УДК 519.6

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО БАЗИСА ГЕКСАГОНА

Николаенко Ю.И., Моисеенко С.В.

Постановка проблемы. Задачи восстановления функций возникают в разных прикладных отраслях при исследовании сплошных сред, а именно при оценке продуктивности месторождений нефти, газа, в экологических и физических исследованиях. Кроме того, задачи, связанные с восстановлением поверхностей по результатам измерений, являются актуальными при проектировании, конструировании, изготовлении деталей такими методами быстрого прототипирования, как стереолитография, объёмная печать, основой которых являются результаты обмера.

При реализации на ЭВМ задач восстановления наиболее эффективными являются дискретные методы (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод Монте-Карло), большинство из которых в основе своей являются сеточными. Если поверхность задана точечным базисом, для её восстановления часто используют триангулированную и прямоугольную сетки, основными элементами которых являются треугольники и прямоугольники. Значительная часть вопросов, возникающих при решении задач восстановления, связана с повышением их точности с учетом экономии вычислительных ресурсов. В этом случае наиболее экономичной и альтернативной является сотовая сетка, т.е. сетка, узловые точки которой находятся в вершинах правильных шестиугольников (гексагонов). Задачи диффузии и теплопроводности в ядерных реакторах и других конструкциях с гексагональной геометрией, привело к необходимости создания конечного элемента в форме гексагона с узлами интерполяции в вершинах элемента [1,4]. Попытка построить классический интерполяционный полином на шестиугольном конечном элементе традиционным матричным методом не увенчалась успехом: матрица СЛАУ оказалась вырожденной. Причиной тому принято считать “избыточную” симметрию гексагона. Базисные функции гексагональных конечных элементов с линейным поведением на границе можно построить с любой степенью точности одним из известных численных методов, например, методом Монте-Карло [7]. Но полученные при этом значения функций не удается представить в виде значений некоторых элементарных функций. Базисы, которые до сих пор удалось получить, не являются гармоническими. Поэтому остается актуальной задача построения полиномиальных аппроксимаций конечно-элементных базисных функций гексагона.

Анализ предшествующих публикаций и цели статьи. Первые гексагональные базисы были сконструированы в 80-х годах прошлого столетия. Неудачное применение матричных методов при построении полиномиальных базисных функций (БФ) стимулировало развитие геометрических методов. Результаты Уачспресса [2] в геометрическом моделировании конечно-элементных базисов позволили создать дробно-рациональный базис (ДРБ) [1,3], а затем и полиномиальный (ПБ) [4]. Недавно [5] была предпринята попытка синтезировать две несбалансированные системы интерполяционных функций с целью создания синтетического базиса гексагона (СБ). В работе [8] предложен новый подход к построению полиномиального базиса (ПБ1) на гексагоне, а именно использование дополнительной информации в опорных узлах гексагона, получение которой основано на вероятностно-геометрическом дуализме БФ. Всесторонний анализ этих систем позволил установить следующие недостатки: нарушение весового баланса (СБ), плохо контролируемые погрешности численного интегрирования (ДРБ), нелинейное поведение функции на сторонах гексагона (ПБ, СБ, ПБ1), нарушение дифференциального критерия гармоничности (ДРБ, ПБ, СБ, ПБ1) [8]. В 2006 году в работе [6] был предложен гармонический полиномиальный базис третьего порядка (ГПБ3), базисные функции которого в точности удовлетворяют уравнению Лапласа, однако также как и у ПБ, у ГПБ3 наблюдается возникновение нелинейностей на границе гексагона. Для построения полиномиального базиса в настоящей работе авторы используют дополнительные ограничения в виде обнуления функции в тех областях на контуре гексагона, где возможны максимальные отклонения, в результате в полиноме появляются дополнительные члены высших порядков.

Основная цель работы – построить полиномиальный гармонический базис, свободный от ряда недостатков известных базисов.

Основная часть. В плоскости Оху рассмотрим правильный шестиугольник, вписанный в окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис.1).

