

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ НАГРЕВАТЕЛЕЙ ПО КРИТЕРИЮ ЭКОНОМИИ ЭНЕРГИИ

Попруга А.Г.

Цель исследований: установить взаимосвязь между параметрами провода и коэффициентом полезного действия электрического нагревателя, предложить конструкцию нагревателя с повышенным коэффициентом полезного действия.

Современный уровень: данная работа является продолжением статьи [5] и посвящена разработке математической модели электрического нагревателя с целью уменьшения потерь энергии.

Постановка задачи исследований: разработать математическую модель электрического нагревателя и экспериментально подтвердить ее адекватность.

Теоретическая часть:

Пусть энергия подается к нагревателю, изготовленному из нихромовой проволоки круглого сечения с сопротивлением Z_H :

$$Z_H = R_H + j \omega L_H, \quad (1)$$

где L_H – индуктивность провода нагревателя; R_H – активное сопротивление провода нагревателя; ω – угловая частота.

При прохождении тока по линии передачи и нагревателю в каждом участке этих проводников выделяется тепло. Электрическая энергия транспортируется от источника к нагревателю по диэлектрику вдоль проводов линии передачи.

Провода в линиях передачи выполняют двойную роль: они являются каналами, по которым проходит ток, и организаторами структуры поля в диэлектрике.

Для характеристики плотности потока энергии в теории Максвелла вводится вектор Пойнтинга – Умова \vec{P} , который равен векторному произведению векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{P} = [\vec{E} \times \vec{H}] \quad (2)$$

где \vec{H}, \vec{E} – напряженности магнитного и электрического полей на поверхности провода нагревателя соответственно.

Если величина вектора Пойнтинга положительна, то энергия поступает в провод нагревателя из внешнего пространства и идет на изменение магнитного поля в объеме провода и на выделение теплоты в нем. Если вектор Пойнтинга имеет отрицательную величину, то поток энергии направлен от провода нагревателя в окружающее его пространство. При этом энергия, запасенная в магнитном поле в объеме провода, частично возвращается в окружающее провод пространство и частично преобразуется в теплоту.

Такие колебания с частичным возвратом энергии в пространство, окружающее провод, можно рассматривать как результат наличия внутреннего реактивного сопротивления X_H провода нагревателя.

Как известно, между реактивным X_H и активным R_H сопротивлениями цепи и разностью фаз φ между напряжением и током в этой цепи существует соотношение[4]:

$$\operatorname{tg} \varphi = X_H / R_H \quad (3)$$

Из уравнения (3) следует, что для уменьшения фазового сдвига φ между напряжением и током в нагревателе необходимо уменьшать реактивное сопротивление $X_H = \omega L_H$ и увеличивать активное сопротивление R_H нагревателя.

Протекание тока по электрической цепи нагревателя сопровождается потреблением энергии от источника. Скорость поступления энергии характеризуется мощностью. Нагреватель потребляет от источника мощность P_{Π} :

$$P_{\Pi} = U \cdot I \quad (4)$$

Непосредственно в виде теплоты в нагревателе выделяется мощность P_H :

$$P_H = U \cdot I \cdot \cos\varphi \quad (5)$$

Коэффициент полезного действия нагревателя:

$$\eta_H = P_H / P_{\Pi} = U \cdot I \cdot \cos\varphi / U \cdot I = \cos\varphi \quad (6)$$

Таким образом, представляется целесообразным рассмотреть теорему Пойнтинга - Умова в комплексной форме с целью определения активного и внутреннего индуктивного сопротивлений провода нагревателя.

В теории Максвелла доказывается, что вектор Пойнтинга $\vec{\Pi}$ совпадает с направлением движения энергии электромагнитного поля, а его величина равна количеству энергии проходящей за 1сек. через единичную площадку нормальной направлению переноса. Вектор Пойнтинга имеет размерность мощности $[B \cdot A / M^2]$ или энергии в единицу времени, отнесенной к единице поверхности.

