

# ВИШУКУВАННЯ, ПРОЕКТУВАННЯ ДОРІГ ТА ПЕРЕХОДІВ ЧЕРЕЗ ВОДОТОКИ

УДК 627.13:519.711.3

Славінська О.С., д.т.н.

## ДОСЛІДЖЕННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ПРИДОННІЙ ОБЛАСТІ РУСЛОВИХ ТА ЗАПЛАВНИХ ПОТОКІВ У ЗОНІ ВПЛИВУ МОСТОВИХ ПЕРЕХОДІВ

**Анотація.** В статті представлено метод розрахунку гідродинамічних характеристик придонної області руслових та заплавних потоків у зоні впливу мостових переходів, ґрунтуючись на положеннях механіки неоднорідних середовищ. В рамках дискретної концепції, отримано математичну модель для придонної області руслового потоку, яка окремо описує: рух твердої фази та рух рідкої фази в комплексі з замикаючими рівняннями, що враховують стан потоку та інерційність руслових структур. Для заплавних ділянок запропоновано систему рівнянь, яка враховує наявність зависі та вплив опору від рослинності на динаміку потоку.

**Ключові слова:** русло, заплава, потік.

**Аннотация.** В статье представлено метод расчета гидродинамических характеристик придонной области русловых и пойменных потоков в зоне влияния мостовых переходов, основываясь на положениях механики неоднородных сред. В рамках дискретной концепции получено математическую модель для придонной области руслового потока, которая отдельно описывает: движение твердой фазы и движение жидкой фазы в комплексе с замыкающими уравнениями, учитывающих состояние потока и инерционность русловых структур. Для пойменных потоков предложено систему уравнений, учитывающих наличие взвеси и влияние сопротивления от растительности на динамику потока.

**Ключевые слова:** русло, пойма, поток.

**Abstract.** The method of hydrodynamical characteristics calculation in bottom area of channel and floodplain flow in the zone of bridges influence, based on the

provisions of the mechanics of inhomogeneous medium is presented in article. On the concept discrete, received a mathematical model for the river bottom area of channel flow, which apart described: the movement of solid phase; movement of the liquid phase together with the closure equations that take into account the state of flow and the lag of river bed structures. For rivers floodplain areas proposed system of equations, which depends on the suspension presence and resistance depend from of vegetation on the flow dynamics.

**Keywords:** channel, floodplain, stream.

**Постановка проблеми.** На сьогоднішній день одним із ключових моментів на шляху вирішення проблеми забезпечення надійності і довговічності мостових споруд є всебічне вивчення механізму їх взаємодії з відкритим річковим потоком та розвиток відповідної теоретичної бази, що дозволить прогнозувати наслідки різних стихійних катастроф, розробляти план заходів з метою їх уникнення, а також дасть можливість підвищити науково-інженерний рівень проектів будівництва та реконструкції мостів.

Основою для правильного призначення необхідних розмірів споруд мостового переходу є прогнози можливого притоку води до мосту і неминучих руслових деформацій: загальних, величина яких обумовлена загальним стисненням водотоку і природним ходом руслового процесу, та місцевих розмивів, що є результатом локального порушення структури річкового потоку при обтіканні конструкцій інженерних споруд.

При розробці методів розрахунку деформацій в зоні впливу мостових переходів необхідно враховувати складну специфіку зависених природних потоків. Двофазний потік на відміну від однорідного характеризується: відповідними кожній з фаз усередненими та пульсаційними швидкостями, силами міжфазової взаємодії, зовнішніми для кожної фази та внутрішніми для всього потоку; додатковими ефективними напруженнями, які виникають за рахунок контактної взаємодії твердих часток між собою та дном; впливом анізотропних властивостей турбулентного стану природних русел. Обов'язково слід враховувати відмінності течії в руслових потоках – основного ядра та придонної області, де має місце чітке розмежування між дисперсною фазою, частками наносів, та несним середовищем – водним потоком.

Зона впливу мостового переходу, відповідно, розповсюджується не тільки в руслі річки, а й на заплавної частині. При цьому суттєво те, що витрата

заплавного потоку може перевищувати руслову. Поверхня заплави переважно покрита рослинністю, різною за густістю та розмірами заростей, що впливає на пропускну її здатність. Таким чином зона дослідження розвитку деформацій охоплює два постійно взаємодіючі зависенесні потоки з різною шорсткістю.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Дослідженню руху наносів присвячено велика кількість робіт [1-5]. При побудові теорій руху зважених наносів, як правило, вводиться цілий ряд припущень, головне з яких – заміна дискретної сукупності рухомих частинок деяким фіктивним суцільним середовищем змінної густини. З погляду можливостей інженерного розрахунку найбільш поширеною є дифузійна теорія руху зважених наносів [6]. Але ця теорія не може бути застосована для рішення задачі про витрату наносів, що переносяться в придонній області, також в цій теорії виключені з розгляду основні чинники механізму турбулізації потоку.

Визначення ж пропускної здатності та глибини розмиву на заплаві, спираючись на обмежені емпіричні рішення задачі у вигляді коефіцієнтів Манінга та Шезі [7], не може бути достатньо прийнятним.

Таким чином, **мета роботи** полягає в розробці методів прогнозування деформацій руслових та заплавних потоків в зоні впливу мостових переходів, ґрунтуючись на теорії неоднорідних потоків, яка дозволить врахувати особливості гідродинамічних процесів, що відбуваються в зависенесному середовищі.

**Отримані наукові результати.** На основі методу просторового усереднення [8, 9], шляхом переходу від мікрорівнянь до макрорівнянь, в рамках дискретної концепції отримано математичну модель для придонної області русла, яка складається в системі координат  $Ox_1X_3$

- з рівнянь для дисперсної фази

$$\frac{\partial \bar{\rho}_s}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_3}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_z}{\partial x_3} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}_1 \bar{\rho}_s}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_1 \tilde{W}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_3 \tilde{W}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_z \tilde{W}_1}{\partial x_3} = - \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_1 \tilde{W}_3''}{\partial x_3} + \alpha_m (\tilde{F}_{D1} + \tilde{F}_{L1} + \tilde{F}_{\omega 1}), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}_3 \bar{\rho}_s}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_1 \tilde{W}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_1 \tilde{W}_z}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_3 \tilde{W}_3}{\partial x_3} - 2 \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_3 \tilde{W}_z}{\partial x_3} + \frac{\partial \bar{\rho}_s \tilde{W}_z \tilde{W}_z}{\partial x_3} = - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \bar{\rho}_s (\overline{W_3^2} + (\overline{W_3^2})_{imp}) \right) - \alpha_m \bar{F}_{GS} + \alpha_m (\tilde{F}_{D3} + \tilde{F}_{L3} + \tilde{F}_{\omega 3}), \quad (3)$$

- з рівнянь для несного середовища

$$\frac{\partial \bar{\rho}_L}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_3}{\partial x_3} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_1}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_1 \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_3 \tilde{V}_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu_{LS} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \bar{\rho}_L \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_3} - (1 - \alpha_m C_m / a_s) \times$$

$$\times (\tilde{F}_{D1} + \tilde{F}_{L1} + \tilde{F}_{\omega 1}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_3}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_1 \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \bar{\rho}_L \tilde{V}_3 \tilde{V}_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu_{LS} \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \bar{\rho}_L \overline{V_3^2}}{\partial x_3} - \alpha_m \frac{C_m}{a_s} F_{GS} - F_{GL} -$$

$$-(1 - \alpha_m C_m / a_s) (\tilde{F}_{D3} + \tilde{F}_{L3} + \tilde{F}_{\omega 3}), \quad (6)$$

де  $t$  – час;  $x_1, x_3$  – координати, відповідно у поздовжньому та вертикальному напрямках;  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_3, \tilde{W}_1, \tilde{W}_3$  – усереднені складові швидкостей несного середовища та множини часток наносів;  $\tilde{W}_z$  – гідравлічна крупність часток наносів;  $p$  – гідродинамічний тиск,  $\mu_{SL}$  – динамічна в придонному шарі руслового потоку  $\mu_{SL} = \mu_L (1 + 1,5\bar{S}) / (1 - \bar{S})^2$  [10];  $C_m$  – коефіцієнт приєднаної маси [11];  $\bar{\rho}_s = \rho_s^o \bar{S}$  – маса множини часток, визначається на основі мутності потоку  $\bar{S}$ ;  $\rho_s^o$  – густина твердої частки;  $\bar{\rho}_L = \rho_L^o (1 - \bar{S})$  – густина несного середовища;  $\rho_L^o$  – густина води;  $\alpha_m = \left( 1 + \frac{C_m}{a_s} \right)^{-1}$ ;  $a_s = \rho_s^o / \rho_L^o$ ;  $\overline{V_1 V_3''}, \overline{V_3^2}$  – турбулентні напруги несного середовища, дотичні та нормальні;  $\overline{W_1 W_3''}, \overline{W_3^2}, (\overline{W_3^2})_{imp}$  – кореляції пульсацій твердої фази за рахунок впливу турбулентного стану несного середовища, та контактної взаємодії з дном.

