10f} = \frac{a_{10}}{(2f_g)^2}, \quad a_{11f} = \frac{a_{11}}{2f_g}, \quad f_g - \text{частота дискретизации.}$$

Устойчивость полученного фильтра (2) определяется коэффициентами  $a_1$  и  $a_2$  знаменателя из системы неравенств треугольника устойчивости [4]

$$\begin{cases} |a_1| < a_2 + 1, \\ |a_2| < 1. \end{cases} \quad (4)$$

Подставляя вместо  $a_1$  и  $a_2$  выражения из (3) и решая полученную систему неравенств, получим ограничения на коэффициенты, которые определяются неравенствами  $a_{11f} > 0$  и  $a_{10f} > 0$ . Учитывая, что частота дискретизации  $f_g$  всегда больше нуля, можно сказать, что для обеспечения устойчивости цифрового фильтра (2) необходимо, чтобы коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{10}$  знаменателя передаточной функции исходного аналогового фильтра (1) были положительными, что совпадает с критерием устойчивости Гурвица для передаточной функции (1) [5].

Используя передаточную функцию исходного фильтра (1) и свойства билинейного  $z$ -преобразования найдем АЧХ цифрового фильтра (2)

$$A(\omega) = \frac{b_{10}}{\sqrt{(a_{10} - \omega^2)^2 + a_{11}^2 \omega^2}}. \quad (5)$$

Заменяя в (5) аналоговую частоту  $\omega$  на цифровую частоту  $\bar{\omega}$  [6]

$$\omega = 2f_g \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2},$$

получим АЧХ цифрового фильтра, рис.1.

$$A(\bar{\omega}) = \frac{b_{10}}{\sqrt{\left[ a_{10} - \left( 2f_g \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^2 \right]^2 + a_{11}^2 \left( 2f_g \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}}{2} \right)^2}}, \quad (6)$$

где  $\bar{\omega} = \Omega T$ ,  $\bar{\omega} \in [0, \pi]$ ;  $\Omega$  - текущая частота,  $T$  - период дискретизации,  $T = 1/f_g$ .

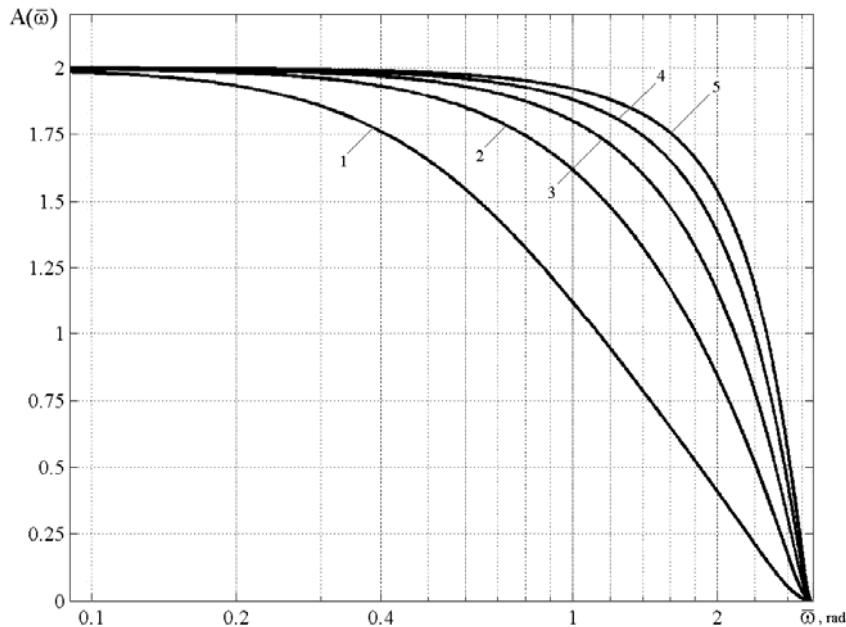


Рис.1 АЧХ перестраиваемого ЦФНЧ второго порядка при управляющих коэффициентах  $u$  равных 1 (кривая 1), 2 (2), 3 (3), 4 (4), 5 (кривая 5)

Передаточная функция (1) описывает колебательное звено, если корни характеристического уравнения являются комплексными числами. При этом АЧХ может иметь резонансный пик, который для передаточной функции

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1} \quad (7)$$

будет существовать при  $\xi < 1/\sqrt{2}$  [5].

