ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

УДК 681.3.06

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Забытовская О.И.

Постановка задачи

Рассмотрена возможность получения функции полезности для набора сельскохозяйственной продукции на основе статистической отчетности по области за несколько лет исходя из предположения, что потребители при ограниченном бюджете поступали оптимально, т.е. реализовывали при выборе свою систему предпочтений, удовлетворяющую условиям однозначности, транзитивности, симметричности, выпуклости. [1,4]

Решение задачи

Использование функции полезности вместо отношения предпочтения удобно по ряду причин. Во-первых, теория, построена на функции полезности, приводит к хорошо известным результатам в экономике, которые трудно вывести только из отношения предпочтения. Во-вторых, рассуждения, построенные с помощью функции полезности, более понятны через построения на ее основе функции спроса. Через функцию полезности можно определить карту безразличия, предельные нормы замещения, предельную полезность каждого продукта, полный дифференциал функции полезности несет всю информацию об изменении полезности группы товаров. При построении функции полезности предполагают, что выполняется закон Госсена – закон убывания предельной полезности, что она дифференцируемая и матрица H образованная из вторых частичных производных является отрицательно определенной (функции полезности строго вогнута). Этим условиям удовлетворяют логарифмическая, мультипликационная, аддитивная и квадратичная функции полезности. Ход выводов и рассуждений для нахождения коэффициентов и параметров функций полезности и на основе их функций спроса вариационными методами [1,2,3] одинаков. Покажем это на примере квадратичной функции полезности, которая для двух товаров x_i и x_j имеет вид

$$U(x_i x_j) = \alpha_{01}x_i + \alpha_{10}x_j + \alpha_{11}x_i x_j + \alpha_{0,2}x_i^2 + \alpha_{2,0}x_j^2 \qquad (1)$$

Если имеется m годовых отчетов по реализации n товаров, то можно построить C_n^2 двумерных функций полезности (соответственно C_n^3 - трехмерных, C_n^4 - четырехмерных и т.д.).

Очевидно предварительно нужно проанализировать матрицу корреляционных связей n товаров или матрицу корреляционных связей первых приращений этих товаров [1] и выбрать минимально необходимый набор функций полезности для получения функции спроса для всех товаров. Анализ корреляционной матрицы позволит сделать правильный выбор пар товаров и обеспечить значимость коэффициента α_{11} в формуле (1).

Для решения поставленной задачи необходимо выразить объемы прогнозируемых товаров в денежных единицах, этим неявно будет определен оптимальный выбор потребителя через его ограниченный бюджет M, который может быть для двух товаров определен по формуле

$$M = \sum_{i=1}^{m} P_{1i}x_{1i} + \sum_{j=1}^{m} P_{2j}x_{2j}, \quad i,j=\overline{1,n} \quad , \qquad (2)$$

где P_i, P_j - цены товаров x_{1i}, x_{2j} соответственно в год i или j. Величины коэффициентов α_{ij} функции полезности определим минимизируя квадратичную форму.

$$S = \left(M - \alpha_{01}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i - x_{10}\sum_{i=1}^{m} x_{2j}P_j - \alpha_{11}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_{2j}P_j\right) - \right.$$

$$\left. - \alpha_{0,2}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i\right)^2 - \alpha_{2,0}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{2j}P_j\right)^2 \right)^2 \qquad (3)$$

Решение задачи сводится к системе линейных уравнений относительно неизвестных x_{ij}; величины $\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i$ и $\sum_{j=1}^{m} x_{2j}P_j$ легко определяются при известном душевом потреблении товаров x_1 и x_2 и ценах P_i и P_j по годам [3,4,7].Минимизация сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial S_i}{\partial \alpha_{ij}} = 0 \quad i, j = \overline{0,2} \qquad , \qquad (4)$$

которая может быть записана в виде системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов.