Рівняння (1-6) – були отримані для придонного шару максимальною товщиною 10 діаметрів [4] часток, що рухаються стрибкоподібно і активно беруть участь у формуванні транспорту донних наносів. Складові швидкостей в рівняннях (1-6), а також в наступних моделях, усереднені з ваговою функцією (щільність і тиск усереднюються звичайним способом) [12]

$$\tilde{V}_i = \overline{\rho' \tilde{V}_i} / \bar{\rho}, \quad \tilde{V}_i'' = -\overline{\rho' \tilde{V}_i'} / \bar{\rho}, \quad \rho' \neq 0, \quad \overline{\rho' \tilde{V}_i''} = 0, \quad \overline{\rho' \tilde{V}_i} = \overline{\rho' (\tilde{V}_i + V_i)}. \quad (7)$$

Це дозволило отримати більш спрощену форму рівнянь переносу, оскільки для дисперсної фази та для несного середовища кореляції швидкості та мутності фігурують у неявному вигляді.

Зазвичай для розрахунку пристінних потоків використовується теорія межового шару. Але, згідно експериментальних даних, розглянутих в роботі [13], в придонному шарі руслового потоку має місце повне злиття в'язкого та нев'язкого потоків. В рівняннях (2-3), (5-6) прийнята оцінка мализни складових в наближенні до тонкого шару [12], де в'язкі члени та другі кореляційні моменти з похідними у поздовжньому напрямку ігноруються, а у вертикальному – лишаються. Це дає можливість розраховувати відривні та зворотні течії в придонній області, які виникають при пасмовій структурі дна

В рівняннях (2-3), (5-6) враховані

- проекції сили тяжіння з врахуванням дії сили Архімеда, відповідно, для рідкої та твердої фази

$$\bar{F}_{GL} = (\bar{\rho}_L + \bar{\rho}_S/a_S)g, \quad (8)$$

$$\bar{F}_{GS} = (\bar{\rho}_S - \bar{\rho}_S/a_S)g; \quad (9)$$

- сила приєднаних мас за припущенням, що приєднана рідина рухається зі швидкістю часток наносів  $F_m = C_m \frac{d\bar{W}}{dt} \frac{\rho_S}{a_S}$ ;

- сили міжфазної взаємодії  $\tilde{F}_{Di}, \tilde{F}_{Li}, \tilde{F}_{oi}$ :

складові сили опору руху, яка утворена тиском та силами тертя в'язкого придонного шару

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{D1} = \varphi_{Di} \varphi_{DS} & \left( (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) \bar{\rho}_S (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) + \frac{2}{3} \gamma_{D2} \bar{\rho}_S \bar{U}_r^{-2} \left( (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) (\bar{V}_1^2 - 2\bar{V}_1 \bar{W}_1'' + \bar{W}_1^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3) (\bar{V}_1 \bar{V}_3'' - \bar{V}_1 \bar{W}_3'' - \bar{V}_3 \bar{W}_1'' + \bar{W}_1 \bar{W}_3'') \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{D3} = \varphi_{Di} \varphi_{DS} & \left( (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3 + \tilde{W}_z) \bar{\rho}_S (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) + \frac{2}{3} \gamma_{D2} \bar{\rho}_S \bar{U}_r^{-2} \left( (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) (\bar{V}_1 \bar{V}_3'' - \bar{V}_1 \bar{W}_3'' - \bar{V}_3 \bar{W}_1'' + \bar{W}_1 \bar{W}_3'') + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3 + \tilde{W}_z) (\bar{V}_3^2 - 2\bar{V}_3 \bar{W}_3'' + \bar{W}_3^2) \right) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

підйомна сила, яка обумовлена головним чином підвищенням по направленню від дна поздовжньої швидкості, яка несиметрично омиває частки наносів

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{L1} = & \gamma_L \tilde{U}_r \bar{\rho}_S \left( \frac{(\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3 + \tilde{W}_z)}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_1^{\tilde{r}}}}{\partial x_3} \left( 1 - \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11} + C_{i1}^* \varphi_{11}} \right) \frac{1}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\bar{1}}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3 V_1''}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial V_1^{\tilde{r}}}{\partial x_3} \right) - \omega_{2s}'' V_1'' - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial V_3 V_1''}{\partial x_1} \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11} + C_{i1}^* \varphi_{31}} - \frac{\partial V_1^{\tilde{r}}}{\partial x_3} \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11} + C_{i1}^* \varphi_{11}} \right) + \omega_{2s}'' W_1'' \right) \right) - \right. \\
& \left. - \frac{(\overline{V_1 V_3''} - \overline{V_1 W_3''} - \overline{V_3 W_1''} + \overline{W_1 W_3''})}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)^2} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) + \frac{1}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_3} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{13}} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3^{\tilde{r}}}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1 V_3''}{\partial x_3} \right) - \omega_{2s}'' V_3'' - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \overline{V_3^{\tilde{r}}}}{\partial x_1} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{33}} - \frac{\partial V_1 V_3''}{\partial x_3} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{13}} \right) + \omega_{2s}'' W_3'' \right) \right), \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\tilde{F}_{L3} = \gamma_L \tilde{U}_r \bar{\rho}_S \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \left( 1 - \frac{(\overline{V_1^{\tilde{r}} - 2\overline{V_1 W_1''} + \overline{W_1^{\tilde{r}}}})}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)^2} \right); \quad (13)$$

- сила Магнуса, що може суттєво впливати на динаміку руху часток, які обертаються в процесі сальтації, оскільки її величину можна порівнювати з величиною сили опору [11]

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{\omega 1} = & \gamma_{\omega} \bar{\rho}_S \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3 + \tilde{W}_z) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3^{\tilde{r}}}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_1 V_3''}{\partial x_3} \right) - \omega_{2s}'' V_3'' + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial V_3^{\tilde{r}}}{\partial x_1} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{33}} - \frac{\partial V_1 V_3''}{\partial x_3} \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{13}} \right) - \omega_{2s}'' W_3'' \right], \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{\omega 3} = & \gamma_{\omega} \bar{\rho}_S \left[ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3 V_1''}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_1^{\tilde{r}}}}{\partial x_3} \right) - \omega_{2s}'' V_1'' + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_3 V_1''}{\partial x_1} \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11} + C_{i1}^* \varphi_{31}} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_1^{\tilde{r}}}}{\partial x_3} \frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11} + C_{i1}^* \varphi_{11}} \right) - \omega_{2s}'' W_1'' \right], \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\text{де } \gamma_{D1} = \frac{12 C_{\Phi 2} \tilde{U}_r}{C_{\Phi 1} a_s D \tilde{Re}_s},$$

$$\gamma_{D2} = \frac{2 C_{\Phi 2} \tilde{U}_r}{C_{\Phi 1} a_s D \tilde{Re}_s^{1/3}},$$

$$\tilde{U}_r = \sqrt{\sum_{i=1,2,3} (\tilde{V}_i - \tilde{W}_i + \delta_{i3} \tilde{W}_z)^2},$$

$U_r$  – швидкість відносного руху фаз,

$\delta_{i3}$  – символ Кронекера,

$C_{\phi 1}$  – перший коефіцієнт форми частки,

$D$  – діаметр частки,

$C_{\phi 2}$  – другий коефіцієнт форми частки,

$Re_s = DU_r \rho_L / \mu_{SL}$ , поправкові коефіцієнти на нестационарність  $\varphi_{Dr} = 1,1 \div 1,2$  та на

вплив інших часток, що рухаються поруч [9],  $\varphi_{Ds} = (1 - \beta_s)^{-1}$ ,  $\beta_s = \frac{3}{2} \frac{(\bar{S}^{1/3} - \bar{S})}{1 - \bar{S}}$  [9];

$\gamma_L = \frac{23}{20} \frac{C_{\phi 2}}{C_{\phi 1} a_s}$ ,  $\gamma_{\omega} = \frac{C_{\omega}}{C_{\phi 1} a_s}$ ,  $C_{\omega} = 0,4$  – коефіцієнт підйому від сили обертання [11];

$\omega_{js}$  – кутова швидкість частки, коефіцієнти  $\gamma_{11}, \gamma_{33}, C_{i1}^*, \varphi_{11}, \varphi_{13}, \varphi_{33}, \varphi_{31}$  та кореляційні моменти  $\overline{\omega_{2s}'' V_1''}, \overline{\omega_{2s}'' V_3''}, \overline{\omega_{2s}'' W_1''}, \overline{\omega_{2s}'' W_3''}$  представлені далі в формулах (22-26).

