

УДК 622.673.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ВЛИЯНИЯ КРИВИЗНЫ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ НА УГОЛ СМАЧИВАНИЯ ЖИДКОСТИ В МЕЖЧАСТИЧНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исаев Е.А., Наговский Д.А.

Данная статья посвящена исследованию влияния кривизны контактирующих тел на угол смачивания. Материалы статьи могут быть использованы для построения математических моделей процессов, связанных с влагой, увлажнению каких либо частиц. Для простоты изъяснения сразу же введем конкретный пример: окомкование сыпучих материалов. Оптимизация данного процесса играет немаловажную роль в промышленности Украины в виду обеднения руд. Основным влияющим фактором в процессе окомкования является влажность сырья. Поэтому имеет смысл исследовать степень увлажненности частиц для определения силы их сцепления.

Постановка задачи. Исследовать влияние кривизны контактирующих тел на угол смачивания с целью дальнейшего использования полученных результатов для построения математических моделей процессов, связанных с увлажнением материала.

Равновесный угол Θ_0 является одной из важнейших характеристик смачивания твердой поверхности при контакте жидкости и твердого тела [1].

На величину равновесного краевого угла смачивания определенное влияние имеет кривизна жидкостной манжеты при контакте двух сферических частиц с значительным (по отношению к объекту твердых частиц) количеству воды в точке контакта. При этом равновесный краевой угол изменяется.

Определение величины равновесного краевого угла смачивания наиболее точно отражается в уравнении, основанном на минимуме свободной энергии системы «твердое тело-жидкость-газ» в состоянии равновесия по выражению:

$$F_n = \sigma_{ТГ} \cdot \omega_{ТГ} + \sigma_{ТЖ} \cdot \omega_{ТЖ} + \sigma_{ЖГ} \cdot \omega_{ЖГ}, \quad (1)$$

где $\sigma_{ТГ}, \sigma_{ТЖ}, \sigma_{ЖГ}$ - поверхностные натяжения на границах соответствующих фаз;

$\omega_{ТГ}, \omega_{ТЖ}, \omega_{ЖГ}$ - площади поверхности раздела фаз, участвующих в смачивании. В случае рассмотрения капли смачивающей жидкости на гладкой однородной и твердой поверхности, выражение (1) представляется в виде

$$\frac{\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТЖ}}{\sigma_{ЖГ}} = \cos \Theta_0, \quad (2)$$

где Θ_0 – равновесный краевой угол смачивания, для определенного вида материала и жидкости есть величина постоянная.

При получении математической модели связывающей геометрически параметры твердых тел различной кривизны с величиной угла смачивания Θ мы использовали (1).

Рассмотрим вышеназванную систему геометрически, представив каплю жидкости в виде твердого тела, т.е. выражение (1) можно привести к виду

$$\frac{\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТЖ}}{\sigma_{ЖГ}} = \frac{d\omega_{ЖГ}}{d\omega_{ТЖ}}, \quad (3)$$

В случае контакта сферических или других частиц между собой, или сферической частицы и плоскости с прослойкой жидкости в точке контакта, равновесный краевой угол, по нашему мнению, изменяет свою величину в зависимости от геометрии смачиваемых и контактирующих поверхностей, и правая часть выражения (2) становится функцией некоторого угла θ , не равного Θ_0 . Мы допускаем, что кольцевая жидкостная манжета в своем

сечении имеет форму близкую к окружности. Тогда, используя рис. 1,а можно записать уравнение

$$\left[(r_1 + r_2') - x \right]^2 + y^2 = r_2'^2 \quad (4)$$

Откуда

$$x = r_1 + r_2' - \sqrt{r_2'^2 - y^2}.$$

Наружную поверхность смачивающей жидкости найдем из следующего выражения

$$\omega_{жг}^{(1)} = 4 \cdot \pi \cdot \int_0^{AH} x(y) \sqrt{1 + (x')^2} dy, \quad (5)$$