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i = K_{01}, \quad \sum_{j=1}^{m} x_{2j}P_j = K_{10}; \quad \left(\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} x_{2j}P_j\right) = K_{11}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_{1i}P_i\right)^2 = K_{02}, \quad \left(\sum_{j=1}^{m} x_{2j}P_j\right)^2 = K_{20}$$

тогда формула (3) будет иметь вид

$$S = \left(M - K_{01}\alpha_{01} - K_{10}\alpha_{10} - K_{11}\alpha_{11} - K_{02}\alpha_{02} - K_{20}\alpha_{20}\right)^2 \qquad (5)$$

а система (4) сводится к следующей системе нормальных уравнений:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
K_{01}^2\alpha_{01} & + & K_{01}K_{10}\alpha_{10} & + & K_{01}K_{11}\alpha_{11} & + & K_{01}K_{02}\alpha_{02} & + & K_{01}K_{20}\alpha_{20} & = & MK_{01} \\
K_{10}K_{01}\alpha_{01} & + & (K_{10})^2\alpha_{10} & + & K_{10}K_{11}\alpha_{11} & + & K_{10}K_{02}\alpha_{02} & + & K_{10}K_{20}\alpha_{20} & = & MK_{10} \\
K_{11}K_{01}\alpha_{01} & + & K_{11}K_{10}\alpha_{10} & + & (K_{11})^2\alpha_{11} & + & K_{11}K_{02}\alpha_{02} & + & K_{11}K_{20}\alpha_{20} & = & MK_{11} \\
K_{02}K_{01}\alpha_{01} & + & K_{02}K_{10}\alpha_{10} & + & K_{02}K_{11}\alpha_{11} & + & (K_{02})^2\alpha_{02} & + & K_{02}K_{20}\alpha_{20} & = & MK_{02} \\
K_{20}K_{01}\alpha_{01} & + & K_{20}K_{10}\alpha_{10} & + & K_{20}K_{11}\alpha_{11} & + & K_{20}K_{02}\alpha_{02} & + & (K_{20})^2\alpha_{20} & = & MK_{20}
\end{array} \qquad (6)$$

Отсюда по формуле Крамера найдем неизвестные коэффициенты для функции полезности $U(x_1, x_2)$:

$$\alpha_{01}^* = \frac{\Delta_{01}}{\Delta}, \quad \alpha_{10}^* = \frac{\Delta_{10}}{\Delta}, \ \alpha_{11}^* = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \ \alpha_{02}^* = \frac{\Delta_{02}}{\Delta}, \ \alpha_{20}^* = \frac{\Delta_{20}}{\Delta},$$

где Δ - определитель системы (6), Δ_{ij}, $ij = \overline{0,2}$ - определители, получаемые заменой соответствующего столбца определителя Δ столбцом $(MK_{01}, MK_{01}, MK_{11}, MK_{02}, MK_{20})'$. И функция полезности (1) для товаров x_1 и x_2 будет иметь вид

$$U = \left(x_i x_j\right) = \alpha_{01}^* x_1 + \alpha_{10}^* x_2 + \alpha_{11}^* x_1 x_2 + \alpha_{02}^* x_1^2 + \alpha_{20}^* x_2^2, \qquad (7).$$

 ISBN 7-776-8361-7

где α_{ij}^* - коэффициенты функции полезности, определяемы на основе экспериментальных данных по потреблению продуктов x_1 и x_2 на душу населения согласно [7]. Частичный анализ функции полезности включает прежде всего нахождение функций спроса на товары $x_i\left(i=1,n\right)$ и проверку адекватности найденных функций [6].

Последующие вопросы анализа, а именно:

- определения реакции потребителя при изменении дохода;
- определения эффектов замены и дохода на основании уравнений Слуцкого;
- расчет коэффициентов эластичности товаров по доходу и ценам;
- построение графиков: а) «доход-потребление» и Энгеля;
  б) «цены потребление» и спроса;

проводятся в соответствии с задачами исследований. Для нахождения функций спроса на товары x_1 и x_2 воспользуемся условиями:

$$\frac{\partial U\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_1}=\lambda P_1 \quad \frac{\partial U\left(x_1,x_2\right)}{\partial x_2}=\lambda P_2$$
$$P_1x_1+P_2x_2=M$$

где λ - предельная полезность денежной единицы. Для функции полезности (7)

получим
$$\begin{aligned} \alpha_{01}^* + \alpha_{11}^*x_2 + 2\alpha_{02}^*x_1 &= \lambda P_1 \\ \alpha_{10}^* + \alpha_{11}^*x_1 + 2\alpha_{20}^*x_2 &= \lambda P_2 \\ P_1x_1 + P_2x_2 &= M \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2\alpha_{02}^*x_1 + \alpha_{11}^*x_2 - \lambda P_1 &= \alpha_{01}^* \\ \alpha_{11}^*x_1 + 2\alpha_{20}^*x_2 + \lambda P_2 &= \alpha_{10}^* \\ P_1x_1 + P_2x_2 &= M \end{aligned}$$