Для опису динамічної взаємодії фаз, під впливом сил  $\tilde{F}_{Li}, \tilde{F}_{oi}$ , отримано рівняння для поперечної складової кутової швидкості часток наносів  $\omega_{Si}$  на основі Лагранжевого рівняння обертального руху одиночної сферичної частки [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\rho_s \tilde{\omega}_{s2}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho_s \tilde{\omega}_{s2} \tilde{W}_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\rho_s \tilde{\omega}_{s2} \tilde{W}_3}}{\partial x_3} - \frac{\partial \overline{\rho_s \tilde{\omega}_{s2} \tilde{W}_z}}{\partial x_3} = - \frac{\partial (\overline{\rho_s \omega_{s2}'' W_3''})}{\partial x_3} - \\ - \beta_{\omega} \overline{\rho_s} \left( \tilde{\omega}_{s2} + \frac{15}{40} \left( \frac{\partial \beta_s^* \tilde{U}_{r3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta_s^* \tilde{U}_{r1}}{\partial x_3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} \right) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

де кутові швидкості,  $\tilde{\Omega}_{Ur2} = \frac{15}{40} \left( \frac{\partial \beta_s^* \tilde{U}_{r3}}{\partial x_1} - \frac{\partial \beta_s^* \tilde{U}_{r1}}{\partial x_3} \right)$  міжфазної взаємодії,

$\beta_s^* = \frac{\bar{S}^{1/3} - \bar{S}}{1 - \beta_s}$  коефіцієнт;  $\beta_{\omega} = \frac{\mu_{SL}}{\rho_{SL}} \frac{10\pi}{a_s C_{\phi 1} D^2}$  – величина, яка зворотна часу обертальної

релаксації частки.

Для розрахунку усереднених характеристик турбулентності руслових потоків розроблено пристосовану до умов придонної області замикаючу  $k - \varepsilon$  модель турбулентності несного середовища в системі координат  $Ox_1 X_3$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{Li}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}_1 K_{Li}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_3 K_{Li}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\mu_{SL}}{\rho_L} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{K_{Li}}{\rho_L} \right) + \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K_{Li}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{\mu_{SL}}{\rho_L} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{K_{Li}}{\rho_L} \right) + \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K_{Li}}{\partial x_3} \right], \quad (17) \\ - \left( \overline{\rho_L V_1^2} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} - \left( \overline{\rho_L V_1 V_3''} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} - \left( \overline{\rho_L V_3 V_1''} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \left( \overline{\rho_L V_3^2} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} - E_{Li} - \left( 1 - \frac{\alpha_m C_m}{a_s} \right) \left( \overline{V_1'' F_1''} + \overline{V_3'' F_3''} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}_1 \varepsilon_{L_t}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_3 \varepsilon_{L_t}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( v_{SL} \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_{SL} \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_3} \right) + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( v_{SL} \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_{SL} \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_3} \right) \right] + \\
& + C_{\varepsilon 4} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{k_{L_t}}{\varepsilon_{L_t}} \left( \overline{V_1 V_1''} \right) \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{k_{L_t}}{\varepsilon_{L_t}} \left( \overline{V_1 V_3''} \right) \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{k_{L_t}}{\varepsilon_{L_t}} \left( \overline{V_3 V_1''} \right) \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{k_{L_t}}{\varepsilon_{L_t}} \left( \overline{V_3 V_3''} \right) \frac{\partial \varepsilon_{L_t}}{\partial x_3} \right] \right) - \\
& - C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{L_t}}{k_{L_t}} \left( \left( \overline{V_1 V_1''} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \left( \overline{V_1 V_3''} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} + \left( \overline{V_3 V_1''} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \left( \overline{V_3 V_3''} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} \right) - C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{L_t}}{k_{L_t}} \left[ \varepsilon_{L_t} - 2v_{SL} \left( \frac{\partial \sqrt{k_{L_t}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sqrt{k_{L_t}}}{\partial x_3} \right)^2 \right] + \\
& + C_{\varepsilon 5} v_{SL} \frac{k_{L_t}}{\varepsilon_{L_t}} \left\{ \left( \overline{V_1''} \right) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] + \left( \overline{V_1 V_3''} \right) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3^2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_3^2} \right) \right] + \left( \overline{V_3 V_1''} \right) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3 \partial x_1} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_3 \partial x_1} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] + \left( \overline{V_3''} \right) \left[ \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3^2} \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3^2} \right) + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_3^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_3 \partial x_1} + \frac{\partial^2 \tilde{V}_3}{\partial x_3^2} \right) \right] \left. \right\} - 2v_{SL} \left( 1 - \alpha_m \frac{C_m}{a_s} \right) \left[ \frac{\partial f_1''}{\partial x_1} \frac{\partial V_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1''}{\partial x_3} \frac{\partial V_1''}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3''}{\partial x_1} \frac{\partial V_3''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3''}{\partial x_3} \frac{\partial V_3''}{\partial x_3} \right].
\end{aligned} \tag{18}$$

де  $K_{L_t} = \rho_L \tilde{k}_{L_t}$  – кінетична енергія турбулентності несного середовища;  $E_{L_t} = \rho_L \tilde{\varepsilon}_{L_t}$  – швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентності;  $f_{\varepsilon 2}$  [13] – функція зміни числа Рейнольдса;  $\sigma_K$ ,  $C_{\varepsilon 1}$ ,  $C_{\varepsilon 2}$ ,  $C_{\varepsilon 4}$ ,  $C_{\varepsilon 5}$  – константи [13];  $\left[ \frac{\partial f_1''}{\partial x_1} \frac{\partial V_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1''}{\partial x_3} \frac{\partial V_1''}{\partial x_3} + \frac{\partial f_3''}{\partial x_1} \frac{\partial V_3''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3''}{\partial x_3} \frac{\partial V_3''}{\partial x_3} \right]$ ,  $(\overline{V_1 F_1''} + \overline{V_3 F_3''})$ , – додаткові дисипативні члени, який обумовлений наявністю сил міжфазної взаємодії.

Форма рівнянь переносу пульсаційних характеристик (17-18) придатна як для малих  $Re \rightarrow 0$  так і для великих  $Re \rightarrow \infty$  значень турбулентного числа Рейнольдса, зміна яких постійно відбувається в придонній області руслового потоку. Вираз для коефіцієнта турбулентної в'язкості має вид

$$v_{L_t} = C_{\mu} f_{\mu 1} K_{L_t}^2 / E_{L_t}, \tag{19}$$

де  $f_{\mu 1}$  – функція зміни числа Рейнольдса [13].

Для придонного шару функцію можна прийняти як константу  $C_{\mu} = 0,03 \div 0,09$  [14].

Алгебраїчні співвідношення для турбулентних напружень отримані на основі припущення про пропорційність їх переносу та енергії турбулентних пульсацій  $k_{L_t}$

- наприклад, для складової нормальних напружень

$$\frac{\overline{V_3''^2}}{k_{L_t}} = \frac{R_{33} + P_{33} - \varepsilon_{L_t 33} - \varepsilon_{St33}^*}{P - \varepsilon_{L_t} - \varepsilon_{St33}}, \tag{20}$$



$$\begin{aligned}
& \text{де } R_{33} = R_{33,1} + R_{33,2} + R_{33,1W} + R_{33,2W}; \quad R_{33,1} = -C_{R1} \frac{\varepsilon_{Lt}}{k_{Lt}} \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} - \frac{2}{3} k_{Lt} \right); \\
& R_{33,2} = -\frac{C_{R2} + 8}{11} \left( P_{33} - \frac{2}{3} P \right) - \frac{30C_{R2} - 2}{55} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} 2k_{Lt} \right) - \frac{8C_{R2} - 2}{11} \left( P_{33}^* - \frac{2}{3} P \right); \\
& R_{33,1W} = C_{R1,W} \frac{\varepsilon_{Lt}}{k_{Lt}} \left( -4\overline{V}_3^{\overline{\eta}} \eta_3 \right) \frac{k_{Lt}^{3/2}}{C_W \varepsilon_{Lt} x_3 \eta_3}; \quad R_{33,2W} = -C_{R2,W} 4R_{33,2} \eta_3 \frac{k_{Lt}^{3/2}}{C_W \varepsilon_{Lt} x_3 \eta_3}; \\
& P_{33}^* = -2 \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} - \left( \overline{V}_1 \overline{V}_3^{\overline{\eta}} + \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3}; \quad P_{33} = -2 \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} - \left( \overline{V}_1 \overline{V}_3^{\overline{\eta}} + \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1}; \\
& \varepsilon_{33} = \frac{2}{3} \varepsilon_{Lt} \left[ \left( 1 - f_s \right) + \frac{3}{2} \frac{\left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} + \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right)}{k_{Lt}} f_s \right]; \quad \varepsilon_{S133}^* = \left( 1 - \frac{C_m}{a_s} \alpha_m \right) 2\overline{V}_3^{\overline{\eta}} f_s^{\overline{\eta}}; \quad \varepsilon_{S133} = \left( 1 - \frac{C_m}{a_s} \alpha_m \right) \overline{V}_3^{\overline{\eta}} f_s^{\overline{\eta}};
\end{aligned}$$