При синусоидальных сигналах E и H можно записать:

$$H = H_m \sin(\omega t + \varphi_H) \quad (7)$$

$$E = E_m \sin(\omega t + \varphi_E) \quad (8)$$

При переходе от действительной синусоидальной функции (оригинала) к изображающей комплексной величине получим:

$$H_m \sin(\omega t + \varphi_H) \rightarrow H_m e^{j(\omega t + \varphi_H)} = \dot{H}_m e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$E_m \sin(\omega t + \varphi_E) \rightarrow E_m e^{j(\omega t + \varphi_E)} = \dot{E}_m e^{j\omega t} \quad (10)$$

Комплексный вектор Пойнтинга определим как:

$$\dot{\Pi} = \left[\dot{E} \times \dot{H} \right] \quad (11)$$

обозначения \dot{E} и \dot{H} означают, что напряженности E и H изменяются по синусоидальному закону и являются векторными функциями;

Активное и внутреннее индуктивное сопротивление проводников при переменном токе определяется с помощью комплексного вектора Пойнтинга:

$$-\oint_s \dot{\Pi} d\vec{S} = P + jQ = I^2 R_H + jI^2 X_H = I^2 Z_H \quad (12)$$

Откуда:

$$Z_H = R_H + jX_H = -\frac{\oint \dot{I} d\vec{S}}{I^2} \quad (13)$$

Для установления взаимосвязи между током \dot{I} , напряженностью магнитного поля \dot{H} и напряженностью электрического поля \dot{E} рассмотрим распределение тока в цилиндрическом проводе круглого сечения.

В соответствии с законом Ома в дифференциальной форме:

$$\dot{J} = \gamma \dot{E} \quad , \quad (14)$$

где \dot{J} - плотность тока, направленная по напряженности электрического поля; γ - удельная проводимость материала провода нагревателя.

Соотношение (14) устанавливает связь между плотностью тока в данной точке проводящей среды и напряженностью поля в этой же точке [3].

Первое и второе уравнения Максвелла для проводящей среды имеют вид:

$$\text{rot } \dot{H} = \gamma \dot{E} \quad (15)$$

$$\text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_a \dot{H} \quad , \quad (16)$$

где μ_a - магнитная проницаемость материала провода нагревателя.

Умножим правую и левую часть (16) на γ и с учетом (14) получим:

$$\text{rot } \dot{H} = \dot{J} \quad (17)$$

$$\text{rot } \dot{J} = -j\omega\mu_a \gamma \dot{H} \quad (18)$$

Возьмем ротор от уравнения (18):

$$\text{rot rot } \dot{J} = \text{grad div } \dot{J} - \nabla^2 \dot{J} = -j\omega\mu_a \gamma \dot{J} \quad (19)$$

В установившемся режиме:

$$\text{div } \dot{J} = 0$$

Поэтому:

$$\nabla^2 \dot{J} = j\omega\mu_a \gamma \dot{J} \quad (20)$$

Раскроем $\nabla^2 \dot{J}$ в цилиндрической системе координат:

$$\frac{d^2 \dot{J}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{J}_m}{dr} = j\omega\mu_a \gamma \dot{J}_m \quad (21)$$

Введением новой переменной:

$$X=r\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma} \quad (22)$$

Уравнение (21) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2\dot{J}_m}{dX^2} + \frac{1}{X} \frac{d\dot{J}_m}{dX} + \dot{J}_m = 0 \quad (23)$$

Уравнение (23) является частным случаем уравнения Бесселя [1].
Решение уравнения (23) можно записать следующим образом:

$$\dot{J}_m = AJ_0(X) + BN_0(X) \quad (24)$$

где A и B - постоянные интегрирования; $J_0(X)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода; $N_0(X)$ – функция Бесселя нулевого порядка второго рода.

Постоянные A и B определяются из граничных условий при $r = 0$ и $r = R$, т.е. при $X = 0$ и $X=R\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}$

Функция $N_0(X)$ обладает той особенностью, что при $X = 0$ (т.е. на оси провода при $r = 0$) она обращается в бесконечность. Но из физических соображений ясно, что \dot{J} на оси провода не может иметь бесконечно большое значение, поэтому слагаемое $BN_0(X)$ в решении (24) отбрасываем (принимая $B = 0$). Следовательно:

$$\dot{J}_m = AJ_0(X) \quad (25)$$

Функцию $J_0(X)$ можно представить в виде ряда:

$$J_0(X) = 1 - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{X^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(K!)^2} \left(\frac{X}{2}\right)^{2k} \quad (26)$$

Постоянная A равна комплексной амплитуде плотности тока \dot{J}_{m0} на оси провода.
Следовательно:

$$\dot{J}_m = \dot{J}_{m0} J_0(X) = \dot{J}_{m0} b_0 e^{j\beta_0} \quad (27)$$

Функция $J_0(X)$ есть комплексное число, так как X в соответствии с (22) является комплексным числом. Через b_0 обозначен модуль, а через β_0 - аргумент комплексного числа $J_0(X)$ [2].