отсюда
$$x_1(P_1,P_2,M)=\frac{\begin{vmatrix}\alpha_{01}^* & \alpha_{11}^* & -P_1 \\ \alpha_{10}^* & 2\alpha_{20}^* & -P_2 \\ M & P_2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2\alpha_{02}^* & \alpha_{11}^* & -P_1 \\ \alpha_{11}^* & 2\alpha_{20}^* & -P_2 \\ P_1 & P_2 & 0\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{M\left(-\alpha_{11}^*P_2+2\alpha_{20}^*P_1\right)-P_2\left(-\alpha_{01}^*P_2+\alpha_{10}^*P_1\right)}{2\left(-\alpha_{11}^*P_1P_2+\alpha_{20}^*P_1^2+\alpha_{02}^*P_2^2\right)} \tag{8}$$

При $M\left(-\alpha_{11}^*P_2+2\alpha_{20}^*P_1\right)=P_2\left(-\alpha_{01}^*P_2+\alpha_{10}^*P_1\right)$ спроса на продукт x_1 нет. Спрос на продукт x_1 возможен при положительном числителе в формуле (8) и выполнении условия

$$\alpha_{11}^*P_1P_2<\alpha_{20}^*P_1^2+\alpha_{02}^*P_2^2 \tag{9}$$

$$x_2(P_1,P_2,M)=\frac{\begin{vmatrix}2\alpha_{02}^* & \alpha_{01}^* & -P_1\\ \alpha_{11}^* & \alpha_{10}^* & -P_2\\ P_1 & M & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2\alpha_{02}^* & \alpha_{11}^* & -P_1\\ \alpha_{11}^* & 2\alpha_{20}^* & -P_2\\ P_1 & P_2 & 0\end{vmatrix}}=\frac{P_1\left(\alpha_{10}^*P_1-\alpha_{10}^*P_2\right)-M\left(\alpha_{11}^*P_1-2\alpha_{02}^*P_2\right)}{2\left(-\alpha_{11}^*P_1P_2+\alpha_{20}^*P_1^2+\alpha_{02}^*P_2^2\right)} \qquad (10)$$

Спрос на продукт x_2 равен нулю при $P_1\left(\alpha_{10}^*P-\alpha_{10}^*P_2\right)=M\left(\alpha_{11}^*P_1-2\alpha_{02}^*P_2\right)$ и положителен при положительном числителе в формуле (10) и выполнении условия (10).

$$\lambda(P_1,P_2,M)=\frac{\begin{vmatrix}2\alpha_{02}^* & \alpha_{11}^* & \alpha_{01}^*\\ \alpha_{11}^* & 2\alpha_{20}^* & \alpha_{10}^*\\ P_1 & P_2 & M\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2\alpha_{02}^* & \alpha_{11}^* & -P_1\\ \alpha_{11}^* & 2\alpha_{20}^* & -P_2\\ P_1 & P_2 & 0\end{vmatrix}}=$$

$$=\frac{P_1\left(\alpha_{11}^*\alpha_{10}^*-2\alpha_{20}^*\alpha_{01}^*\right)-P_2\left(2\alpha_{02}^*\alpha_{10}^*-\alpha_{11}\alpha_{01}^*\right)+M\left(4\alpha_{02}^*\alpha_{20}^*-\alpha_{11}^{*\,2}\right)}{2\left(-\alpha_{11}^*P_1P_2+\alpha_{20}^*P_1^2+\alpha_{02}^*P_2^2\right)} \qquad (11)$$

Предельные полезности $\lambda>0$, как следует из условия Куна-Таккера, при $x_1>0$ и $x_2>0$ будут при

$$M\left(4\alpha_{02}^*\alpha_{20}^*-2\alpha_{11}^{*\,2}\right)+P_1\left(\alpha_{11}^*\alpha_{10}^*-2\alpha_{20}^*\alpha_{01}^*\right)>P_2\left(2\alpha_{02}^*\alpha_{10}^*\right) \qquad (12)$$

и при выполнении условия (9). Если при заданных ценах и бюджете получаем что одна из величин x_1 или x_2 оказывается отрицательной, то полученное решение не является допустимым набором благ, не говоря уже об его оптимальности.

