УДК 681.51

НОВЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ЦИФРОВЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Стопакевич А.А.

Введение. Объекты управления, моделируемые в виде инерционного или интегрального звеньев с запаздыванием, являются традиционным объектом исследования в инженерной теории автоматического управления. Для синтеза систем управления таких объектов с типовыми регуляторами разработаны многочисленные методики настройки. Однако, внедрение компьютерной техники требует использования более совершенных цифровых систем управления. Такие системы можно рассчитать, используя разработанный аппарат синтеза оптимальных цифровых регуляторов с наблюдателями. Такой расчет, в традиционной постановке, невозможен без применения специализированных программ (например, Матлаб), зачастую существенно использующих ресурсы компьютера. В то же время, желательно было бы иметь простые инженерные соотношения для настройки систем на технологическом объекте управления, а также для использования в адаптивных системах управления. Такие соотношения впервые получены в настоящей статье. Побочным теоретическим результатом, вытекающим из полученных соотношений, является то, что, оказывается, параметры оптимального регулятора состояния совершенно не зависят от запаздывания и определяются исключительно постоянной времени объекта и периода дискретности.

1. Модель объекта управления в дискретном времени. Зададимся объектами управления в виде инерционного или интегрального звена с запаздыванием в виде:

$$W_0^1(p) = \frac{k_1}{T_1 \cdot p + 1} \cdot e^{-p \cdot \tau_1} \tag{1}$$

или

$$W_0^2(p) = \frac{k_2}{T_2 \cdot p} \cdot e^{-p \cdot \tau_2}\,. \tag{2}$$

Переведя модель объекта управления в дискретное время, запишем

$$x_{i+1} = \alpha \cdot x_i + \beta \cdot u_{i-m}\,, \tag{3}$$

где $\alpha = e^{-\frac{\Delta t}{T_1}}$, $\beta = k_1 \cdot (1-\alpha)$ – для системы, эквивалентной W_0^1;

$\alpha = 1$, $\beta = k_2 \cdot \Delta t / T_2$ – для системы, эквивалентной W_0^2,

Δt – шаг дискретности,

$m = [\tau / \Delta t]$ – число шагов запаздывания,

Тогда, с учетом запаздывания матрицы системы

$$x_{i+1} = A \cdot x_i + B \cdot u_i, \quad y_i = C \cdot x_i, \tag{4}$$

имеют вид $A \in \Re^{n,n}$, $B \in \Re^{n,1}$, $C \in \Re^{1,n}$, n=m+1,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Структура оптимального регулятора. Как известно, оптимальный регулятор, в рамках теории аналитического конструирования регуляторов, записывается в виде [1].

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= (A - B\cdot K - L\cdot C)\cdot x_i + L\cdot y_i, \\ u_i &= -K\cdot x_i + K_z\cdot z, \end{aligned} \tag{5}$$

где $K=[k_1\ldots k_n]$ – матрица регулятора состояния,

$L=[l_1\ldots l_n]^T$ – матрица наблюдателя состояния.

K_z – компенсатор задания.

4. Синтез регулятора состояния. Введем критерий качества в виде

$$J=\sum_{i=0}^{\infty} x_i^T\cdot Q\cdot x_i + u_i^T\cdot R\cdot u_i \Rightarrow \min \tag{6}$$

где, Q,R – весовые положительно – полуопределенные матрицы. Тогда, как известно [4], матрица параметров настройки регулятора состояния, определится в результате решения уравнения Риккати по зависимости

$$K = LQ(A,B,Q,R), \tag{7}$$

где

$$LQ(A,B,R,Q)=(B^TPB+R)^{-1}B^TPA,$$

$$P=A^TPA-A^TPB(B^TPB+R)^{-1}B^TPA+Q$$

С целью упрощения решения, без ограничения общности, примем весовые матрицы Q , R в виде

$$Q=\begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & q_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & q_n \end{pmatrix}, \qquad R=r \tag{8}$$

тогда справедлива теорема 1.

Теорема 1. Если объект управления задан в виде (4), весовые матрицы критерия качества (6) приняты в виде (8), то матрица параметров настройки регулятора состояния определяется скалярным соотношением

$$K=(k,0,\cdots,0),\ k=\frac{\alpha\cdot\beta\cdot P_1}{r+\beta^2\cdot P_1}=LQ(\alpha,\beta,tr(Q),r) \tag{9}$$

$$P_1=LR(\alpha,\beta,tr(Q),r),\ \ tr(Q)=\sum_{i=1}^{n} q_i\ , \tag{10}$$

$$LR(A,B,R,Q)=P,\quad P=A^TPA-A^TPB(B^TPB+R)^{-1}B^TPA+Q\ ,$$

и, более того, величина K не зависит от запаздывания объекта управления.

