СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА, КОМПЛЕКСЫ И СИСТЕМЫ

УДК 531.7

ЕНЕРГЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ СТІЙКОСТІ РУХУ ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ГОЛОВКИ КООРДИНАТНО-ВИМІРЮВАЛЬНОЇ МАШИНИ

Іволгіна Т.О.

Вступ

Застосування прямого методу Ляпунова для аналізу стійкості руху динамічних систем дозволяє значно розширити область застосування аналітичних методів дослідження. Задача ускладнюється відсутністю загального способу побудови функції Ляпунова.

Сам А. М. Ляпунов і багато його послідовників для вирішення окремих задач в якості функції Ляпунова часто застосовували математичне вираження повної і кінетичної енергії динамічної системи [2 - 4].

При матрично-векторному трактуванні диференціальних рівнянь узагальнених сил [5-7] методи аналізу процесу перетворення енергії не потрапили до поля зору дослідників. Застосування математичного вираження приросту повної енергії при відхиленні руху динамічної системи від незбуреного до цього часу не розглядалося. Вираз для оцінки повної енергії динамічної системи задовольняє вимогам, що пред'являються до функції Ляпунова, в тому випадку, коли в якості незбуреного руху прийнято стан спокою в початку координат, відносно яких описується рух динамічної системи.

В якості початкових даних в теорії стійкості руху використовуються рівняння збуреного руху, які є математичною моделлю досліджуваної динамічної системи на збуреннях, тобто відхиленнях узагальнених координат від їх значень при незбуреному русі.

Постановка задачі

Побудуємо функцію Ляпунова на основі системи звичайних диференціальних рівнянь з дійсними коефіцієнтами шляхом проведення певної послідовності перетворень.

При складанні диференціальних рівнянь за аргументи виберемо параметри, які однозначно визначають стан системи. За аналогією з теоретичною механікою при аналізі руху, описуваного диференціальними рівняннями, можуть бути використані поняття узагальнених координат і узагальнених сил. Тоді доданки рівнянь сприйматимуться як математичні вирази узагальнених сил, тобто як величини, рівні коефіцієнтам при приростах узагальнених координат у виразах повної елементарної роботи діючих на систему сил [1].

Розв'язання задачі

Для динамічної системи, що має s ступенів свободи, система рівнянь збуреного руху має наступний вигляд:

$$\sum_{i=0}^{n_k} a_{ki} x_k^i = 0\,; \quad i = I, II, ..., n_k\,; \quad k = 1,2,...,s, \tag{1}$$

де a_{ki} - дійсні коефіцієнти пропорційності між значенням узагальненої сили та i-ї похідної відхилення, що є функціями часу та відхилення; x_k^i - i-та похідна відхилення по k-й узагальненій координаті.

Рівняння (1) є однорідними, так як ними описується вільний рух системи із збуреного стану, що визначається початковими відхиленнями від незбуреного $(x_{k0}, x_{k0}^1, ..., x_{k0}^{n_k})$.

Кількість енергії, що затрачується динамічною системою при переході з незбуреного стану у збурений, може бути визначена почленним інтегруванням рівняння (1) в межах від $x_k = 0$ до x_{k0}, якщо в праву частину рівняння підставити значення збурюючої F_k. Інтегрування доцільно виконувати по часу, замінивши dx на $x^I dt$ та межі інтегрування: нижню – на t_0, коли система знаходиться у незбуреному стані $x_k^i(t_0) = 0$, верхню – на t_1, коли система знаходиться в початкових умовах та збурююча дія припинилась (F_k=0). Тоді рівняння роботи узагальнених сил прийме вигляд

$$A_F = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{n_k} a_{ki} x_k^i x_k^I dt = \int_{t_0}^{t_1} F_k x_k^I dt. \tag{2}$$

Кількість енергії, перетвореної в процесі цього руху, рівна роботі внутрішніх сил динамічної системи.

Структуру енергетичних потоків і узагальнених сил, що беруть участь в їх утворенні, можна простежити на прикладі диференціального рівняння n-го порядку, опустивши індекс k, що відповідає номеру ступеня вільності.