- наприклад, для складової дотичних напружень

$$\frac{\overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}}}{k_{Lt}} = \frac{R_{31} + P_{31} - \varepsilon_{Lt31} - \varepsilon_{S131}^*}{P - \varepsilon_{Lt} - \varepsilon_{S131}} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& R_{31} = R_{31,1} + R_{31,2} + R_{31,1W} + R_{31,2W}; \quad R_{31,1} = -C_{R1} \frac{\varepsilon_{Lt}}{k_{Lt}} \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}}; \\
& R_{31,2} = -\frac{C_{R2} + 8}{11} P_{31} - \frac{30C_{R2} - 2}{55} k_{Lt} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \frac{8C_{R2} - 2}{11} P_{31}^*; \\
& R_{31,1W} = -\frac{3}{2} C_{R1,W} \frac{\varepsilon_{Lt}}{k_{Lt}} \left( \eta_1 \left( \overline{V}_1^{\overline{\eta}} + \overline{V}_1 \overline{V}_3^{\overline{\eta}} \right) + \eta_3 \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} + \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \right) \frac{k_{Lt}^{3/2}}{C_W \varepsilon_{Lt} x_3 \eta_3}; \\
& R_{31,2W} = -\frac{3}{2} C_{R2,W} \left( \eta_1 \left( R_{11,2} + R_{13,2} \right) + \eta_3 \left( R_{31,2} + R_{33,2} \right) \right) \frac{k_{Lt}^{3/2}}{C_W \varepsilon_{Lt} x_3 \eta_3}; \\
& P_{13}^* = -\left( \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} - \left( \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} \right) - \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1}; \quad P_{13} = -\left( \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \left( \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \left( \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} \right) - \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3}; \\
& \varepsilon_{13} = \frac{\varepsilon_{Lt}}{k_{Lt}} \left( \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} \right) + \left( \overline{V}_3 \overline{V}_1^{\overline{\eta}} \right) \right) f_s; \quad \varepsilon_{S131}^* = \left( 1 - \frac{C_m}{a_s} \alpha_m \right) \left( \overline{V}_3^{\overline{\eta}} f_{31}^{\overline{\eta}} + \overline{V}_1 f_{13}^{\overline{\eta}} \right); \quad \varepsilon_{S131} = \left( 1 - \frac{C_m}{a_s} \alpha_m \right) \overline{V}_1 f_{13}^{\overline{\eta}},
\end{aligned}$$

де  $P = -\overline{V_1^{\prime 2}} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} - \overline{V_1 V_3^{\prime 2}} \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \overline{V_3 V_1^{\prime 2}} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} - \overline{V_3^{\prime 2}} \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3}$  – член генерації турбулентної енергії;  $f_s$  – емпірична пристінна функція [13];  $R_{ik,1}, R_{ik,2}$  – члени, які визначають взаємодію пульсаційних складових швидкості між собою та взаємодію усереднених напруг тертя з пульсаційними складовими швидкості відповідно;  $R_{ik,1w}, R_{ik,2w}$  – функції, які залежать від конфігурації дна потоку, визначають вплив пасмової структури дна в межах розрахункової області [13]; зокрема параметри пасом визначаються через величину  $\eta_3 = \cos \frac{\Delta}{L}$ ,  $\Delta$  – висота донних форм,  $L$  – довжина донних форм, які визначаються в залежності від швидкісної структури потоку, середнього діаметру донних часток [1, 15];  $\varepsilon_{ik}$  дисипативний член за рахунок сил міжфазної взаємодії;  $C_{R1}, C_{R2}, C_{R1,w}, C_{R2,w}, C_w$  – емпіричні константи [13].

Аналогічні вирази можна отримати для складових  $\overline{V_1^{\prime 2}}, \overline{V_1 V_3^{\prime 2}}$ .

Невідповідність параметрів турбулентного руху часток наносів від аналогічних характеристик несного середовища в рівняннях переносу (2-3), (5-6) в  $k - \varepsilon$  моделі (17-18) враховується за рахунок других кореляційних моментів твердої фази. Кореляції, що містяться в зазначених системах рівнянь, визначені на основі методики отримання ейлерового опису кореляцій, пов'язаних з дисперсною фазою, представленої в роботі [8] для системи рівнянь двофазної турбулентної струмини. Наприклад для кореляційних моментів

$$\overline{W_1^{\prime 2} V_3^{\prime 2}} = \frac{\gamma_{11}^o \overline{V_1^{\prime 2} V_3^{\prime 2}}}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} + \frac{\gamma_{13}^o \overline{V_3^{\prime 2}}}{\gamma_{11} + \varphi_{33}}. \quad (22)$$

$$\overline{W_3^{\prime 2} V_3^{\prime 2}} = \frac{\gamma_{33}^o \overline{V_3^{\prime 2}}}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} + \frac{\gamma_{31}^o \overline{V_1^{\prime 2} V_3^{\prime 2}}}{\gamma_{33} + \varphi_{13}}, \quad (23)$$

$$\overline{W_3^{\prime 2}} = \frac{\gamma_{33}^o \overline{V_3^{\prime 2}}}{\gamma_{33}(\gamma_{33} + \varphi_{33})} + \frac{\gamma_{31}^o \overline{V_1^{\prime 2}}}{\gamma_{33}(\gamma_{33} + \varphi_{11})} + \frac{2\gamma_{33}^o \gamma_{31}^o \overline{V_1^{\prime 2} V_3^{\prime 2}}}{\gamma_{33}(\gamma_{33} + \varphi_{13})}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \overline{W_1^{\prime 2} W_3^{\prime 2}} &= \frac{(\gamma_{11}^o \gamma_{33}^o + \gamma_{13}^o \gamma_{31}^o)(\gamma_{11} + \gamma_{33} + 2\varphi_{13}) \overline{V_1^{\prime 2} V_3^{\prime 2}}}{(\gamma_{11} + \gamma_{33})(\gamma_{11} + \varphi_{13})(\gamma_{33} + \varphi_{13})} + \frac{\gamma_{11}^o \gamma_{31}^o (\gamma_{11} + \gamma_{33} + 2\varphi_{11}) \overline{V_1^{\prime 2}}}{(\gamma_{11} + \gamma_{33})(\gamma_{11} + \varphi_{11})(\gamma_{33} + \varphi_{11})} + \\ &+ \frac{\gamma_{13}^o \gamma_{33}^o (\gamma_{11} + \gamma_{33} + 2\varphi_{33}) \overline{V_3^{\prime 2}}}{(\gamma_{11} + \gamma_{33})(\gamma_{11} + \varphi_{33})(\gamma_{33} + \varphi_{33})}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \overline{\omega_{S2}'' W_3''} = \frac{\beta_\omega + \beta_{\omega s}}{2(\beta_\omega + \gamma_{33})} & \left[ - \frac{\gamma_{33}^o (\beta_\omega + \gamma_{33} + 2C_{i1}^* \varphi_{33})}{(\beta_\omega + C_{i1}^* \varphi_{33})(\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{33})} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_1} - \frac{\gamma_{31}^o (\beta_\omega + \gamma_{33} + 2C_{i1}^* \varphi_{31})}{(\beta_\omega + C_{i1}^* \varphi_{31})(\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{31})} \right. \\ & \times \left. \frac{\partial \overline{V_1''}}{\partial x_1} + \frac{\gamma_{31}^o (\beta_\omega + \gamma_{33} + 2C_{i1}^* \varphi_{11})}{(\beta_\omega + C_{i1}^* \varphi_{11})(\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{11})} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_1''}}{\partial x_3} + \frac{\gamma_{33}^o (\beta_\omega + \gamma_{33} + 2C_{i1}^* \varphi_{13})}{(\beta_\omega + C_{i1}^* \varphi_{13})(\gamma_{33} + C_{i1}^* \varphi_{13})} \frac{\partial \overline{V_1''}}{\partial x_3} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\overline{\omega_{S2}'' V_3''} = - \frac{(\beta_\omega + \beta_{\omega s})}{2(\beta_\omega + C_{i1}^* \varphi_{33})} \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_1} + \frac{(\beta_\omega + \beta_{\omega s})}{2(\beta_\omega + C_{i1}^* \varphi_{13})} \frac{\partial \overline{V_1''}}{\partial x_3}, \quad (27)$$

