УДК 519.6

ЯВЛЕНИЕ «СВЕРХСХОДИМОСТИ» В ЗАДАЧЕ ПРАНДТЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Хомченко А.Н., Колесникова Н.В.

Постановка проблемы. Описывая явление «сверхсходимости» в современных методах численного анализа, Дюпон и Дуглас [1] указывают на существование узлов, в которых имеет место неограниченная точность. Феномен «сверхсходимости» в настоящее время тщательно изучается. Применение «суперузлов» резко сокращает объем вычислений, обеспечивая при этом высокую точность результатов. Определить достаточное количество таких узлов и их расположение довольно сложно. Примеров успешного решения этой проблемы пока совсем мало, поскольку явление редкое и отчетливо проявляется лишь в исключительных случаях, которые авторы [1] называют специальными. В настоящей работе описан именно такой специальный случай. Для иллюстрации явления «сверхсходимости» мы рассматриваем задачу о кручении призматического стержня с эллиптическим поперечным сечением. Эта задача при помощи функции напряжений Прандтля сводится к задаче Дирихле для уравнения Пуассона со специальной правой частью и однородным граничным условием на контуре эллипса. В такой постановке легко перейти к задаче Дирихле для уравнения Лапласа с неоднородным граничным условием.

Анализ предшествующих публикаций, постановка задачи. Существуют две теории кручения стержней некругового сечения. Одна из них была развита французским механиком Сен-Венаном (1797–1886), другая – немецким гидроаэромехаником Прандтлем (1875–1953). Обе теории обсуждаются в работе [2]. Наиболее ярким примером изобретательного использования узлов повышенной точности являются формулы приближенного интегрирования Гаусса-Лежандра [3]. Существование суперузлов на эллипсе и других контурах впервые было обнаружено экспериментально [4, 5]. Задача целенаправленного поиска узлов сверхсходимости наиболее актуальна для несеточных методов [6]. Благодаря известным аналогиям [7] Прандтля, Буссинеска, Томсона и Тэта, Гринхиля установлены связи задачи о кручении призматического стержня с другими задачами механики, электростатики, гидродинамики. В начале 50-х годов XX столетия американский математик Дж. Дуб установил, что модель кручения призматического стержня пригодна для хронометрирования в среднем случайных блужданий в замкнутой области.

Цель работы – установить количество и расположение узлов «сверхсходимости» на контуре эллипса. Показать, что суперузлы являются эффективным средством упрощения алгоритма и минимизации объема вычислений. Сопоставить упрощенный подход с известными решениями данной задачи методами конечных элементов и граничных элементов.

Основная часть. Задача о кручении призматического стержня произвольного поперечного сечения [8, 9] сводится к отысканию функции напряжений Прандтля $U(x, y)$ как решения уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \tag{1}$$

с нулевым граничным условием

$$U(x, y)\big|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

При решении такой задачи неоднородность уравнения (1) часто переносят в граничное условие с помощью замены

$$U = W - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,. \tag{3}$$

Такая замена сводит задачу (1) – (2) к отысканию решения уравнения Лапласа (гармонической функции)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

с граничным условием

$$W(x,y)\big|_{\Gamma} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,. \tag{5}$$

Переход к задаче Дирихле для уравнения Лапласа относительно функции $W(x,y)$ позволяет применять различные приемы усреднения граничных потенциалов. Через функцию Прандтля (3) определяются касательные напряжения в поперечном сечении

$$\tau_{xz} = G\theta \frac{\partial U}{\partial y}\,;\;\; \tau_{yz} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial x}\,,$$

где G – модуль сдвига материала; θ – относительный угол закручивания (крутка). Крутящий момент выражается через функцию Прандтля следующим образом

$$M_z = 2G\theta \iint\limits_{\Omega} U(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{6}$$

Важной характеристикой здесь является геометрическая жесткость при кручении

$$I = 2\iint\limits_{\Omega} U(x,y)\,dx\,dy\,. \tag{7}$$

Эта величина, как правило [9], более чувствительна к погрешностям метода, нежели функция Прандтля.