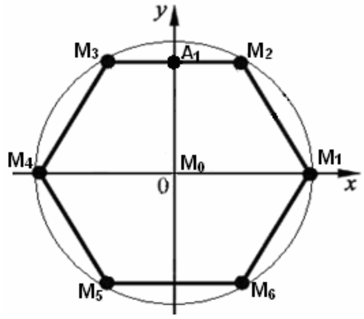

Рис.1 Гексагональный элемент

Наша задача – построить матричным способом шесть полиномов $\varphi_i(x, y)$ - базисных функций гексагона, ассоциированных с вершинами $i = \overline{1,6}$. Эти функции должны удовлетворять следующим требованиям:

интерполяционной гипотезе:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, (j = \overline{1,6}), \text{ где } \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера;} \tag{1}$$

условию сохранения весового баланса:

$$\sum_{i=1}^{6} \varphi_i(x, y) = 1; \tag{2}$$

уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi_i = 0 \quad (i = \overline{1,6}); \tag{3}$$

условие гармоничности Кёбе:

$$\frac{1}{l}\oint_L \varphi_i(x, y)dl = \varphi_i(0,0), \ (i = \overline{1,6}), \tag{4}$$

где l – длина периметра гексагонального конечного элемента;

специфическим граничным условиям:

между вершинами гексагона $\varphi_i(x, y)$ изменяется линейно. (5)

Базисную функцию, принимающую значение 1 в узле M_1, будем строить в виде полинома, где учтена симметрия относительно оси OX, поэтому полином не должен содержать нечетных степеней y. Для нахождения коэффициентов полинома составим и решим СЛАУ, в отличии от [7], где коэффициенты определялись как вероятности перехода частицы из дополнительного узла в соответствующую вершину гексагона.

В процессе исследования были построены полиномы третьего, четвертого, пятого, шестого, седьмого порядков, однако именно полином четвертого порядка обладает наилучшими интерполяционными свойствами.

Полином 4-го порядка имеет следующий вид:

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 xy^2 + \alpha_6 x^4 + \alpha_7 x^2 y^2 + \alpha_8 y^4 \tag{6}$$

С учетом симметрии БФ $\varphi_1(x, y)$ в дальнейших расчетах будем использовать вершины M_1, M_2, M_3, M_4. Выполнение условий (1) и (3) приводит к следующей системе уравнений:

ISBN 7-776-8361-7

$$\begin{cases}
\frac{1}{6}+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=1,\\
\frac{1}{6}-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_4+\alpha_6=0,\\
\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2+\frac{3}{4}\alpha_3+\frac{1}{8}\alpha_4+\frac{3}{8}\alpha_5+\frac{1}{16}\alpha_6+\frac{3}{16}\alpha_7+\frac{9}{16}\alpha_8=0,\\
\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2+\frac{3}{4}\alpha_3-\frac{1}{8}\alpha_4-\frac{3}{8}\alpha_5+\frac{1}{16}\alpha_6+\frac{3}{16}\alpha_7+\frac{9}{16}\alpha_8=0,\\
\alpha_2+\alpha_3=0,\\
3\alpha_4+\alpha_5=0,\\
6\alpha_6+\alpha_7=0,\\
\alpha_7+6\alpha_8=0.
\end{cases}$$

При рассмотрении данной системы уравнений было обнаружено, что уравнения данной системы являются линейно-зависимыми. Оказывается, что условие $\varphi(M_3)=0$ выполняется автоматически, если выполнены остальные условия интерполяционной гипотезы. Вместо соотношения $\varphi(M_3)=0$ накладываем дополнительное ограничение в точке $A_1(0;\frac{\sqrt{3}}{2})$: $\varphi(A_1)=0$. Вследствие этого, к системе добавляется уравнение: $\frac{1}{6}+\frac{3}{4}\alpha_3+\frac{9}{16}\alpha_8=0$.

Решение полученной СЛАУ, даёт следующие значения коэффициентов:

$$\alpha_0=\frac{1}{6};\ \alpha_1=\frac{1}{3};\alpha_2=\frac{17}{63};\alpha_3=-\frac{17}{63};\alpha_4=\frac{1}{6};\alpha_5=-\frac{1}{2};\alpha_6=\frac{4}{63};\alpha_7=-\frac{24}{63};\alpha_8=\frac{4}{63}.$$

Следовательно, функция $\varphi_1(x,y)$ имеет вид (рис.2):

$$\varphi_1(x,y)=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}x+\frac{17}{63}(x^2-y^2)+\frac{1}{6}(x^3-3xy^2)+\frac{4}{63}(x^4-6x^2y^2+y^4). \qquad (7)$$