Напряженность магнитного поля может быть получена из уравнения:

$$\frac{d\dot{J}_m}{dr} = j\omega\mu\dot{H}_m \quad (28)$$

Откуда:

$$\dot{H}_m = \frac{1}{j\omega\mu_a\gamma} \frac{d\dot{J}_m}{dr} \quad (29)$$

Подставим (22) в (29) и после несложных преобразований получим:

$$\dot{H}_m = \frac{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma} dJ_m}{j\omega\mu_a\gamma dX} = \frac{j_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} \left(-\frac{dJ_0(X)}{dX} \right) \quad (30)$$

Дифференцируя ряд (26) находим:

$$\begin{aligned} \dot{H}_{m0} &= \frac{j_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} \left(\frac{X}{2} - \frac{X^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{X^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \frac{X^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \dots \right) = \\ &= \frac{j_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} J_1(X) = \frac{j_{m0}}{\sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}} b_1 e^{j\beta_1} \end{aligned} \quad (31)$$

Через b_1 обозначен модуль, а через β_1 – аргумент комплексного числа $J_1(X)$.

По аналогии с (26) представим $J_1(X)$ в виде:

$$J_1(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(1+k)!} \left(\frac{X}{2} \right)^{1+2k} \quad (32)$$

Комплексное сопротивление Z провода нагревателя длиной L определится выражением [3]:

$$Z = \frac{b_0 e^{j\beta_0} L \sqrt{-j\omega\mu_a\gamma}}{\gamma b_1 e^{j\beta_1} 2\pi R} = \frac{e^{j45^\circ} b_0 e^{j\beta_0} L \sqrt{j\omega\mu_a\gamma}}{2\pi R \gamma b_1 e^{j\beta_1}} \quad (33)$$

Уравнение (33) можно переписать в другой форме:

$$Z = \frac{b_0 \sqrt{\omega\mu_a\gamma}}{b_1 2\pi R \gamma} \left[\cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ) + j \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ) \right] \quad (34)$$

Откуда следует:

$$R_n = \frac{b_0 \sqrt{\omega\mu_a\gamma}}{b_1 2\pi R \gamma} \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ) \quad (35)$$

$$X_n = \frac{\sqrt{\omega\mu_a\gamma}}{2\pi R \gamma} \frac{b_0}{b_1} \sin(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ) \quad (36)$$

После подстановки (22) в (26) и (32) и с учетом того, что $\sqrt{-j} = e^{-j45^\circ}$ определим для ряда значений $R \sqrt{\omega\mu_a\gamma}$ модули b_0, b_1 и аргументы β_0, β_1 функций Бесселя, а также $\operatorname{tg}\varphi, \cos\varphi$, где $\varphi = \beta_0 - \beta_1 - 45^\circ$ где φ – угол, на который запаздывает по фазе напряженность магнитного поля относительно напряженности электрического поля на поверхности провода. Результаты вычислений приведены в табл.1.

Таблица 1.

$R\sqrt{\omega\mu_a\gamma}$	b_0	β_0	b_1	β_1	$\text{tg}\varphi$	$\text{cos}\varphi$
0.1	1	0.143	0.049	-44.977	0.0021	1
0.2	1	0.573	0.1	-44.576	0.0026	1
0.3	1	1.261	0.15	-44.462	0.0126	0.9999
0.4	1.001	2.292	0.2	-44.003	0.0226	0.9997
0.5	1.001	3.558	0.25	-43.201	0.0307	0.9995
0.6	1.002	5.157	0.3	-42.284	0.0426	0.9991
0.7	1.003	6.99	0.35	-41.539	0.0617	0.9981
0.8	1.007	9.167	0.401	-40.451	0.0808	0.9968
0.9	1.01	11.516	0.451	-39.248	0.1009	0.9949
1	1.015	14.267	0.502	-37.873	0.1253	0.9922
2	1.229	52.254	1.041	-16.73	0.4449	0.9137
3	1.951	96.52	1.8	+15.699	0.7218	0.8108
4	3.439	138.21	3.173	+53.915	0.8183	0.7733
5	6.231	178.911	5.809	+93.552	0.8498	0.7620
6	11.501	219.649	10.85	+133.43	0.8760	0.7522
7	21.547	260.271	20.5	+173.526	0.8924	0.7461
8	40.818	300.928	39.07	+213.69	0.9080	0.7404
9	77.957	341.493	74.974	+253.957	0.9175	0.7369
10	149.85	382.12	144.67	+294.293	0.9269	0.7334