Рассмотрим задачу о кручении стержня постоянного поперечного сечения в форме эллипса с полуосями a и b. В этом случае задача имеет точное аналитическое решение

$$U(x,y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), \tag{8}$$

что очень важно для сопоставления различных подходов. С точки зрения геометрии «холма» Прандтля – функция (8) представляет собой перевернутый эллиптический параболоид с вершиной $\left(0;0;\dfrac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\right)$, «натянутый» на эллиптический контур поперечного сечения. Это означает, что точность решения (8) зависит от точности вычисления только одной (максимальной) аппликаты в центре сечения. Из формул (3), (4), (5) следует, что высота «холма» Прандтля определяется усреднением граничных значений гармонической функции $W(x,y)$. Формула (7) определяет удвоенный объем «холма» Прандтля. Благодаря замечательному свойству параболоида можно предложить простую формулу для геометрической жесткости

$$I = U_0 \cdot S\,, \tag{9}$$

где U_0 – высота «холма» в центре сечения, S – площадь сечения. Для сечений в форме круга и эллипса формула (9) абсолютно точна. На других сечениях появляются погрешности, вызванные искажениями поверхности параболоида вблизи контура сечения.

 ISBN 7-776-8361-7

Для иллюстрации феномена «сверхсходимости» рассмотрим эллиптическое сечение с размерами $a = 2$, $b = 1$. В работе [9] функция Прандтля и геометрическая жесткость такого сечения определяются методами конечных и граничных элементов. На рис. 1 представлена дискретизация поперечного сечения сеткой конечных элементов. Общее число элементов – 48, общее число узлов – 33, из них 17 внутри области и 16 на границе. Эти же 16 граничных узлов используются в методе граничных элементов. Поиск узлов «сверхсходимости» иллюстрирует рис. 2.