где

$$AH = r_2' \cdot \sin \psi.$$

Подставив (4) в (5), после преобразований получим

$$\omega_{жг}^{(1)} = 4 \cdot \pi \cdot r_2' [(r_1 + r_2') \cdot \psi - r_2' \sin \psi]. \quad (6)$$

Здесь $\omega_{жг}^{(1)}$ - поверхность жидкость - газ для двух сфер одинакового диаметра

Из (6) при $\psi = const, r_1 \neq f(r_2')$

$$d\omega_{жг}^{(1)} = 8 \cdot \pi \cdot \left[\frac{r_1}{2} \psi + r_2' (\psi - \sin \psi) \right] dr_2'.$$

С другой стороны, уравнение поверхностей, контактирующих с жидкостью, записывается в виде

$$\omega_{жг}^{(1)} = 4\pi R_1 r_2' \cdot \sin \psi,$$

откуда

$$d\omega_{жг}^{(1)} = 4\pi R_1 \cdot dr_2' \cdot \sin \psi.$$

Используя (2), запишем для нашего случая

$$\frac{\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТЖ}}{\sigma_{жг}} = \frac{2 \left[\frac{r_1}{2} \psi + r_2' (\psi - \sin \psi) \right]}{R_1 \cdot \sin \psi} = f(\Theta_0), \quad (7)$$

Выражение (7) связывает значение функции краевого угла смачивания Θ с поверхностным натяжением на границах раздела фаз с учетом формы контактирующих частиц и объема жидкостной прослойки.

С другой стороны, значение угла смачивания Θ характеризует способность двух частиц образовывать устойчивый микроагрегат за счет сил капиллярного разрежения

$$F = 4\pi\sigma_{жг} \cdot \left[r_1 \cdot a + R(1 - \sqrt{1 - a^2}) \cdot b - R \frac{b}{a} \arcsin a + \frac{\sqrt{1 - a^2}}{2} \cdot R(\cos \Theta \cdot \sqrt{1 - a^2} - \sin \Theta \cdot a) \right],$$

где

$$a = \sin \psi; b = 1 - \sin \Theta \cdot \sqrt{1 - a^2} - a \cos \Theta.$$

Сопоставив выражения (3) и (7), а также проанализировав последнее отметим, что в области контакта изменяется соотношение между $\sigma_{жг}, \sigma_{ТЖ}, \sigma_{ТГ}$, т.е. изменение геометрии твердых поверхностей и объема жидкостной прослойки, по нашему мнению, эквивалентно лиофильности жидкости, контактирующей с твердой поверхностью, харак-

теризующейся равновесным краевым углом смачивания Θ . Исходя из изложенного, подставив выражение для определения силы сцепления между частицей сферической формы и плоскости (рис. 1,б)

$$F_{cy} = 2\pi\sigma \left\{ r_1 (\sin \psi' + \cos \Theta) + r_2 \left[\sin \psi' (1 - \cos \psi') - \psi' + \cos \Theta (1 - \sin \Theta) - \frac{\pi}{2} + \Theta \right] \right\},$$

где

$$\sin \psi' = \frac{2(1 + \frac{b}{2R} + \sin \Theta)(\cos \Theta - \frac{r_1}{R})}{(1 + \frac{b}{2R} + \sin \Theta)^2 + (\cos \Theta - \frac{r_1}{R})};$$

$$r_2' = \frac{R[1 - \sin(\Theta + \psi')] + \frac{b}{2}}{\sin \psi'}$$

в (7), можно получить степень влияния формы частиц количества жидкости в точке контакта на значение угла смачивания Θ для различных по лиофильным свойствам жидкостей.