Решение матричного уравнения Риккати относительно неизвестной матрицы $P\in\Re_+^{m+1,m+1}$ определяется соотношениями

$$P=\begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & P_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_n \end{pmatrix}, где \quad \begin{matrix} P_n=q_n \\ P_{n-i}=P_{n-i+1}+q_{n-i} \end{matrix}, i=1,\ldots,n-2 \tag{11}$$

Доказательство теоремы 1 производится непосредственной подстановкой.

5. Синтез наблюдателя состояний. Наблюдатель состояния цифровой системы проведем в рамках модального синтеза (апериодический наблюдатель), выбрав все собственные значения наблюдаемой подсистемы равными нулю.

Теорема 2. Синтез апериодического наблюдателя производится по зависимости

 ISBN 7-776-8361-7

$$L = [l_1 \ldots l_n]^T,\ l_i = \alpha^{n-i+1},\ i = 1..n \qquad (12)$$

Доказательство теоремы 2 производится непосредственной подстановкой.

. **6. Пример.** В качестве примера возьмем объект управления с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{3 \cdot e^{-80 \cdot p}}{120 \cdot p + 1}$$

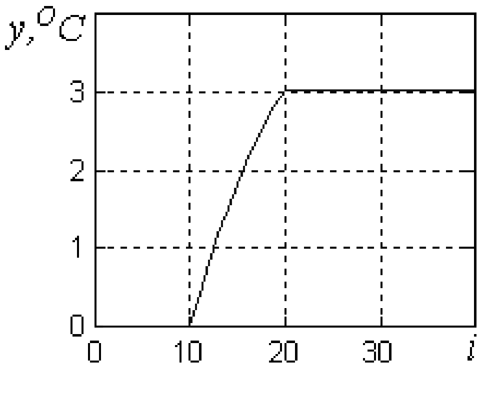
Тогда, если выбрана выбрать $\Delta t = 10c$, получим объект 9 порядка. Матрица настройки регулятора совпадает с результатами расчета по традиционной методике и имеет вид ($Q_{i,i} = 1,\quad i = 1,\ldots 8,\quad Q_{9,9} = 10^7,\quad R = 1$)

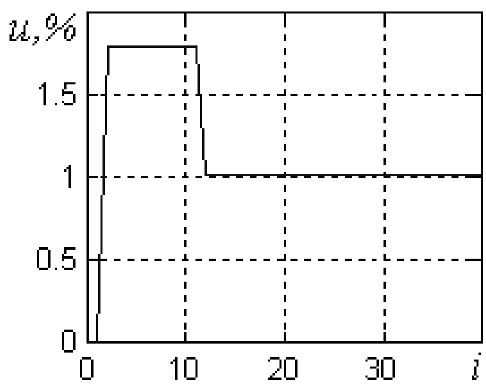
K=[3.8356 0 0 0 0 0 0 0 0].

Матрица настройки наблюдателя равна

L^T=[0.4724 0.5134 0.5580 0.6065 0.6592 0.7165 0.7788 0.8465 0.9200]

Переходные процессы при изменении задания на 3 единицы имеют вид





Отметим в заключение, что если выбрать $\Delta t = 1c$, то получим объект 81 порядка, время вычисления параметров для которого по традиционной методике превышает время синтеза по предложенной методике почти в 10^4 раз.

Заключение. Предложена методика расчета оптимальных цифровых систем управления, позволяющая существенно быстрее и точнее произвести расчет параметров регулятора (матрицы регулятора и наблюдателя), причем расчет для матриц объекта любого порядка можно произвести практически без компьютера. Показано, что параметры оптимального регулятора состояния совершенно не зависят от запаздывания и определяются исключительно постоянной времени объекта и периодом дискретности. Запаздывание определяет лишь размерность матриц регулятора и наблюдателя.

It is suggested new approach for optimal digital control systems synthesis. The approach lets us calculate controller parameters (controller and observer matrices) substantially faster. The calculation of the matrices can be executed without computer. Also it’s shown that the parameters of the optimal state controller is not depended of time delay and depended of the object response time and sample time only. The time delay determines the dimension of controller and observer matrices.

1. Стопакевич А.А. Сложные системы: анализ, синтез, управление.– Одесса: Кред, 2004.– 277с.