Робота, виконувана потенціальними силами динамічної системи,

$$A_0 = \int_{t_0}^{t_1} a_0 x x^I dt = \frac{1}{2} a_0 x x_0^2. \tag{3}$$

Енергія, перетворена в результаті роботи потенціальних сил, затрачена на зміну потенціальної енергії динамічної системи. Приріст енергії залежить лише від значення відхилення і не залежить від тривалості інтервалу інтегрування.

Кількість енергії, перетвореної силою, яка пропорційна першій похідній відхилення,

$$A_1 = \int_{t_0}^{t_1} a_1 (x^I)^2 dt. \tag{4}$$

Напрям потоку енергії, перетворюваної за рахунок роботи цієї сили, залежить від знаку коефіцієнта a_1, тобто від властивостей динамічної системи і тривалості інтервалу інтегрування, але не залежить від напряму швидкості. Енергія або розсіюється диссипативними силами, або вводиться в сферу перетворення силами прискорюючими, а потім акумулюється у вигляді приросту повної енергії.

Кількість енергії, перетвореної кінетичною силою, пропорційною другій похідній відхилення за часом, визначається рівнянням

$$A_2 = \int_{t_0}^{t_1} a_2 x^{II} x^I dt = \frac{1}{2} a_2 (x^I)^2 \Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2} a_2 (x_0^I)^2. \tag{5}$$

Ця енергія затрачується на зміну кінетичної складової повної енергії динамічної системи.

Кількість енергії, перетвореної силою, пропорційною третій похідній відхилення,

$$A_3 = A_3' + A_3'' = \int_{t_0}^{t_1} a_3 x^{III} x^I dt = a_3 x^{II} x^I \Big|_{t_0}^{t_1} - a_3 \int_{t_0}^{t_1} (x^{II})^2 dt. \tag{6}$$

 ISBN 7-776-8361-7

Енергія, перетворена за рахунок роботи цієї сили, частково затрачується на утворення приросту повної енергії (A_3') динамічної системи і частково (A_3'') розсіюється або вводиться в сферу перетворення в залежності від знаку коефіцієнта a_3.

Інтегруючи рівняння (2), що містить похідні відхилення більш високого порядку, одержимо вирази, що ілюструють роль цих узагальнених сил в процесі перетворення енергії:

$$A_4 = \int_{t_0}^{t_1} a_4 x^{IV} x^I = a_4 x^{III} x^I \Big|_{t_0}^{t_1} - \frac{1}{2} a_4 (x^{II})^2 \Big|_{t_0}^{t_1}; \qquad (7)$$

$$A_5 = A_5' + A_5'' = \int_{t_0}^{t_1} a_5 x^V x^I dt = a_5 (x^{IV} x^I - x^{III} x^{II}) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} a_5 (x^{III})^2 dt. \qquad (8)$$

$$A_6 = \int_{t_0}^{t_1} a_6 x^{VI} x^I dt = a_6 [(x^V x^I - x^{IV} x^{II} + \frac{1}{2} (x^{III})^2] \Big|_{t_0}^{t_1}. \qquad (9)$$

Доданки рівняння роботи внутрішніх сил динамічної системи можуть бути розділені – за роллю в процесі перетворення енергії – на дві групи: 1) доданки, абсолютна величина яких не залежить від тривалості інтервалу інтегрування, що визначають приріст повної енергії динамічної системи; 2) доданки, абсолютна величина яких залежить від тривалості інтервалу інтегрування, що визначають разом з роботою збурюючи дій, енергетичний зв'язок системи з оточуючою середою.

Підставимо вирази (3) – (9) в рівняння (2), розмістивши в лівій частині доданки першої групи, а в правій – другої:

$$\frac{1}{2} a_0 x_0{}^2 + \frac{1}{2} a_2 (x_0^I)^2 + \frac{1}{2} a_3 x_0^{II} x_0^I + a_4 [x_0^{II} x_0^I - \frac{1}{2} (x_0^I)^2] + a_5 (x_0^{IV} x_0^I - x_0^{III} x_0^{II}) + ... =$$

$$= A_F - A_1 + A_3'' - A_5'' + ... = V(t_1),$$

де $V(t_1)$ - приріст повної енергії динамічної системи, одержаний при початкових умовах збуреної дії.