Экспериментальная часть:

С целью практического подтверждения полученных теоретических результатов был проведен эксперимент с использованием шестиплечного моста (рис.1)

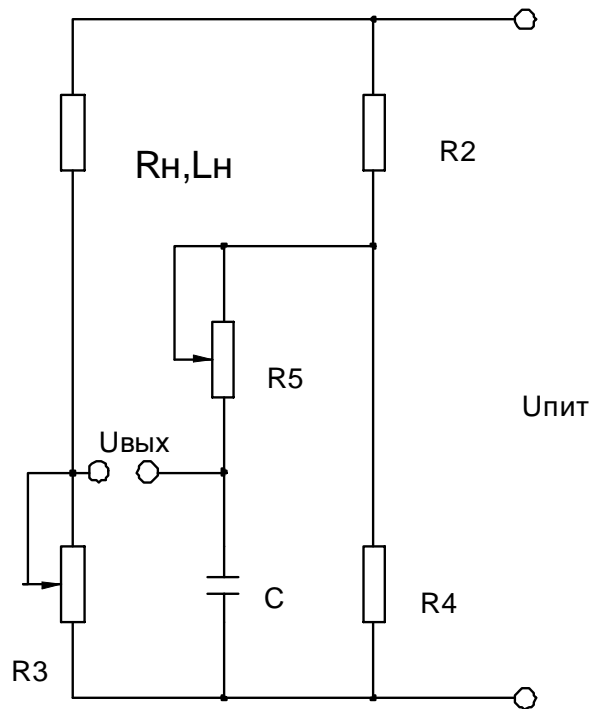


Рис.1

Измерению подвергались два провода, изготовленные из нихрома диаметром 0.1мм и 0.4мм. Указанные провода длиной 1м поочередно подключались к мостовой схеме изображенной на рис.1.

Измерения проводились цифровым мультиметром модели ЕС890D, который подсоединялся к клеммам $U_{\text{вых.}}$ мостовой схемы.

а) Измерение активного, индуктивного сопротивлений и удельной проводимости нихромового провода

При измерении активного сопротивления R_n и индуктивности L_n провода диаметром 0.4мм использовались такие элементы мостовой схемы: R_2, R_4 - МЛТ-0.25 номиналом 360 Ом, C - К73-17 номиналом 0.47 мкФ, R_3 - СП5-15 номиналом 10 Ом, R_5 - СП5-15 номиналом 10 Ом. Питание мостовой схемы $U = 8В, 50 Гц$. Результаты измерения следующие: $R_n = 9.5 Ом, L_n = 1.64 \cdot 10^{-3} Гн$.

Используя выражение:

$$R_n = \frac{\ell}{\gamma \cdot \pi \cdot R^2} \quad (37)$$

Определим γ :

$$\gamma = \frac{1}{9.5 \cdot \pi \cdot (0.2 \cdot 10^{-3})^2} = 8.377 \cdot 10^5 \frac{См}{м}$$

При аналогичных измерениях нихромового провода диаметром 0.1мм в мостовой схеме использовался резистор R_3 - СП5-15 номиналом 220 Ом. Результаты измерений в этом случае такие: $R_n = 133 Ом, L_n = 6.25 \cdot 10^{-3} Гн, \gamma = 9.573 \cdot 10^5 См/м$.

б) Измерение абсолютной магнитной проницаемости μ_a нихромового провода.

Индуктивность L_n нихромового провода определяется абсолютной магнитной проницаемостью, μ_a нихрома и геометрическими размерами провода.