де  $\gamma_{11} = \frac{\partial \tilde{W}_1}{\partial x_1} + \gamma_{11}^o$ ;  $\gamma_{33} = \frac{\partial \tilde{W}_3}{\partial x_3} + \gamma_{33}^o$ ;  $\beta_{\omega s} = \frac{(\mu_{SL})_{i,j}^n}{(\rho_{SL})_{i,j}^n} \frac{15\beta_S^* \pi}{2a_S C_{\Phi 1} D^2}$ ;  $C_{i1}^* = 1,48$  [8];

$$\gamma_{11}^o = \alpha_m \varphi_{Dt} \varphi_{DS} \left( \gamma_{D1} + \gamma_{D2} \left( 1 + \frac{2}{3} \tilde{U}_r^{-2} \tilde{U}_{r1}^2 \right) \right) - \gamma_L \tilde{U}_r \frac{\tilde{U}_{r3}}{\tilde{U}_{r1}^2} \left( \frac{d\tilde{V}_1}{dx_3} + \tilde{\omega}_{2s} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) \right)$$

$$\gamma_{13}^o = \alpha_m \varphi_{Dt} \varphi_{DS} \frac{2}{3} \gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2} \tilde{U}_{r1} \tilde{U}_{r3} + \gamma_L \tilde{U}_r \tilde{U}_{r1}^{-1} \left( \frac{d\tilde{V}_1}{dx_3} - \tilde{\omega}_{2s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) \right) + \gamma_\omega \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right)$$

$$\gamma_{33}^o = \alpha_m \varphi_{Dt} \varphi_{DS} \left( \gamma_{D1} + \gamma_{D2} \left( 1 + \frac{2}{3} \tilde{U}_r^{-2} \tilde{U}_{r3}^2 \right) \right), \gamma_{31}^o = \alpha_m \varphi_{Dt} \varphi_{DS} \frac{2}{3} \gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2} \tilde{U}_{r3} \tilde{U}_{r1} + \gamma_\omega \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right).$$

Формули (22 - 27) містять показники затухання ейлеревих часових кореляцій  $\varphi_{ij}$  у фіксованих точках простору. Оскільки в руслових потоках величина пульсації швидкості води менша на два порядки від усередненої швидкості, для отримання  $\varphi_{11}$  можна скористатися гіпотезою Тейлора

$$\varphi_{11} = \frac{c_\beta \sqrt{V_1''^2} + |\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1|}{\Lambda_E}, \quad (28)$$

у вертикальному напрямку можна прийняти [8] як

$$\varphi_{33} = \frac{\left( c_\beta \sqrt{V_1''^2} + |\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1| \right)^2}{\left( c_\beta \sqrt{V_1''^2} + 0,5 |\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1| \right) \Lambda_E}, \quad (29)$$

де  $c_\beta = 1,0$ .

Ейлерів середній масштаб турбулентних збурень  $\Lambda_E$  можна виразити через масштаб руслової турбулентності за припущенням [8, 15]  $\Lambda_E = c_\lambda L_t$ ,  $c_\lambda = 1$ . Відповідно, масштаб руслової турбулентності безпосередньо обумовлений пасмовою структурою дна можна визначити в залежності від висоти пасма [1,

15]  $L_t = \frac{0,38h\sqrt{\tilde{V}_1^2 + \tilde{V}_3^2}}{U_\tau} \left(1 - \frac{\Delta}{h}\right)$ , де  $h$  – глибина потоку. Для визначення показника

затухання змішаної кореляції  $\varphi_{13}$  можна скористатися емпіричною залежністю  $\varphi_{13} = K_\varphi \varphi_{33}$ , де  $K_\varphi \approx 1,0$ .

Отримані вирази для кореляцій твердої фази (22) – (27) дозволяють, шляхом множення пульсаційних складових сил  $f_i''$  на пульсаційні складові швидкостей  $V_i''$ , визначити додаткові дисипативні члени  $\overline{V_k'' F_k''}$  та  $\varepsilon_{sik}$ , які входять в рівняння переносу кінетичної енергії турбулентних пульсацій (17) та в алгебраїчні співвідношення для турбулентних напруг (20) – (21):

$$\begin{aligned} \overline{V_3'' f_{D3}''} &= \varphi_{Dt} \varphi_{DS} \left[ (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) (\overline{V_3''} - \overline{V_3'' W_3''}) + \frac{2}{3} \gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2} \times \right. \\ &\times \left. \left( (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3 + \tilde{W}_z) (\overline{V_3'' V_1''} - \overline{V_3'' W_1''}) + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)^2 (\overline{V_3''} - \overline{V_3'' W_3''}) \right) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\overline{V_3'' f_{L3}''} = \gamma_L \tilde{U}_r \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{V_1'' V_3''}}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_1} \right) - \overline{V_3'' \omega_{2s}''} \right), \quad (31)$$

$$\overline{V_3'' f_{\omega 3}''} = \gamma_\omega \left( \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) (\overline{V_3'' V_1''} - \overline{V_3'' W_1''}) + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{V_1'' V_3''}}{\partial x_3} \right) - \overline{V_3'' \omega_{2s}''} \right) (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) \right); \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \overline{V_3'' f_{D1}''} &= \varphi_{Dt} \varphi_{DS} \left[ (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) (\overline{V_3'' V_1''} - \overline{V_3'' W_1''}) + \frac{2}{3} \gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2} \times \right. \\ &\times \left. \left( (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)^2 (\overline{V_3'' V_1''} - \overline{V_3'' W_1''}) + (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3 + \tilde{W}_z) (\overline{V_3''} - \overline{V_3'' W_3''}) \right) \right], \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \overline{V_3'' f_{L1}''} &= \gamma_L \frac{\tilde{U}_r}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} \left( \left( \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \left( \overline{V_3''} - \overline{V_3'' W_3''} \right) - \left( \overline{V_3'' V_1''} - \overline{V_3'' W_1''} \right) \frac{(\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)}{(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)} \right) + \\ &+ (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3) \left( \frac{\partial \overline{V_1'' V_3''}}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{V_1'' V_3''}}{\partial x_3} \right) - \overline{V_3'' \omega_{2s}''} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\overline{V_3'' f_{\omega 1}''} = \gamma_\omega \left( \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) (\overline{V_3''} - \overline{V_3'' W_3''}) + \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overline{V_1'' V_3''}}{\partial x_3} \right) - \overline{V_3'' \omega_{2s}''} \right) (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3) \right), \quad (35)$$

$$\overline{V_k'' F_k''} = \overline{V_k'' f_k''} \cdot \overline{\rho_s} = \overline{\rho_s} (\overline{V_1'' f_{D1}''} + \overline{V_3'' f_{D3}''} + \overline{V_1'' f_{L1}''} + \overline{V_3'' f_{L3}''} + \overline{V_1'' f_{\omega 1}''} + \overline{V_3'' f_{\omega 3}''}). \quad (36)$$

Аналогічно можна отримати вирази для складових  $\overline{V_1'' f_{D1}''}, \overline{V_1'' f_{L1}''}, \overline{V_1'' f_{\omega 1}''}, \overline{V_1'' f_{D3}''}, \overline{V_1'' f_{L3}''}, \overline{V_1'' f_{\omega 3}''}$ . Вирази для складових дисипативного члена

$\frac{\overline{\partial f_i'' \partial V_i''}}{\partial x_j \partial x_j}$  рівняння переносу швидкості дисипації енергії турбулентних пульсацій

