УДК 517.977

ПРИНЯТИЕ УПРАВЛЕНЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пляшкевич Е.Н.

Построение современного информационного сообщества требует разработки, внедрения и использования новых информационных технологий, которые обеспечивают высокий уровень принятия соответствующих решений в различных направлениях управленческой деятельности. Одним из главных направлений является повышение эффективности функционирования предприятий, осуществляемое путем построения автоматизированных систем управления и использования современных информационных технологий. Нахождение оптимальных управлений, определяющих наибольшую эффективность результатов функционирования, предусматривает построение моделей объектов управления, а также решение многошаговой задачи нахождения оптимальных управлений при заданном функционале эффективности функционирования.

Построение информационных моделей и технологий, на основе использования принципа оптимизации и законов сохранение валового продукта для создания автоматизированных систем, позволило найти модель предприятия с помощью дробно-линейного программирования.

В некоторых практических задачах критерий принятия решений описывается отношением двух экономических или технических параметров. Например, рентабельность определяется как отношение между прибылью и затратами. В таких ситуациях необходимо принимать решение с целью максимизации или минимизации отношения двух параметров. Если каждый из них математически описывается линейной функцией, то в таких случаях необходимо найти экстремум (максимум или минимум) отношения двух линейных функций. Отношение двух линейных функций называют дробно-линейной целевой функцией. Задача оптимизации дробно-линейной функции при линейных ограничениях называется задачей дробно-линейного программирования. Как правило, при максимизации отношения двух экономических показателей, показатель числителя стремится достичь максимальное возможное значение, а показатель знаменателя - минимальное. При минимизации - наоборот. Если оптимизировать каждый показатель в отдельности, решая две задачи линейного программирования, одну на максимум, а другую на минимум линейных функций, являющихся соответственно числителем и знаменателем дробно-линейной целевой функции, то полученные оптимальные решения не могут быть использованы для определения оптимального решения отношения этих двух показателей.

Таким образом при изучение задач с дробно-линейными критериями необходимо исследовать новый класс задач оптимизации - задачи дробно-линейного программирования. Как будет показано в дальнейшем, для исследования задач дробно-линейного программирования можно использовать общую теорию линейного программирования.

Задачу дробно-линейного программирования (ДЛП) можно записать в виде:

$$F(x) = \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j} \to \max; \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m}); \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,n}). \tag{3}$$

Обозначим через R(x) многогранное выпуклое множество, заданное ограничениями (2)-(3), т.е.

$$R(x) = \left\{ x \,/ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;\; (i = \overline{1,m});\;\; x_j \ge 0 \;\; (j = \overline{1,n}) \right\},$$

и предположим, что R(x) ограничено.

Для решения (1)-(3) используются различные численные методы, которые, как правило, основаны на предположении, что D(x)>0 для любых $x \in R(x)$, и следующих утверждениях.

На любом прямолинейном отрезке, принадлежащем многограннику R(x), дробно-линейная функция F(x) изменяется монотонно.

Дробно-линейная функция F(x) достигает минимума (максимума) только в крайней точке многогранника R(x). Если минимум (максимум) достигается в нескольких крайних точках, то он достигается и на их выпуклой оболочке.

Из этих двух теорем следует, что оптимальное решение дробно-линейной задачи достигается в крайних точках многогранника допустимых решений.

Дадим геометрическую интерпретации) задачи ДЛП. Для этого рассмотрим задачу ДЛП с двумя переменными

$$F(x_1, x_2) = \frac{C(x_1, x_2)}{D(x_1, x_2)} = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to \max;$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 \le b_m,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Допустим, что система ограничений данной задачи определяет замкнутый многоугольник, который задает множество допустимых решений R(x) данной системы линейных неравенств, и предположим, что $D(x_1,x_2)>0$ для любой точки из R(x). Это означает, что линия L_0 с уравнением $d_1x_1+d_2x_2 = 0$ не пересекает многоугольник R(x).

Обозначим через z значение целевой функции

$$z = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2}.$$

Тогда $x_2 = \dfrac{c_1 - zd_1}{zd_2 - c_2} \cdot x_1$ или $x_2 = kx_1$, где $k = \dfrac{c_1 - zd_1}{zd_2 - c_2}$.

Геометрически, уравнение $x_2=kx_1$ задает прямую L, проходящую через начало координат с угловым коэффициентом k. Угловой коэффициент k зависит от значения функции z, т.е. если фиксировать значение функции z, то угловой коэффициент k прямой $x_2=kx_1$ примет конкретное значение и прямая займет определенное положение. При изменении, значения функции z изменится и значение коэффициента k, а прямая L будет менять свое положение проходя через начало координат. Множество прямых L при изменении z образует пучок прямых проходящих через начало координат. Уравнение пучка будет $x_2= k(z)\, x_1$.