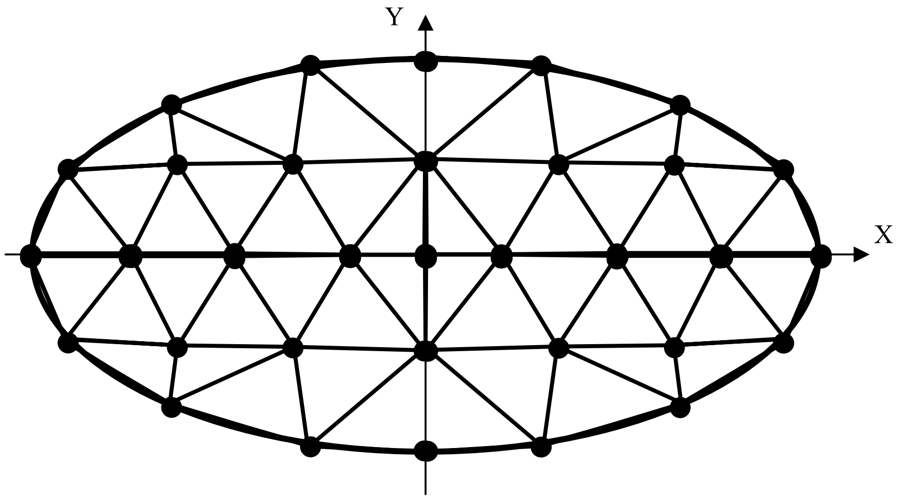

Рис. 1 Дискретизация эллипса сеткой конечных элементов

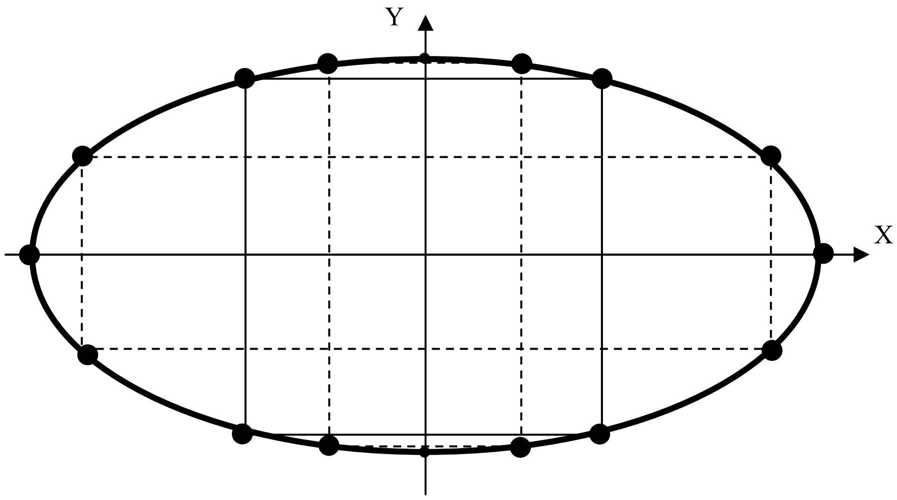

Рис. 2 К поиску «суперузлов» на границе области

В работе [9] приведены следующие значения максимальной высоты «холма» Прандтля: по МКЭ получено $U_0 = 0{,}793$, по МГЭ – $U_0 = 0{,}791$. Точное значение (при $a = 2$, $b = 1$) $U_0 = 0{,}8$. Заметим, что точное значение U_0 можно получить гармоническим усреднением двух экстремальных граничных значений гармонической функции в вершинах эллипса. Из этого следует, что каждая четверть эллиптической границы содержит точку (узел «сверхсходимости»), в которой граничное значение в точности равно гармоническому среднему экстремальных граничных значений. Понятно, что каждое промежуточное значение из области изменения гармонической функции на границе повторяется в 4 узлах – вершинах вписанного прямоугольника (рис. 2). Вершины прямоугольников находятся в точках пересечения окружностей $x^2 + y^2 = \rho^2$ $(1 < \rho < 2)$ с контуром эллипса. Каждый прямоугольник является простым вычислительным шаблоном для определения U_0. При этом шаблоны, вытянутые вдоль малой оси эллипса, занижают результат, остальные (кроме одного) – завышают. Легко установить, что в этой бесконечной серии только один шаблон (квадрат, вписанный в эллипс) дает точный результат $U_0 = 0{,}8$.

Интересно, что квадрат радиуса окружности, описанной около квадратного шаблона, равен среднему гармоническому квадратов радиусов вписанной ($r = 1$) и описанной ($R = 2$) окружностей. Иначе говоря, в бесконечной серии концентрических окружностей существует одна «среднегармоническая» в смысле площади круга. Она и определяет узлы «сверхсходимости», позволяющие реализовывать простую процедуру гармонического усреднения граничных значений. Важно отметить, что добавление новых расчетных узлов на контуре не улучшает результат. Фактически, достаточно одного узла.

В заключение сопоставим точное значение геометрической крутильной жесткости (7) с приближенными оценками, полученными в [9] и настоящей работе:

$$I = \begin{cases} 5{,}026 & - \textit{точное значение}, \\ 4{,}560 & - \textit{конечные элементы}, \\ 4{,}487 & - \textit{граничные элементы}, \\ 5{,}026 & - \textit{гармоническое усреднение}. \end{cases}$$

Выводы. В несеточных алгоритмах для решения граничных задач важную роль играют узлы повышенной точности, образующие простые и удобные вычислительные шаблоны. При этом качество расчетных узлов (удачное расположение) гораздо важнее их количества. Представляет интерес поиск узлов «сверхсходимости» на эллипсоиде в трехмерной задаче типа Прандтля для уравнения Пуассона.

The algorithm of search of points of superconvergence in procedure of harmonious averaging boundary potentials is described.

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов.– М.: Мир, 1977.– 349 с.
2. Fung Y.C. Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1965.– P. 162–170.
3. Сегерлинд Л. Применения метода конечных элементов.– М.: Мир, 1979.– 392 с.
4. Хомченко А.Н. Случайные блуждания и конечноэлементные аппроксимации температурных полей // Матем. модели, методы решения и оптимального проектиров. гибких пластин и оболочек: Межвуз. сб. науч. тр.–Саратов: СПИ, 1988.– С. 80–82.
5. Хомченко А.Н. Вероятностные модели и алгоритмы вычислительной механики для областей сложной геометрии // Респ. конф. «Эффектив. числ. методы решения краевых задач механики твердого деформируемого тела»: Тез. докл.– Харьков: ХИСИ, 1989.– С. 137–138.
6. Лур'є І.А., Хомченко А.Н. Вузли суперзбіжності та спосіб обертання симплекса// Крайові задачі для дифер. рівнянь: Зб. наук. пр.– К.: Ін-т математики НАНУ, 1998.– С. 201–204.
7. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах. Том 1.– М.: Машиностроение, 1968.– 831 с.
8. Prandtl L. Zur Torsion von prismatischen Staben. Phys. Zcitschr., 4, 1903.– S. 758–759.
9. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике.– М.: Мир, 1982.– 248 с.

 ISBN 7-776-8361-7