Определяя условия колебательности и возникновения резонансного пика для цифрового фильтра, получим, что между коэффициентами передаточных функций (1) и (7) выполняются соотношения

$$a_{11} = 2\xi/T \text{ и } a_{10} = 1/T^2,$$

или

$$\xi = \frac{a_{11}}{2\sqrt{a_{10}}} \text{ и } T = \frac{1}{\sqrt{a_{10}}}. \quad (8)$$

Из анализа характеристического уравнения передаточной функции (1), получим условие отсутствия колебательности при

$$a_{11} \geq 2\sqrt{a_{10}}, \quad (9)$$

или, что тоже самое,  $\xi > 1$ , рис. 2.

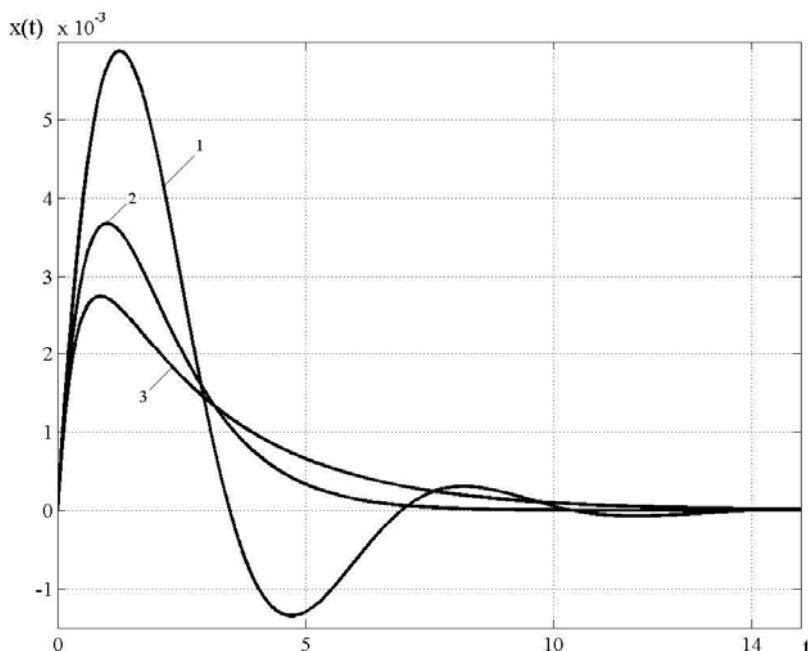


Рис.2 Импульсные характеристики ЦФНЧ второго порядка при значениях коэффициентов:  $b_{10} = 2$ ,  $a_{10} = 1$  и  $a_{11} = 3$  ( $\xi = 1.5$ , кривая 1),  $a_{11} = 2$  ( $\xi = 1$ , кривая 2),  $a_{11} = 0.85$  ( $\xi = 0.425$ , кривая 3).