(18) в системі координат  $OX_1X_3$  представимо у вигляді суми трьох доданків, обумовлених пульсаціями сил міжфазної взаємодії

$$\begin{aligned}
& \frac{\overline{\partial f_{D1}'' \partial V_1''}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\overline{\partial f_{D1}'' \partial V_1''}}{\partial x_3 \partial x_3} + \frac{\overline{\partial f_{D3}'' \partial V_3''}}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\overline{\partial f_{D3}'' \partial V_3''}}{\partial x_3 \partial x_3} = \varphi_{Dr} \varphi_{Ds} \left[ \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} - \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) \frac{\partial k_{Lt}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) \frac{\partial k_{Lt}}{\partial x_3} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) \left( \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_1} \right) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) \left( \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_3} \right) \right) \left( \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} + \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} + \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} + \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) + \\
& + (\gamma_{D1} + \gamma_{D2}) \frac{\varepsilon_{Lt}}{\nu} \left( 1 - \frac{1}{3} \left( 1 - f_s + \frac{3 \overline{V_1^2}}{2 k_{Lt}} f_s \right) \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} - \frac{1 \overline{V_1 V_3''}}{2 k_{Lt}} f_s \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} - \frac{1 \overline{V_3 V_1''}}{2 k_{Lt}} f_s \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{3} \left( 1 - f_s + \frac{3 \overline{V_3^2}}{2 k_{Lt}} f_s \right) \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \overline{V_1^2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{V_3^2}}{\partial x_1} - \frac{\partial k_{Lt}}{\partial x_1} \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \frac{\partial \overline{V_1^2}}{\partial x_1} \left( \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} + \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) - \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_1} \left( \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} + \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial \overline{V_3^2}}{\partial x_1} \left( \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} + \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_1} \left( \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} + \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) \right) \left( \frac{\partial (\gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2})}{\partial x_1} [(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)^2 + \right. \\
& \left. + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)^2 + 2(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)(\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)] + 2\gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2} \left( \frac{\partial (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)}{\partial x_1} \right) [(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)] \right) + \\
& + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \overline{V_1^2}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{V_3^2}}{\partial x_3} - \frac{\partial k_{Lt}}{\partial x_3} \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} - \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial \overline{V_1^2}}{\partial x_3} \left( \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} + \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) - \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_3} \left( \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} + \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \frac{\partial \overline{V_3^2}}{\partial x_3} \left( \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} + \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_3} \left( \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} + \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) \right) \left( \frac{\partial (\gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2})}{\partial x_3} [(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)^2 + 2(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)(\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3) + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)^2] + \right. \\
& \left. + 2\gamma_{D2} \tilde{U}_r^{-2} \left( \frac{\partial (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)}{\partial x_3} + \frac{\partial (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)}{\partial x_3} \right) [(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) + (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)] \right) + \frac{\varepsilon_{Lt}}{\nu} \frac{2\gamma_{D2}}{9\tilde{U}_r^2} \left( \left( \left( 1 - f_s + \frac{3 \overline{V_1^2}}{2 k_{Lt}} f_s \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} \right) - \frac{3 \overline{V_1 V_3''}}{2 k_{Lt}} f_s \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} \right) (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)^2 + \left( \frac{3 \overline{V_1 V_3''}}{2 k_{Lt}} f_s \left( 1 - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \left( 1 - f_s + \frac{3 \overline{V_1^2}}{2 k_{Lt}} f_s \right) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) (\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1)(\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3) + \left( \frac{3 \overline{V_3 V_1''}}{2 k_{Lt}} f_s \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{11}} \right) - \left( 1 - f_s + \frac{3 \overline{V_3^2}}{2 k_{Lt}} f_s \right) \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} \right) \times \right. \\
& \left. \left. \times (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)(\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1) + \left( \left( 1 - f_s + \frac{3 \overline{V_3^2}}{2 k_{Lt}} f_s \right) \left( 1 - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) - \frac{3 \overline{V_3 V_1''}}{2 k_{Lt}} f_s \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) (\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3)^2 \right) \right] \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_{L1}''}{\partial x_1} \frac{\partial V_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{L3}''}{\partial x_1} \frac{\partial V_3''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{L1}''}{\partial x_3} \frac{\partial V_1''}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{L3}''}{\partial x_3} \frac{\partial V_3''}{\partial x_3} = \gamma_L \frac{k_{Lr}}{\varepsilon_{Lr}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1} \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \right) + \right. \\
& + \left. \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \right] \overline{V_3 V_1''} \frac{\partial^2 \overline{V_1}}{\partial x_1 \partial x_3} \left( 1 - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{11}} - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3} \right) \times \right. \\
& \times \left. \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) + \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \right] \overline{V_3''} \left( 1 - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{13}} - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) \times \\
& \times \frac{\partial^2 \overline{V_3}}{\partial x_1 \partial x_3} + \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1} \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) + \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_1 - \tilde{W}_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \right) \overline{V_3 V_1''} \times \\
& \times \frac{\partial^2 \overline{V_1}}{\partial x_3^2} \left( 1 - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{11}} - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) + \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3} \right) \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) + \left( \frac{\tilde{U}_r}{\tilde{V}_3 - \tilde{W}_3} \right) \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \right) \overline{V_3''} \frac{\partial^2 \overline{V_3}}{\partial x_3^2} \left( 1 - \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{13}} - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{33}} \right) \Big], \tag{38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_{\omega 1}''}{\partial x_1} \frac{\partial V_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{\omega 3}''}{\partial x_1} \frac{\partial V_3''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{\omega 1}''}{\partial x_3} \frac{\partial V_1''}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{\omega 3}''}{\partial x_3} \frac{\partial V_3''}{\partial x_3} = \gamma_\omega \frac{k_{Lr}}{\varepsilon_{Lr}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \left( \overline{V_3 V_1''} \frac{\partial^2 \overline{V_1}}{\partial x_3 \partial x_1} \times \right. \right. \\
& \times \left. \left( 1 - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) + \overline{V_1 V_3''} \frac{\partial^2 \overline{V_3}}{\partial x_1^2} \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} \right) - \overline{V_1''} \frac{\partial^2 \overline{V_1}}{\partial x_1^2} \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{11}} - \overline{V_3''} \frac{\partial^2 \overline{V_3}}{\partial x_3 \partial x_1} \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{33}} \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \left( \overline{V_3 V_1''} \frac{\partial^2 \overline{V_1}}{\partial x_3^2} \left( 1 - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{31}} \right) + \overline{V_1 V_3''} \frac{\partial^2 \overline{V_3}}{\partial x_1 \partial x_3} \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{13}} \right) - \overline{V_1''} \times \right. \\
& \times \left. \frac{\partial^2 \overline{V_1}}{\partial x_1 \partial x_3} \frac{\gamma_{31}^o}{\gamma_{33} + \varphi_{11}} - \overline{V_3''} \frac{\partial^2 \overline{V_3}}{\partial x_3^2} \frac{\gamma_{13}^o}{\gamma_{11} + \varphi_{33}} \right) + \gamma_\omega \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \tilde{\omega}_{2s} \right) \frac{\varepsilon_{Lr}}{3\nu_L} \left( \frac{3f_s}{2k_L} \left( \left( 1 - \frac{\gamma_{33}^o}{\gamma_{33} + C_{r1}\varphi_{31}} \right) \times \right. \right. \\
& \times \left. \left. \overline{V_1 V_3''} + \overline{V_3 V_1''} \left( 1 - \frac{\gamma_{11}^o}{\gamma_{11} + C_{r1}\varphi_{13}} \right) \right) - \left( 1 - f_s + \frac{3}{2} \frac{\overline{V_1''}}{k_L} f_s \right) \frac{\gamma_{31}}{\gamma_{33} + C_{r1}\varphi_{11}} - \left( 1 - f_s + \frac{3}{2} \frac{\overline{V_3''}}{k_L} f_s \right) \frac{\gamma_{13}}{\gamma_{11} + C_{r1}\varphi_{33}} \right). \tag{39}
\end{aligned}$$

Визначення додаткових ефективних напружень  $(\overline{W_3''})_{imp}$ , ґрунтується на припущенні, що контактна взаємодія часток наносів з дном превалює над силою взаємодії твердих часток між собою. Для визначення залежності для моменту кореляцій твердої фази за вихідні взято вертикальну проекцію рівняння переносу пульсаційної енергії несного середовища та твердої фази [17]

$$\begin{aligned}
& \left( \overline{\rho_s W_3''} \right)_{imp} = \left[ - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{C_\mu f_\mu \chi z}{2^{1.5} \sigma_k} \sqrt{\frac{\rho_L V_3''}{\rho_L}} \frac{\partial \overline{V_3''}}{\partial x_3} \right) - \frac{C_D f_\varepsilon \rho_L V_3''^{1.5}}{2^{1.5} \chi z} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\mu_{SL}}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\overline{\rho_L V_3''}}{\rho_L} \right) \right] \\
& + \alpha_m \overline{W_3'' F_3''} - \left( 1 - \alpha_m \frac{C_m}{a_s} \right) \overline{V_3'' F_3''} \left( \frac{\partial \overline{W_3}}{\partial x_3} \right)^{-1}, \tag{40}
\end{aligned}$$

де член рівняння  $\overline{V_3 F_3''} = \overline{V_3 F_{D3}''} + \overline{V_3 F_{L3}''} + \overline{V_3 F_{\omega 3}''}$  можна представити через складові, аналогічно виразам (30-36);  $c_D$  – емпірична константа,  $\chi$  – постійна Кармана,  $z$  – координата, нормальна до дна, яка змінюється в межах придонного шару 10 D часток від дна.