Аналогічно можна розглянути процес перетворення енергії в ході збуреної дії. Взявши за основу рівняння (1), одержимо

$$\int_{t_1}^{t} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i x^I dt = 0.$$

Інтегрування здійснюється у межах від моменту t_1, коли відхилення досягнуло заданого значення x_0 та зовнішня дія припинилась ($F = 0$), до довільного моменту $t > t_1$.

У відповідності до означення стійкості за Ляпуновим тривалість збуреної дії не обмежена, тому верхня межа змінна. Змінивши відповідно межі інтегрування, скористаємося виразами (3) – (9) та одержимо рівняння роботи

$$V(t) - V(t_1) = \frac{a_0}{2}(x^2 - x_0^2) + \frac{a_2}{2}[(x^I)^2 - (x_0^I)^2] + a_3 (x^{II} x^I - x_0^{II} x_0^I) +$$

$$+ a_4 [x^{III} x^I - x_0^{III} x_0^I - \frac{1}{2}(x^{II})^2 + \frac{1}{2}(x_0^{II})^2] + a_5 (x^{IV} x^I - x_0^{IV} x_0^I - x^{III} x^{II} + x_0^{III} x_0^{II}) + ... = \qquad (10)$$

$$= -\int_{t_1}^{t} [a_1 (x^I)^2 - a_3 (x^{II})^2 + a_5 (x^{III})^2 ...] dt.$$

Рівнянням (10) визначається різниця значень приросту повної енергії динамічної системи. Значення $V(t) - V(t_1)$ рівне кількості енергії, що віддається оточуючому середовищу або вводиться в сферу перетворення з середи в процесі збуреної дії за інтервал часу $\Delta t = t - t_1$.

Взявши похідну по часу від обох частин рівняння (10), одержимо вираз

$$\frac{dV(t)}{dt} = -[a_1(x^I)^2 - a_3(x^{II})^2 + a_5(x^{III})^2],$$

що визначає потужність розсіювання енергії або виведення її в сферу перетворення в процесі збуреної дії.

Висновки

1. Математичний вираз приросту $V(t)$ повної енергії динамічної системи є неперервною дійсною функцією, що відповідає вимогам, які пред'являються до функції Ляпунова.
2. Похідна за часом приросту повної енергії визначає потужність сил взаємодії динамічної системи з навколишнім середовищем при збуреному русі.
3. Приріст повної енергії є скалярною величиною, що дозволяє одержати сумарний приріст повної енергії для багатовимірної динамічної системи простим сумуванням окремих приростів по кожній узагальненій координаті (ступені вільності динамічної системи).
4. Оскільки при побудові функцій здійснюється інтегрування і диференціювання за часом, запропонований спосіб може використовуватися для аналізу рухів, описуваних рівнянням як з постійними коефіцієнтами, так і з коефіцієнтами, залежними від часу.

Для побудови функції Ляпунова і її похідної за часом, взятої в силу рівняння збуреного руху, необхідно виконати наступні операції:

– встановити параметри незбуреного руху та скласти систему рівнянь збуреного руху; скласти рівняння роботи узагальнених сил та виконати інтегрування доданків рівнянь в межах $t_0 - t_1$ і $t_1 - t$;

– виділити доданки, що визначають роботу, яка затрачується на приріст повної енергії $V(t)$ і роботу сил взаємодії системи з середовищем, та взяти похідну $dV(t)/dt$.

Розглянутий спосіб використаний з позитивним результатом при розв’язанні прикладів, що містяться в роботі [2].

On an example of a disturbed motion equations with fixed factors the structure of the generalized forces on their ratio to the process of energy transformation is considered and the way of the Lyapunov’s function construction is offered

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Наука, 1967.
2. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971.
3. Анопольский Л.Ю., Иргетов В.Д., Матросов В.М. Способы построения функции Ляпунова // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. М.: Винити, 1975. Т.2, С.53-87.
4. Развитие и применение метода функций Ляпунова // Сб. науч. тр. Новосибирск: Наука, 1992.
5. Зубов В.И. Аналитическое построение функции Ляпунова // Докл. РАН. 1994. Т.335, №6. С.888-893.
6. Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К. Функции Ляпунова для исследования устойчивости в целом нелинейных систем // Прикладная математика и механика. 1985. Т.49, вып.5.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

 ISBN 7-776-8361-7