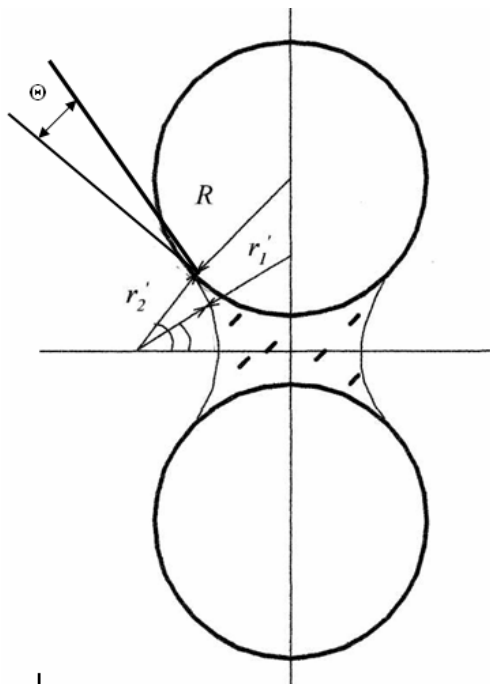


Рис. 1,а Взаимодействие частиц одинаковых размеров

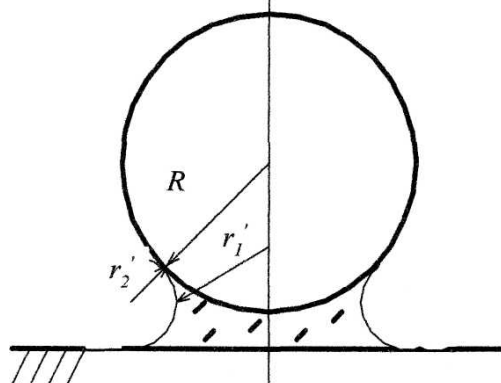


Рис. 1,б Взаимодействие частицы с плоскостью

Отметим, что изложенные теоретические исследования не противоречат с физическими представлениями о капиллярном взаимодействии различных по характеру кривизны поверхностей, рассмотренных, например, в [2].

Зависимость $\Theta = f(r1/R1)$, полученная из (7), представлена на рис. 2.

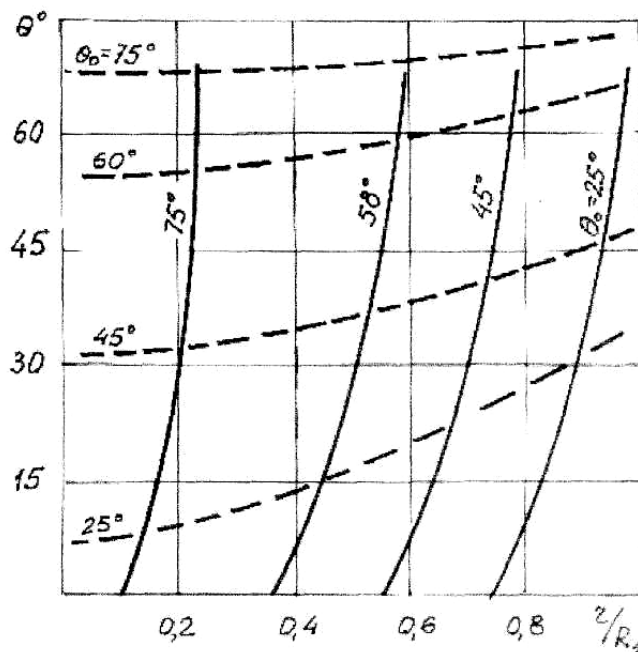


Рис. 2 Зависимость краевого угла смачивания Θ в функции кривизны поверхностей контактирующих тел и равновесного угла Θ_0 .

——— - сферы одинакового размера;
 - - - - сферы и плоскости.