Индуктивность L_n нихромового провода длиной l выражается формулой:

$$L_n = \frac{\mu_a \cdot l}{8 \cdot \pi} \quad (38)$$

Формула (38) справедлива только при условии равномерного распределения тока по сечению провода, т.е. только при постоянном токе.

Схема установки для испытания нихромового провода, с целью определения абсолютной магнитной проницаемости μ_a , приведена на рис.2.

Испытанию подвергались два нихромовых провода диаметром 0.4мм и 0.1мм.

Нихромовые провода последовательно закреплялись на специальной линейке длиной 1м. С помощью переключателя $S1$, типа П1Т-1-1, на провод диаметром 0.1мм подавалось напряжение 13.3В, сопротивление R_n выбиралось равным 1Ом. Падение напряжения на R_n измерялось с помощью осциллографа С1-97, и фиксировалась постоянная времени τ установления тока I в цепи, $\tau = 0.05 \cdot 10^{-3} с$.

В результате определяем L_n :

$$L_n = \tau \cdot R_n = 0.05 \cdot 10^{-3} \cdot 133 = 6.65 \cdot 10^{-3} Гн.$$

а из выражения (38) определяем μ_a :

$$\mu_a = 6.65 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot \pi = 0.167.$$

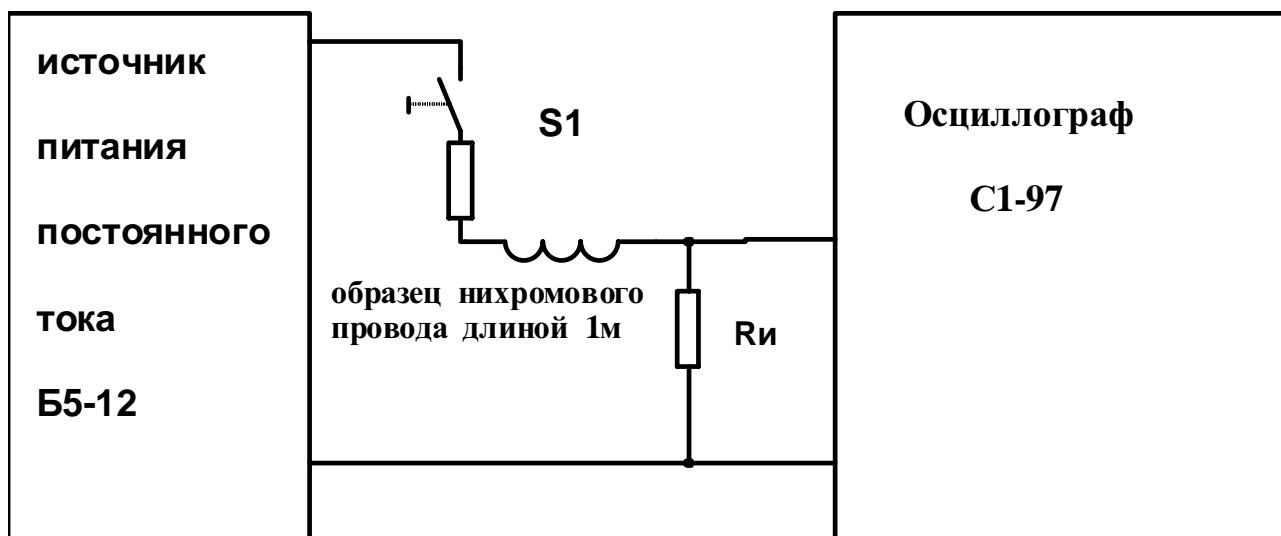


Рис. 2

Аналогично на провод диаметром 0.4мм подавалось напряжение 9.5В, сопротивление $R_{и}$ выбиралось равным 0.1 Ом. Постоянная времени установления тока I в цепи для этого случая $\tau = 0.2 \cdot 10^{-3}$ с.