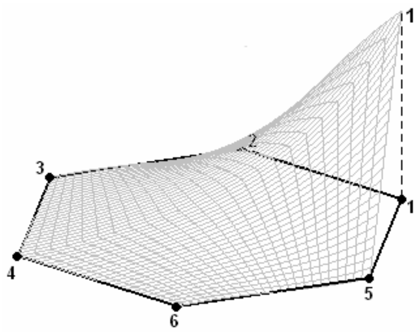

Рис.2. График функции $\varphi_1(x,y)$

Остальные функции могут быть получены путем поворота системы координат на угол, кратный 60^0. В результате тестирования было установлено, что данная функция удовлетворяет условиям (1-4), кроме того, удалось минимизировать осцилляции на контуре гексагона и улучшить интерполяционные качества модели. В силу симметрии $\varphi_1(x,y)$ на рис.3 представлены отклонения от линейного поведения функции на сторонах M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4. На стороне M_1M_2 наблюдаются слабые осцилляции в пределах 1%.

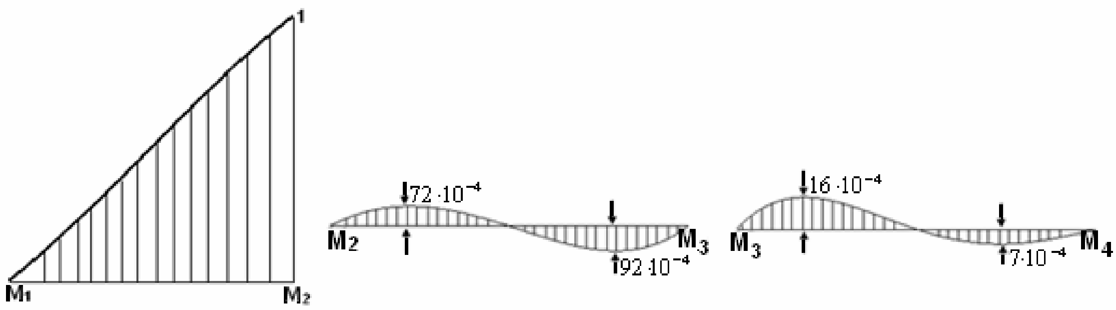

Рис. 3 Отклонение от линейного поведения функции $\varphi_1(x, y)$ на границе гексагона

В данном случае аномалии не имеют нежелательных последствий благодаря полному сглаживанию при ансамблировании. Подтверждением тому – удовлетворение критерию (4).

Выводы. Данный полиномиальный базис был получен благодаря удачному сочетанию геометрических и алгебраических методов. Следует отметить, что полученный базис успешно справляется с задачей лагранжевой интерполяции, кроме того БФ $\varphi_i(x, y)$ является гармонической, т.к. удовлетворяет дифференциальному (3) и интегральному (4) критериям гармоничности. С появлением таких моделей гексагонализация становится такой же привычной процедурой МКЭ, как и триангуляция.

In the article the possibility of construction of a harmonic polynomial base of the hexagonal for a discrete element with six nodes in apexes by algebraical method is presented. The properties of base are analyzed.

1. Ishiguro M. Construction of hexagonal basis functions applied in the Galerkin-type finite element method // J. Inf. Process. 1984. V. 7, №2. – P.89-95.

2. Wachspress E.L. A rational finite element basis. – Academic Press. – New York, 1975. – 216p.

3. Хомченко А.Н. О дробно-рациональной интерполяции на шестиугольном конечном элементе // Вісник Запорізького держ. ун-ту (серія: фізико-математичні науки).– 2002. - №3.– С.84-87.

4. Хомченко А.Н. К расчету температурных полей в сотовых структурах методом конечных элементов//Инж.-физ. журнал.–1987.– Т.52, №2.–С.301-305.

5. Хомченко А.Н. Синтетична модель гексагонального скінченного елемента // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Тавр. держ. агротехн. академія. – Мелітополь: ТДАТА, 2003.-Вип.4.Т.20. - С.9-13.

6. Цыбуленко О.В., Литвиненко Е.И., Николаенко Ю.И. Альтернативные модели гексагональных базисов //Системні технології. – Дніпропетровськ, 2006. – Вип..3(44). – С.155-161..

7. Хомченко А.Н., Моисеенко С.В., Николаенко Ю.И. Моделирование полиномиального базиса гексагона // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ:ДНУ,2006.-С.242-249.

8. Хомченко А.Н., Моисеенко С.В. Квазигармонические базисы конечно-элементной интерполяции // Новые информационные технологии в учебных заведениях: Материалы Международной конференции памяти проф. И.И. Мархеля. – Одесса, 2005. – С.173-176.

 ISBN 7-776-8361-7