Анализ этого рисунка показывает, что при угле $\Theta_0 < 25^\circ \dots 20^\circ$ геометрия поверхности частиц не оказывает существенного влияния на угол смачивания Θ при различной влажности материала ($r1/R1$). Если равновесный угол смачивания жидкости находится в пределах $20^\circ < \Theta_0 < 75^\circ$, то угол Θ , а равно и способность к окомкованию, в большей степени зависит от количества жидкости в точке контакта. При этом, например, для угла $\Theta_0 > 60^\circ$ жидкости должно быть не более, чем $(r1/R1) = 0,36$, в противном случае незначительное увеличение количества жидкости (до $(r1/R1) = 0,5$) приводит к возрастанию угла смачивания Θ с 15° до 60° , что ухудшает условия окомкования материала. При $\Theta_0 > 75^\circ$ окомкование практически невозможно даже при $(r1/R1) = 0,1$. Таким образом, окомкованию способствуют жидкости, имеющие угол смачивания поверхности материала $\Theta_0 < 25^\circ$, при этом материалы можно увлажнять практически до состояния максимальной капиллярной влагоемкости (по В.М. Витюгину).

Рассмотрим вопрос определения угла смачивания Θ для случая контакта сферической частицы и плоскости. Согласно рис. 1,6 и, используя изложенную ранее методику для данного случая, запишем

$$\omega_{ЖТ}^{(2)} = 2\pi \int_0^{AP} (r_1 + r_2' - \sqrt{b}) \sqrt{1 + \frac{(y - r_2' \cos \Theta)^2}{b}} dy,$$

где

$$b = r_2'^2 \sin^2 \Theta + 2r_2' y \cos \Theta - y^2,$$

$$AP = r_2' (\sin \psi + \cos \Theta)$$

После преобразований получили:

$$d\omega_{ТЖ}^{(2)} = 4\pi \left[\left(\frac{r_1}{2} + r_2' \right) \psi - r_2' (\sin \psi + \cos \Theta) \right] dr_2'. \quad (8)$$

Производная от $\omega_{ТЖ}^{(2)}$ по r_2' имеет вид

$$d\omega_{ТЖ}^{(2)} = 2\pi \left\{ R \left[\sin \psi + \cos \Theta + \cos(\Theta + \psi)(1 - \sin \Theta) + \frac{r_2'(1 - \sin \Theta)^2}{R} \right] \right\} dr_2'. \quad (9)$$

Используя подстановку (8) и (9) в (2), получим

$$\frac{\sigma_{ТГ} - \sigma_{ТЖ}}{\sigma_{ЖГ}} = \frac{2 \cdot \left[\frac{r_1}{2} \psi + r_2' (\psi - \sin \psi - \cos \Theta) \right]}{R \left[\sin \psi + \cos \Theta + \cos(\Theta + \psi)(1 - \sin \Theta)^2 + r_2'(1 - \sin \Theta)^2 \right]} \quad (10)$$

Зная величины $\sigma_{ТГ}, \sigma_{ТЖ}, \sigma_{ЖГ}$ с учетом количества жидкости в области взаимодействия, из (10) определяется краевой угол Θ для твердых частиц, имеющих сферическую форму согласно рис. 1,б и рис. 1,а.

Используя приведенную методику, легко можно найти угол для случая двух сфер разных размеров.

Вывод: Таким образом, получена математическая модель, связывающая равновесный краевой угол смачивания с геометрией контактирующих сферических частиц и наличием жидкостной прослойки между ними, а также произведен анализ модели на предмет соответствия ее физическим представлениям о капиллярном взаимодействии различных по характеру кривизны поверхностей. При $\Theta < 20^\circ$ изменение размеров частиц слабо влияет на изменение Θ .

In the article influence of curvature of bodies on a wetting angle of watering Θ is investigated. The system a solid body-liquid-gas is considered. Versions of cohesion both similar particles, and particles with a plane are considered. The mathematical model connecting an equilibrium boundary angle of wetting with geometry of contacting spherical particles and presence of a liquid interlayer between them is obtained, and also the analysis of model is produced for correspondence to its physical representations about capillary interaction various on character of curvature of surfaces

1. Вегман Е.Ф. Окускование руд и концентратов. Изд. Металлургия 1984.
2. Современная теория капиллярности. Под ред. А.И. Русанова, Ф.И. Гидрича. - Л.: Химия, 1980, - 245с.