Индуктивность $L_{н}$ и абсолютная магнитная проницаемость, μ_a для этого случая равны:

$$L_{н} = 0.2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.5 = 1.9 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

$$\mu_a = 1.9 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot \pi = 0.048.$$

в) Проверка адекватности теоретических результатов и экспериментальных данных

Для провода диаметром 0.4мм на основании экспериментальных данных определим величину:

$$R \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} = R \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 8.377 \cdot 10^5 \cdot 0.048} = 0.711$$

Далее по формуле (26) определим $J_0(X)$:

$$J_0(X) = \sum_{k=0}^{80} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{0.711}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \right)^{2k} = 0.996 + j0.126$$

Вычисляем коэффициенты b_0, β_0 :

$$b_0 = \sqrt{0.996^2 + 0.126^2} = 1.004$$

$$\beta_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{0.126}{0.996}\right) = 7.219^\circ$$

Вычисляем по формуле (32) $J_1(X)$:

$$J_1(X) = \sum_{k=0}^{80} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (1+k)!} \cdot \left(\frac{0.711}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^{2k+1} = 0.267 - j0.235$$

Вычисляем коэффициенты b_1, β_1 :

$$b_1 = \sqrt{0.267^2 + 0.235^2} = 0.356$$

$$\beta_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{-0.235}{0.267}\right) = -41.368^\circ$$

По формулам (35),(36) вычисляем R_n, X_n :

$$R_n = \frac{3554 \cdot 1.004}{2 \cdot \pi \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} \cdot 8.377 \cdot 10^5 \cdot 0.356} \cdot 0.998 = 9.502 \text{ Ом}$$

$$X_n = \frac{3554 \cdot 1.004}{2 \cdot \pi \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} \cdot 8.377 \cdot 10^5 \cdot 0.356} \cdot 0.063 = 0.6 \text{ Ом}$$

Вычислим значение индуктивности L_n :

$$L_n = \frac{0.6}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 1.91 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Аналогично проведем расчет для провода диаметром 0.1мм:

$$R \sqrt{\omega \cdot \gamma \cdot \mu_a} = R \sqrt{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 9.573 \cdot 10^5 \cdot 0.167} = 0.354$$

$$J_0(X) = \sum_{k=0}^{80} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{0.354}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^{2k} = 1 + j0.031$$

$$b_0 = \sqrt{1^2 + 0.031^2} = 1$$

$$\beta_0 = \operatorname{atan}\left(\frac{0.031}{1}\right) = 1.776^\circ$$

$$J_1(X) = \sum_{k=0}^{80} \frac{(-1)^k}{k! \cdot (1+k)!} \cdot \left(\frac{0.354}{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)^{2k+1} = 0.127 - j0.123$$

$$b_1 = \sqrt{0.127^2 + 0.123^2} = 0.177$$

$$\beta_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{-0.123}{0.127}\right) = -44.06^\circ$$

$$R_n = \frac{7087 \cdot 1}{2 \cdot \pi \cdot 0.05 \cdot 10^{-3} \cdot 9.573 \cdot 10^5 \cdot 0.177} \cdot 1 = 133.135 \text{ Ом}$$

$$X_n = \frac{7087 \cdot 1}{2 \cdot \pi \cdot 0.05 \cdot 10^{-3} \cdot 9.573 \cdot 10^5 \cdot 0.177} \cdot 0.015 = 1.997 \text{ Ом}$$

$$L_n = \frac{1.997}{2 \cdot \pi \cdot 50} = 6.357 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

Выводы:

1. В работе предложена математическая модель для исследования электрических нагревателей из различных материалов и сечений с высокой степенью адекватности практическим результатам.
2. С целью повышения коэффициента полезного действия электрический нагреватель необходимо изготавливать из системы параллельно соединенных нагревателей малого сечения.

In article on the basis of theory Maxwell, theorem Pointing-Umov, the equation and functions Bessel the mathematical model is developed for definition active and internal inductive resistance of a cylindrical wire of a heater. For confirmation of adequacy of mathematical model results of experiments by definition of active, inductive resistance, magnetic permeability, specific conductivity nihrom wires of two various diameters are resulted.

1. Несис Е.И. Методы математической физики.- М.: Просвещение, 1977.- 199с.
2. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям.-М.: Наука, 1979.- 832с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле.- М.: Высш. школа,1978.-231с.
4. Нейман Л.Р., Демирчян К.С Теоретические основы электротехники. Том 2.- Л.: Энергоиздат,1981.- 416с.
5. Попруга А.Г. Усовершенствование электрических нагревателей по критерию экономии энергии // Вестник Херсонского национального технического университета.- 2003.-№ 2(12).- С. 142-145.