Из приведенной геометрической интерпретации задачи ДЛП при п=2 следует графический метод решения задач ДЛП с двумя переменными. Этот метод включает следующие этапы:

 ISBN 7-776-8361-7

1. Строим область допустимых решений R(x).
2. Устанавливаем направление вращения прямой пучка при возрастании величины z по знаку величины $\Delta=d_1c_2-c_1d_1$. При $\Delta>0$ вращение осуществляем против часовой стрелке, а при $\Delta<0$ по часовой стрелке.
3. В зависимости от того ищем минимум или максимум целевой функции задачи ДЛП находим либо ту прямую пучка, которая первая касается области R(x) по установленному направлению вращения и соответствующую точку касания, либо прямую пучка, которая последней касается области R{x) и соответствующую точку касания.
4. Определяем координаты точки касания (точки минимума или максимума) и вычисляем значение целевой функции в этой точке (z_{min} или z_{max}).

Допустим, предприятие производит два вида продукции А и В, используя два вида ресурсов: сырье и оборудование. Данные приведены в табл.1. Предприятие имеет суммарный заказ на производство 7 единиц продукции.

Таблица 1

Исходные данные

Ресурсы	Нормы затрат		Объем ресурса
	А	В	
Сырье (т)	2	1	12
Оборудование (ч)	1	2	12
Затраты на производство одной единицы продукции (тыс.грн.)	2	3	

Определить сколько единиц продукции каждого вида следует предприятию производить, чтобы себестоимость одной единицы продукции было наименьшей.

Модель задачи

$$2x_1 + x_2 \le 12,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 12,$$
$$x_1 + x_2 \ge 7,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$
$$z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min,$$

где x_1 и x_2 объемы выпуска продукции, а z - себестоимость единицы продукции.

Решая задачу графически (рис.1) получим следующий результат; минимум достигается в точке С(5; 2) и z_{min}=16/7= 2,286 тыс. грн.

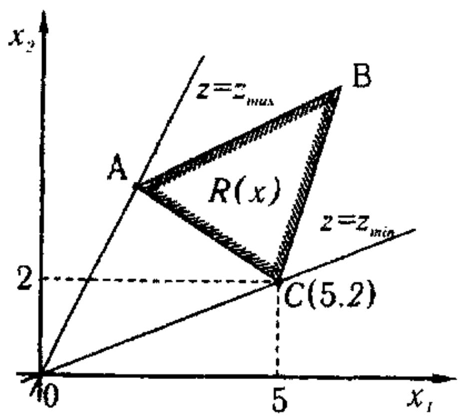

Рис.1 Графическое решение задачи

Более простой графический метод решения дробно-линейной задачи включает только следующие этапы:

- строим область R(x) допустимых решений;
- вращением прямой L вокруг начало координат находим точки касания прямой L с множеством R(x) допустимых решений;
- находим координаты этих найденных точек;
- вычисляем значения дробно-линейной функции в найденных точках;
- СРАВНИВАЯ ЗНАЧЕНИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ В ЭТИХ ТОЧКАХ, ОПРЕДЕЛЯЕМ В КАКОЙ ИЗ НИХ МИНИМУМ, А В КАКОЙ МАКСИМУМ.

Рассмотрим случай задачи дробно-линейного программирования, когда в числителе и знаменателе имеются свободные члены c_0 и d_0. Тогда функции C(x) и D(x) имеют вид

$$C(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0, \quad D(x)=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0.$$

В таком случае задача ДЛП может быть записана в виде:

$$F(x)=\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0}{\sum_{j=1}^{n} d_j x_j + d_0} \to \max; \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i=\overline{1,m}); \tag{5}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j=\overline{1,n}). \tag{6}$$

Следует иметь ввиду, что в результате соответствующих преобразований задача ДЛП (1)-(3) может быть приведена к виду (4)-(6). Также при необходимости задача ДЛП (4)-(6) может быть преобразована в виде задачи (1)-(3).

Рассмотрим графический метод решения неоднородной задачи ДЛП вида

$$\max z=\frac{c_1x_1+c_2x_2+c_0}{d_1x_1+d_2x_2+d_0} \tag{7}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{8}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{9}$$

Пусть множество ограничений (8)-(9) задачи определяет выпуклый многоугольник R(x), а $d_1x_1+d_2x_2+d_0>0$, любой точки из R(x). Это означает, что линия L с уравнены $d_1x_1+d_2x_2+d_0=0$ не пересекает многоугольник R(x).