Процеси розвитку деформацій на заплавних ділянках починаються тільки при перевищенні швидкості потоку над нерозмивною для ґрунту, який складає дно; відповідно, залежать від зчіпних якостей ґрунтових часток та від розподілу рослинності, які знижують їх інтенсивність. На поверхні заплав донні наноси виявляються похованими під товщею намулку, відкладених дрібних фракцій, занесених в паводок в зваженому стані. Таким чином рівняння переносу над заплавною частиною повинні враховувати зчіпні якості ґрунтів, наявність зважених наносів та вплив рослинного покриву

$$\overline{\rho_{LS}} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial t} + \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_3 \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} - \overline{\rho_S} \tilde{W}_z \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu_{LS} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_1 \tilde{V}_3''}{\partial x_3} - \tilde{F}_{P1}, \quad (41)$$

$$\overline{\rho_{LS}} \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial t} + \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_1 \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} + \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_3 \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} - \overline{\rho_S} \tilde{W}_z \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \mu_{LS} \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_3''}{\partial x_3} - \overline{\rho_{LS}} g - \bar{F}_C - \tilde{F}_{P3} \quad (42)$$

де проекції  $\tilde{F}_{P1}, \tilde{F}_{P3}$  – сили опору рослинності,  $\bar{F}_C$  – сили зчеплення ґрунту.

В якості рівняння збереження маси використовується рівняння

$$\frac{\partial \overline{\rho_{LS}}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\rho_{LS}} \tilde{V}_3}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} (\overline{\rho_S} \tilde{W}_z) = 0. \quad (43)$$

Товщина придонного шару на заплаві відповідає або висоті рослинного шару (з малою висотою) або товщині придонного шару в руслі (при великій висоті рослин). Для усереднених складових сили опору отримані залежності, які ґрунтуються на підході з визначення розподіленої сили, що діє в шарі рослин, в системі координат  $OX_1 X_3$

$$\tilde{F}_{P1} = \frac{1}{2} \rho_{SL} C_X S_p \left( \tilde{U} \tilde{V}_1 + \tilde{V}_1 \tilde{V}_1'' \tilde{U}^{-1} + \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_S}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \tilde{V}_3 \tilde{V}_1'' \tilde{U}^{-1} \right), \quad (44)$$

$$\tilde{F}_{P3} = \frac{1}{2} \rho_{SL} C_X S_p \left( \tilde{U} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_S}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) + \tilde{V}_1 \tilde{V}_1'' \tilde{V}_3'' \tilde{U}^{-1} + \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_S}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \tilde{V}_3'' \tilde{U}^{-1} \right), \quad (45)$$

де  $C_X$  – коефіцієнт опору рослинності, який визначається за експериментальними дослідженнями, згідно [17];  $s_p = \frac{D_{cm} \Delta z_{cm}}{\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3}$  – загальна міделева площа рослинності, яка розподілена в певному об'ємі потоку;  $D_{cm}$  – діаметр стебла рослини, яка обтікається водою, м;  $\Delta z_{cm}$  – частина стебла рослини за висотою, яка обтікається водою, м;  $\tilde{U} = \sqrt{\tilde{V}_1^2 + \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{W}_z \right)^2}$  – повна швидкість потоку, .

Враховуючи фізико-хімічну природу взаємодії піщаних, глинистих та болотистих, характерних для дна руслових та заплавних потоків, дрібнозернистих ґрунтів з водою, виникають сили зчеплення молекулярного характеру. Згідно проведених в роботі [18] досліджень, силу опору відриву множини зерен ґрунту можна визначити за залежністю

$$\bar{F}_C = \frac{0,035C \cdot \bar{S}g}{C_{\Phi 1} D}, \quad (46)$$

де  $0,035 \cdot C$  – межа втомленості розриву зв'язних ґрунтів;  $C$  – зчеплення ґрунту в стані повного водонасичення,  $\text{кг}/\text{см}^2$ .

Замикаючі рівняння переносу характеристик турбулентного потоку над заплавною частиною в придонній області, як і у випадку для руслового потоку, повинні бути придатними і для малих  $Re \rightarrow 0$  і для великих  $Re \rightarrow \infty$  чисел Рейнольдса, враховувати наявність зважених транспортних наносів та вплив рослинного покриву:

- к- рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{SLt}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}_1 K_{SLt}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_3 K_{SLt}}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} W_z K_{SL} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\mu_{SL}}{\rho_{SL}} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{K_{SLt}}{\rho_{SL}} \right) + \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K_{SLt}}{\partial x_1} \right] - \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_1^n \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} \\ - \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_1^n \tilde{V}_3^n \right) \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{\mu_{SL}}{\rho_{SL}} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{K_{SLt}}{\rho_{SL}} \right) + \frac{v_t}{\sigma_K} \frac{\partial K_{SLt}}{\partial x_3} \right] - \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_3^n \tilde{V}_1^n \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_1} - \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_3^n \right) \frac{\partial \tilde{V}_3}{\partial x_3} - E_{SLt} - \left( \tilde{V}_1^n F_{P1} + \tilde{V}_3^n F_{P3} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

- ε- рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}_1 \varepsilon_{Lt}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{V}_3 \varepsilon_{Lt}}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( v_{SL} \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_{SL} \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_3} \right) + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( v_{SL} \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( v_{SL} \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_3} \right) \right] + \\ + C_{\varepsilon 4} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{k_{Lt}}{\varepsilon_{Lt}} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_1^n \right) \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{k_{Lt}}{\varepsilon_{Lt}} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_3^n \right) \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_3} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{k_{Lt}}{\varepsilon_{Lt}} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_3^n \right) \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{k_{Lt}}{\varepsilon_{Lt}} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{SL}} \tilde{V}_1^n \right) \frac{\partial \varepsilon_{Lt}}{\partial x_3} \right] \right) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon_{L_t}}{k_{L_t}} \left( \overline{V_1 V_1''} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_1} + \overline{V_1 V_3''} \frac{\partial \tilde{V}_1}{\partial x_3} + \overline{V_3 V_1''} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) + \overline{V_3 V_3''} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) - \\
& -C_{\varepsilon 2} f_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{L_t}}{k_{L_t}} \left[ \varepsilon_{L_t} - 2\nu_{SL} \left( \frac{\partial \sqrt{k_{L_t}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sqrt{k_{L_t}}}{\partial x_3} \right)^2 \right] - 2\nu_{SL} \left[ \frac{\partial f_{P1}''}{\partial x_1} \frac{\partial V_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{P1}''}{\partial x_3} \frac{\partial V_1''}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{P3}''}{\partial x_1} \frac{\partial V_3''}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{P3}''}{\partial x_3} \frac{\partial V_3''}{\partial x_3} \right] + C_{\varepsilon 5} \nu_{SL} \frac{k_{L_t}}{\varepsilon_{L_t}} \times \\
& \times \left\{ \overline{V_1''} \left[ \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \right] + \\
& + \overline{V_3''} \left[ \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) + \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3^2} \right) \right] + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \right] + \\
& + \overline{V_3 V_1''} \left[ \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3 \partial x_1} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_1 \partial x_3} \right) \right] + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \right] + \\
& + \overline{V_3''} \left[ \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3 \partial x_1} \right) + \left( \frac{\partial^2 \tilde{V}_1}{\partial x_3^2} \right) \right] + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left( \tilde{V}_3 - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} \tilde{W}_z \right) \right) \right] \left. \right\}, \tag{48}
\end{aligned}$$

- алгебраїчні співвідношення для турбулентних напруг

$$\frac{\overline{V_1''}}{k_{L_t}} = \frac{R_{11} + P_{11} - \varepsilon_{L_{11}} - \varepsilon_{P_{11}}^*}{P - \varepsilon_{L_t} - \varepsilon_{P_{11}}}, \quad \varepsilon_{P_{11}}^* = 2\overline{V_1'' f_{P1}''}, \quad \varepsilon_{P_{11}} = \overline{V_1'' f_{P1}''}, \tag{49}$$

$$\frac{\overline{V_3''}}{k_{L_t}} = \frac{R_{33} + P_{33} - \varepsilon_{L_{33}} - \varepsilon_{P_{33}}^*}{P - \varepsilon_{L_t} - \varepsilon_{P_{33}}}, \quad \varepsilon_{P_{33}}^* = 2\overline{V_3'' f_{P3}''}, \quad \varepsilon_{P_{33}} = \overline{V_3'' f_{P3}''}, \tag{50}$$

$$\frac{\overline{V_1 V_3''}}{k_{L_t}} = \frac{R_{13} + P_{13} - \varepsilon_{L_{13}} - \varepsilon_{P_{13}}^*}{P - \varepsilon_{L_t} - \varepsilon_{P_{13}}}, \quad \varepsilon_{P_{13}}^* = \left( \overline{V_1'' f_{P3}''} + \overline{V_3'' f_{P1}''} \right), \quad \varepsilon_{P_{13}} = \overline{V_3'' f_{P1}''}, \tag{51}$$

$$\frac{\overline{V_3 V_1''}}{k_{L_t}} = \frac{R_{31} + P_{31} - \varepsilon_{L_{31}} - \varepsilon_{P_{31}}^*}{P - \varepsilon_{L_t} - \varepsilon_{P_{31}}}, \quad \varepsilon_{P_{31}}^* = \left( \overline{V_3'' f_{P1}''} + \overline{V_1'' f_{P3}''} \right), \quad \varepsilon_{P_{31}} = \overline{V_1'' f_{P3}''}, \tag{52}$$