Проверку адекватности найденной функции полезности для целей прогноза можно осуществить на основании первого соотношения для функции спроса [3,6], а именно

$$P_1\left(\frac{\partial x_j}{\partial P_1}\right)_{comp}+P_2\left(\frac{\partial x_j}{\partial P_2}\right)_{comp}+\ldots+P_n\left(\frac{\partial x_j}{\partial P_n}\right)_{comp}=0,\quad j=\overline{1,n} \qquad (13)$$

что для функций (8) и (10) сведется к проверке двух уравнений для функции спроса $x_1(P_1,P_2,M)$ и $x_2(P_1,P_2,M)$ [3,6]

$$\begin{aligned}P_1\left(\frac{\partial x_1}{\partial P_1}\right)_{comp}&+P_2\left(\frac{\partial x_1}{\partial P_2}\right)_{comp}=0\\ P_1\left(\frac{\partial x_2}{\partial P_2}\right)_{comp}&+P_2\left(\frac{\partial x_2}{\partial P_2}\right)_{comp}=0\end{aligned} \qquad (14)$$

Аналогичные условия проверки адекватности можно получить при известных ценах на основе условий агрегации Курно [3,6].

 ISBN 7-776-8361-7

Заключение.

Данные из статистических отчетов по душевому потреблению продуктов, их ценам и бюджету потребителя позволяют построить функцию полезности потребителя и, используя ее, найти функцию спроса и прогнозировать спрос на соответствующие товары.

The analysis of an opportunity of construction of function of utility on the accounting data on to the consumer, prices and budget of the consumer is given. The method of check of adequacy of functions of utility on functions of demand received from function of utility is considered.

1. Марасанов В.В., Забытовская О.И. Модель предметной области экспертной системы прогнозирования спроса. Херсон.: Вестник ХНТУ № 24, 2006г., с. 122-126.
2. В.В. Марасанов, О.И. Забытовская, Е.В. Щербина Использование энтропии при анализе систем с максимальной полезностью. Херсон.: Вестник ХНТУ № 24, 2006г., с. 127-131.
3. Гамецкий А.Ф., Соломон Д.И. Математическое моделирование микроэкономических процессов. Кишинэу: Штиинца, 1996г.
4. Маленво Э. Лекции по микроэкономическому анализу. М.: Наука, 1985г.
5. С.Сирл, У. Госман. Матричная алгебра в экономике. М.: «Статистика», 1974г.
6. Забытовская О.И. Изменение функции спроса потребителя при изменении цен и дохода при известной и неизвестной функции полезности. В сб. Проблемы информационных технологий №2, 2007г.
7. Статистичний щорічник (2002, 2003, 2004, 2005, 2006рр.) Херсонське обласне управління статистики.

УДК 681.51

КЕРОВАНИЙ ДЕТЕКТОР ІМПУЛЬСНОГО ЯКР СПЕКТРОМЕТРА

Браїловський В.В., Іванчук М.М., Ватаманюк П.П., Танасюк В.С.

Постановка задачі

При обробці сигналу відгуку імпульсного ЯКР спектрометра існує серйозна проблема – безпосередньо після завершення зондуючого імпульсу в системі контурів спостерігаються незавершені перехідні процеси [1,2]. При амплітуді зондуючого сигналу ~ 1000 В спостерігається залишкова величина "дзвону" робочого контуру ~ 1..20 мВ. В той же час корисний сигнал (сигнал відгуку ЯКР) має рівень ~ 1..100 мкВ. Як наслідок, в період часу реєстрації сигналів приймальна частина спектрометра знаходиться під впливом перехідних процесів, що приводить до часткової втрати корисних сигналів відгуку ЯКР. Для пригнічення неінформативних сигналів застосовують електронні ключі, але навіть найкращі з них не можуть забезпечити необхідний рівень згасання ~ 120 дБ у закритому стані.

Висловлено ідею додаткової часової селекції корисних сигналів спектрометра за рахунок переривчатої роботи детектора. В даній роботі описано розроблений авторами керований детектор для виділення сигналів ЯКР – відгуку, який автоматично вмикається тільки в інформативні періоди часу в кожному циклі збудження – релаксації спінової системи досліджуваного зразка речовини.