Резонансный пик АЧХ передаточной функции (1) будет отсутствовать, если  $\xi \geq 1/\sqrt{2}$ , или, при условии (8), получим, рис.3

$$a_{11} \geq \sqrt{2a_{10}} \quad (10)$$

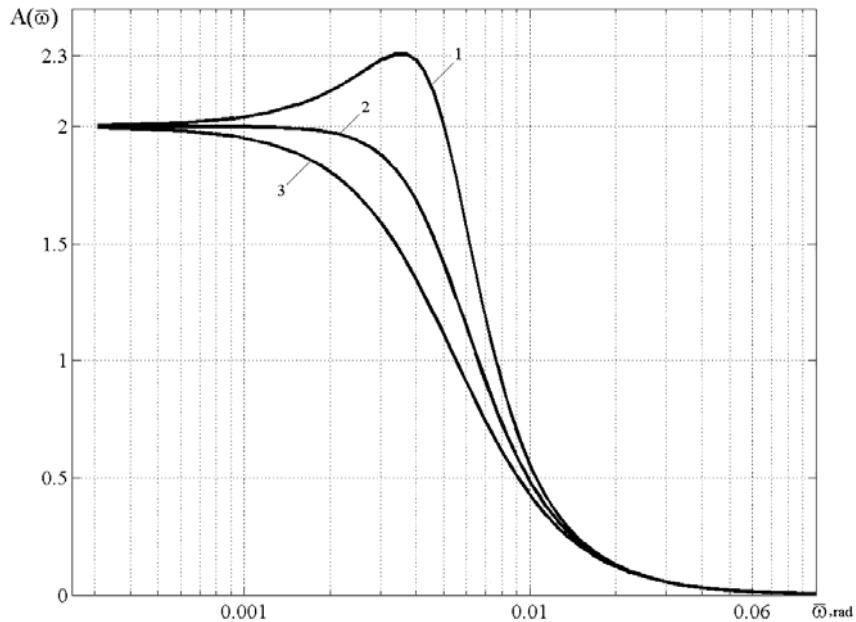


Рис.3 АЧХ перестраиваемого ЦФНЧ второго порядка при значениях коэффициентов:  
 $b_{10} = 2$ ,  $a_{10} = 1$  и  $a_{11} = 1$  ( $\xi = 0.5$ , кривая 1),  $a_{11} = \sqrt{2}$  ( $\xi = 1/\sqrt{2}$ , кривая 2),  $a_{11} = 1.8$  ( $\xi = 0.9$ , кривая 3).

Частоту среза  $\bar{\omega}_s$  полученного ЦФНЧ второго порядка определим на уровне -3 dB от значения на нулевой частоте. Значение АЧХ на нулевой частоте, как и для ЦФНЧ первого порядка, равно [2]

$$A(\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=0} = A(0) = \frac{b_{10}}{a_{10}}. \quad (11)$$

Из соотношения  $A(\bar{\omega}_s) = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} = \frac{b_{10}}{a_{10}\sqrt{2}}$  запишем

$$\frac{b_{10}}{\sqrt{a_{10} - \left(2f_g \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}_s}{2}\right)^2 + a_{11}^2 \left(2f_g \operatorname{tg} \frac{\bar{\omega}_s}{2}\right)^2}} = \frac{b_{10}}{a_{10}\sqrt{2}}. \quad (12)$$

Используя обозначения (3) из (12) получим уравнение

$$\operatorname{tg}^4 \frac{\bar{\omega}_s}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\bar{\omega}_s}{2} \left(a_{11f}^2 - 2a_{10f}\right) - a_{10f}^2 = 0, \quad (13)$$

решая которое относительно  $\bar{\omega}_s$  получим, что частота среза равна

$$\bar{\omega}_s = 2 \operatorname{arctg} \left[ \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \right], \quad (14)$$

где  $p = a_{11f}^2 - 2a_{10f}$  и  $q = -a_{10f}^2$ .

При  $a_{11} = \sqrt{2a_{10}}$  частота среза имеет максимальное значение, равное

$$\bar{\omega}_{s \max} = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{a_{10}}}{2f_g} \right) \quad (15)$$

Из (14) и (15) видно, что частоту среза перестраиваемого ЦФНЧ второго порядка можно регулировать, изменяя либо коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{10}$ , либо частоту дискретизации, рис. 4-6. Так при увеличении коэффициента  $a_{10f}$  частота среза уменьшается, а при увеличении  $a_{11f}$  она возрастает.