Возможны два варианта применения графического метода решения неоднородной задачи ДЛП.

Вариант 1. Делаем замену переменных но формулам

$$\begin{cases} x_1 = y_1+\alpha, \\ x_2 = y_2+\beta, \end{cases} \tag{10}$$

где α и β находятся как решение системы уравнений

$$\begin{cases} c_1\alpha+c_2\beta+c_0=0, \\ d_1\alpha+d_2\beta+d_0=0 \end{cases}$$

по формулам $\alpha=\dfrac{c_2d_0-d_2c_0}{c_1d_2-c_2d_1}$, $\beta=\dfrac{d_1c_0-c_1d_0}{c_1d_2-c_2d_1}$.

 ISBN 7-776-8361-7

Получим однородную задачу ДЛП

$$\max z = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{d_1 y_1 + d_2 y_2} \tag{11}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \le b_1 - a_{11}\alpha - a_{12}\beta, \\ a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \le b_2 - a_{21}\alpha - a_{22}\beta, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 \le b_m - a_{m1}\alpha - a_{m2}\beta, \end{cases} \tag{12}$$

$$y_1 \ge -\alpha, y_2 \ge -\beta. \tag{13}$$

Построим многоугольник Q(y) исходя из ограничений (12)-(13). Далее задача (11)-(13) решается графическим методом для однородного случая, вращением прямой вокруг начала координат O' найдем оптимальное решение. Пусть y_1^* и y_2^* оптимальное решение задачи (11)-(13), тогда $x_1^*=y_1^*+\alpha$ и $x_2^*=y_2^*+\beta$ будет оптимальным решением задачи.

Вариант 2. Графическое решение задачи проводится в старой (первоначальной) системе координат x_1Ox_2. Для этого:

- находим значения координат α и β по формулам

$$\alpha = \frac{c_2 d_0 - d_2 c_0}{c_1 d_2 - c_2 d_1}, \ \beta = \frac{d_1 c_0 - c_1 d_0}{c_1 d_2 - c_2 d_1}.$$

- построим многоугольник R(x) исходя из ограничений (8) - (9);
- берем в качестве точки вращения прямых линий уровня дробно-линейной функции (7) точку P с координатами α и β;
- путем вращения линии уровня L вокруг точки $P(\alpha,\beta)$ находим точку максимума $M(x_1^*,x_2^*)$;
- берем x_1^* и x_2^* в качестве оптимального решения задачи (7)-(9).

Например требуется найти максимум и минимум функции

$$z = \frac{3x_1 + 2x_2 - 4}{2x_1 + 5x_2 + 1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Отметим, что знаменатель $2x_1+5x_2+1$ целевой функции $z = \frac{3x_1 + 2x_2 - 4}{2x_1 + 5x_2 + 1}$ нигде в области R(x) не обращается в нуль, так как прямая L_0 с уравнением $2x_1 + 5x_2 + 1=0$ не имеет общих точек с пятиугольником OABCD (рис.2.).

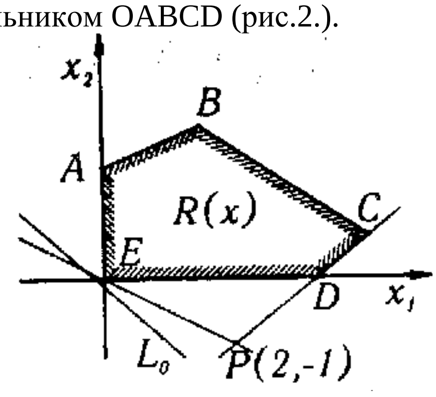

Рис. 2 Графическое решение задачи

Используем графический метод решения задачи в системе координат x_1Ox_2.

- Находим по соответствующим формулам $\alpha = 2$и $\beta = -1$.
- Построим многоугольник OABCD.
- Берем точку вращения линий уровня точку P(2, -1).
- Выразим x_2 через x_1 из первоначального выражения $z = \frac{3x_1 + 2x_2 - 4}{2x_1 + 5x_2 + 1}$ и

получим $x_2 = \frac{-2z+3}{5z-2} x_1 - \frac{z+4}{5z-2}$.

- Находим для $k(x) = \frac{-2z+3}{5z-2}$ производную по z

$$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{-11}{(5z-2)^2} < 0.$$

- Вращаем линию уровня по часовой стрелке с центром в точке P(2,-1).
- ПЕРВАЯ ТОЧКА КАСАНИЯ O(0,0) С МНОГОУГОЛЬНИКОМ R(X) БУДЕТ ТОЧКОЙ МИНИМУМА, ДЛЯ КОТОРОЙ ИМЕЕМ $X_1^*=0$, $X_2=0$ И $Z_{MIN}=-4$.
- Последняя точка D(2,0) пересечения линии уровня с многоугольником R(x) будет точкой максимума, для которой имеем $x_1^*=2$, $x_2^*=0$ и $z_{min}=-7/12$.