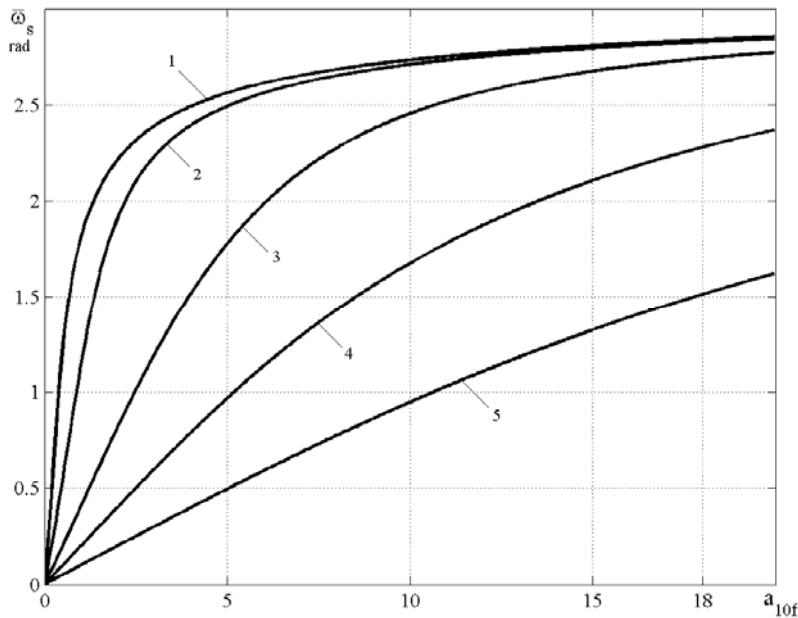


Рис.4 Зависимость частоты среза  $\bar{\omega}_s$  от  $a_{10f}$  при  $a_{11f}$  равных 1 (кривая 1), 2 (2), 5 (3), 10 (4) и 20 (кривая 5)

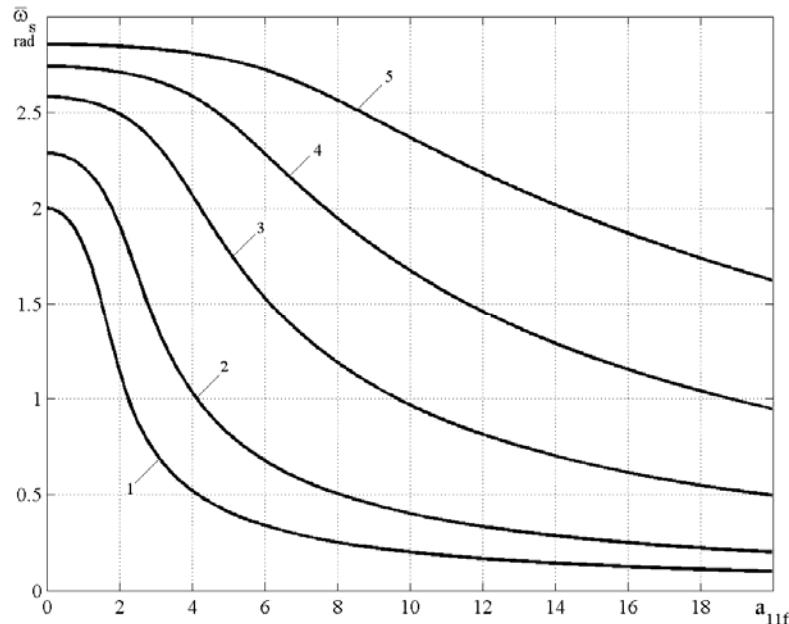


Рис.5 Зависимость частоты среза  $\bar{\omega}_s$  от  $a_{11f}$  при  $a_{10f}$  равных 1 (кривая 1), 2 (2), 5 (3), 10 (4) и 20 (кривая 5)