При решении оптимизационных задач, когда ищется минимум или максимум функции, как правило, предполагается, что область допустимых решений является ограниченным множеством и в таких случаях всегда достигаются оптимальные решения. Однако, на практике, встречаются случаи когда область допустимых решений является неограниченным множеством. В таких случаях, например, для задачи линейного программирования возможны следующие варианты решения:

- минимум или максимум достигаются в крайних точках, т.е. линейная функция принимает ограниченные значения на неограниченном множестве.
- МИНИМУМ ИЛИ МАКСИМУМ НЕ ДОСТИГАЕТСЯ В КОНКРЕТНОЙ |КРАЙНЕЙ ТОЧКЕ, Т.Е. ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ, В СЛУЧАЕ МИНИМУМА ИЛИ МАКСИМУМА, ЯВЛЯЕТСЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ. В ТАКИХ СЛУЧАЯХ ГОВОРЯТ, ЧТО ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ НЕРАЗРЕШИМОЙ, Т.Е. НЕ МОГУТ БЫТЬ НАЙДЕНЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ, КОТОРЫЕ ДОСТАВЛЯЮТ ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ. ФУНКЦИЯ ЦЕЛИ ЯВЛЯЕТСЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ.

В общем случае, когда задана некоторая задача ДЛП возможны различные случаи.

1. Многогранник допустимых решений является ограниченным. Тогда минимальное и максимальное значения дробно-линейной функции достигается в крайних точках многогранника. Таким образом задача ДЛП разрешима, применяя любой метод.
2. Многогранник допустимых решений является неограниченным множеством. В таком случае возможны следующие ситуации:

а) дробно-линейная функция достигает свои минимальное максимальное значения в крайних точках, т.е. является ограниченной функцией на неограниченном множестве. Задача ДЛП разрешима и целевая дробно-линейная функция ограничена;

б) дробно-линейная функция не может достигнуть своего минимального или максимального значение в конкретной точке многогранника, в силу того, что она убывает или возрастает с непрерывным ростом значений переменных. В такой ситуации задача ДЛП имеет минимум (максимум) в конкретной точке многогранника R(x), а максимум (минимум) является асимптотическим, который может быть как конечным, так и бесконечным. Задача ДЛП разрешима на минимум (максимум) и неразрешима на максимум (минимум) в случае бесконечного асимптотического экстремума. Целевая дробно-линейная функция в одном случае ограничена, а в другом - неограничена;

 ISBN 7-776-8361-7

в) дробно-линейная функция принимает свое минимальное или максимальное значение асимптотически, т.е. при изменении значений переменных одна из гиперплоскостей дробно-линейной функции принимает положение параллельно одной грани, которая дает асимптотический максимум, а другая из ее гиперплоскостей принимает положение параллельно к другой грани, которая дает асимптотический минимум. Так как асимптотические экстремумы могут быть конечными или бесконечными, то и задача ДЛП может быть разрешимой или неразрешимой.

Таким образом, любой метод решения задачи ДЛП должен обеспечить проведение анализа всех возможных случаев и иметь критерий их обнаружения.

The tasks of the administrative decisions are considered on the basis of fractional linear programming, and also methods of their decision. The geometrical interpretation and graphic method of the decision is offered. The non-uniform task of fractional linear programming is decided.

1. Анфилатов В.С., Емельянов А.А., Кукушкин А.А. Системный анализ в управлении. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 368 с.
2. Багриновский К.А., Бендиков М.А., Хрусталев Е.Ю. Современные методы управления технологическим развитием. – М.: РОССПЭН. – 2001. - 271 с.
3. Евланов А.Н. Теория и практика принятия решений. – М.: Наука, 1982. – 159 с.
4. Информационно-вычислительные системы принятия решений/ В.В.Хаджинов, В.А. Быков, И.А. Храмова, В.Г. Усачев. – К.: Наукова думка, 1992. – 140 с.
5. Марасанов В.В. Динамическое моделирование. – Херсон: Айлант, 1999.– 105 с.
6. Марасанов В.В., Пляшкевич Е.Н. Основы теории проектирования и оптимизации макроэкономических систем. – Херсон: Айлант, 2002. – 190 с.
7. Марасанов В.В. Элементы теории управленческих решений. – Херсон: Колос, 2002. – 72 с.

.