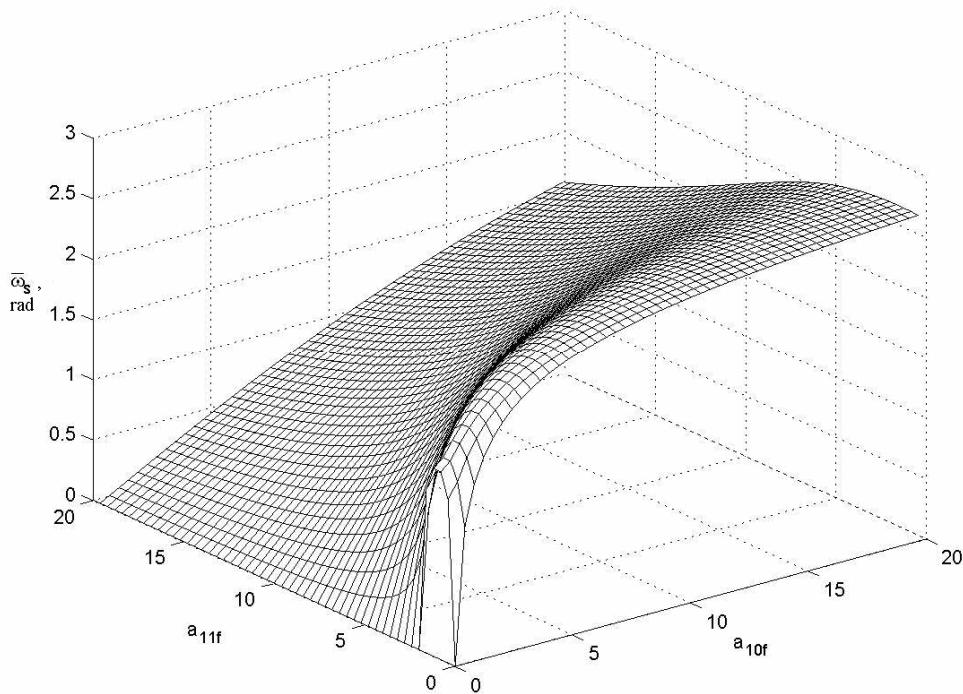


Рис. 6 Зависимость частоты среза  $\bar{\omega}_s$  перестраиваемого ЦФНЧ второго порядка от коэффициентов  $a_{11f}$  и  $a_{10f}$

Таким образом, проведенный анализ позволил определить требования к коэффициентам передаточной функции фильтра для обеспечения устойчивости, отсутствия колебательности и резонансного пика, а также подходы к регулированию значения АЧХ на нулевой частоте и перстройке частоты среза.

The synthesis of digital reconstructing filter and the analysis of its coefficients are considered. The possibility of standard reconstruction because of sampling frequency and filter coefficients is analyzed. The conditions of AFC oscillations and resonance peak absence are shown.

1. Петровский А.А. Методы и микропроцессорные средства обработки широкополосных и быстропротекающих процессов в реальном времени / Под ред. Г.В. Римского. – Минск: Наука и техника, 1988. – 272 с.

2. Ситников В.С., Брус А.А. Анализ коэффициентов перестраиваемого цифрового фильтра в контуре управления // Електромашинобуд. та електрооблад. – 2005. – Вып. 65. – С. 80 – 84.

3. Справочник по расчету и проектированию ARC-схем / Букашкин С.А, Власов В.П., Змий Б.Ф. и др.; Под ред. А.А. Ланнэ. – М.: Радио и связь, 1984. – 368 с.

4. Малахов В.П., Ситников В.С., Бевз А.С. , Полякова Д.А. Ограничения коэффициентов знаменателя цифрового фильтра для систем обработки сейсмосигналов // Тр. Одес. политех. ун-та. – 2002. – Спецвып. – С. 5 – 8.

5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 767 с.

6. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1978. – 848 с.