де додаткові дисипативні члени за рахунок впливу сил опору рослинності для рівнянь (47) та (49-52)

$$\overline{V_1'' f_{P1}''} = \frac{1}{2} \frac{C_X S_p}{\tilde{U}} \left[ \sigma^2 \overline{V_1''} + \overline{V_1''} \overline{V_1''} + \overline{V_1''} \left( \overline{V_3} - \frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{LS}} \overline{W_z} \right) \overline{V_1 V_3''} \right], \tag{53}$$

$$\overline{V_3'' f_{P3}''} = \frac{1}{2} \frac{C_X S_p}{\tilde{U}} \left[ \sigma^2 \overline{V_3''} + \overline{V_3''} \left( \overline{V_3} - \frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{LS}} \overline{W_z} \right) \overline{V_3 V_1''} + \left( \overline{V_3} - \frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{LS}} \overline{W_z} \right)^2 \overline{V_3''} \right], \tag{54}$$

$$\overline{V_3 f_{P1}''} = \frac{1}{2} \frac{C_x S_p}{\overline{U}} \left[ (\overline{U}^2 + \overline{V_1}^2) \overline{V_3 V_1''} + \left( \overline{V_3} - \frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{LS}} W_z \right) \overline{V_1 V_3''} \right], \quad (55)$$

$$\overline{V_1 f_{P3}''} = \frac{1}{2} \frac{C_x S_p}{\overline{U}} \left[ \overline{V_1} \left( \overline{V_3} - \frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{LS}} W_z \right) \overline{V_1''} + \left( \overline{U}^2 + \left( \overline{V_3} - \frac{\overline{\rho_s}}{\rho_{LS}} W_z \right)^2 \right) \overline{V_1 V_3''} \right], \quad (56)$$

та додаткові дисипативні члени за рахунок впливу сил опору рослинності для рівняння (48)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{P1}''}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{P1}''}{\partial x_3} \frac{\partial \overline{V_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial f_{P3}''}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{V_3}}{\partial x_1} + \frac{\partial f_{P3}''}{\partial x_3} \frac{\partial \overline{V_3}}{\partial x_3} = \frac{1}{2} C_x S_p \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_1}^2}{\partial x_1} \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{V_1}^2}{\partial x_1 \overline{U}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{V_3}^2}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{1}{\overline{U}} \left( \overline{V_3} - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} W_z \right)^2 \right] \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_3} \frac{\partial \overline{V_1}^2}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_1} \frac{\partial \overline{V_3}^2}{\partial x_1} \right) + \frac{\overline{U} \varepsilon_{SLt}}{\nu_{SL}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[ \frac{\overline{V_1}}{\overline{U}} \left( \overline{V_3} - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} W_z \right) \right] \frac{\partial \overline{V_1 V_3''}}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ \frac{\overline{V_1}}{\overline{U}} \left( \overline{V_3} - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} W_z \right) \right] \frac{\partial \overline{V_3 V_1''}}{\partial x_1} + \left( \overline{V_1}^2 \left[ 1 - f_s + \frac{3}{2} \frac{\overline{V_1}^2}{k_{SLt}} f_s \right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \frac{\overline{V_1}}{k_{SLt}} \left( \overline{V_3} - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} W_z \right) f_s (\overline{V_3 V_1''} + \overline{V_1 V_3''}) + \left( \overline{V_3} - \frac{\rho_s}{\rho_{LS}} W_z \right)^2 \left[ 1 - f_s + \frac{3}{2} \frac{\overline{V_3}^2}{k_{SLt}} f_s \right] \right) \frac{\varepsilon_{SLt}}{3 \nu_{SL} \overline{U}} \left. \right\}. \quad (57) \end{aligned}$$

Для розглянутих у даній роботі процесів розвитку загальних деформацій в зоні впливу мостових переходів, що представлені у виді систем рівнянь параболо-гіперболічного й еліптичного типу розроблено методи реалізації запропонованих математичних моделей, представлених у декартових координатах. Дискретний аналог і алгоритм рішення нестационарних рівнянь моделей зависеного руслового та заплавного потоків (2-3), (5-6), (41-43),  $k - \varepsilon$  моделей турбулентності (17-18), (45-48) побудовано на кінцево-різницевому методі предиктор-коректор за явною схемою Мак-Кормака [12, 14].

Рішення стаціонарних рівнянь аналогічно одержанню асимптотично стаціонарного рішення нестационарної задачі. Тому чисельна реалізація співвідношень (20-27), (40), (49-52) проводиться за явним ітераційним методом Гаусса - Зейделя. Для прискорення збіжності будь-якого ітераційного процесу використовується метод послідовної верхньої релаксації (п.в.р.) [12].

Рухливість твердих границь потоку обумовлює необхідність приєднати до складу рівнянь динаміки руслових потоків (1-7) граничну умову, що встановлює зв'язок між змінами русла і транспортуванням наносів. В якості

базового рівняння розрахунку планових деформацій прийняте двовимірне рівняння балансу наносів, яке може бути записане у виді

$$\frac{\partial z_0}{\partial t} + \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial q_{S1}}{\partial x_1} + \frac{1}{1-\varepsilon} \frac{\partial q_{S2}}{\partial x_2} = 0, \quad (58)$$

де  $z_0$  – відмітки поверхні дна річкового русла;  $q_{Si}$  – питома витрата руслових наносів;  $\varepsilon$  – коефіцієнт пористості донних відкладень;  $x_1, x_2$  – поздовжня та поперечні координати. Розв’язування представленого рівняння (58) за явною схемою Мак-Кормака запропоновано в роботах [12, 14]. Глибина розмиву заплавної ділянки  $h_{\text{зап.п.р}}$  визначається на основі співвідношення дійсної та нерозмивної швидкостей

$$h_{\text{зап.п.р}} = \frac{h_{\text{зан.п.р}} \beta_{\Pi} \langle U_{SL} \rangle_{i,j}}{(1-\lambda) U_{\text{нерозм}}}, \quad (59)$$

де  $\langle U_{SL} \rangle_{i,j}$  – середні за глибиною (на вертикалі) значення швидкості потоку,  $\langle U_{SL} \rangle_{i,j} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^H \tilde{U} dx_3$ ;  $h_{\text{зан.п.р}}$  – глибина заплави;  $\beta_{\Pi}$  – степінь стиснення заплавного потоку;  $\lambda$  – відносна ширина опори,  $\lambda = B_{\text{pier}}/l_{\text{np}}$ ;  $B_{\text{pier}}$  – ширина опори;  $l_{\text{np}}$  – довжина прольоту мосту,  $U_{\text{нерозм}}$  – нерозмивна швидкість, м [2, 6].

В якості межових умов на поверхні потоку запропоновано рівняння для відмітки поверхні  $H_{\text{пв}}$ , яке отримано шляхом інтегрування складових рівняння збереження маси (43) по вертикалі від відмітки дна до відмітки поверхні (в ламаних дужках – середні за глибиною значення змінних характеристик потоку)

$$\frac{\partial H_{\text{пв}}}{\partial t} + \frac{h}{\langle \rho_{LS} \rangle} \frac{\partial \langle \rho_{LS} \rangle}{\partial t} + \frac{h}{\langle \rho_{LS} \rangle} \frac{\partial \langle \rho_{LS} \tilde{V}_1 \rangle}{\partial x_1} + \langle \tilde{V}_1 \rangle_i \frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{(\overline{\rho_S W_z})_{i,H_{\text{пв}}}}{\langle \rho_{LS} \rangle} = 0, \quad (60)$$

де величина добутку  $(\overline{\rho_S W_z})_{i,H_{\text{пв}}}$  визначаються на поверхні потоку.

На основі представлених у статті математичних моделей для придонної області в комплексі з математичними моделями для основної товщі зависенесного річного потоку, які наведені у роботі [19], та методів їх реалізації було розроблено програмний комплекс „Virtual model river 2”. Програмний комплекс складається з семи блоків: розрахунок початкових та межових умов,

реалізація дискретних аналогів рівнянь переносу в основній товщі зависенесного потоку, як в руслі так і на заплавах ділянках, в придонній області в руслі, на заплаві, розрахунок форми вільної поверхні, загальних деформацій або загальних та місцевих деформацій в руслі та на заплаві.

За відомим ходом повені та закономірністю руслової витрати при певному горизонті води (графіки представлено у роботі [20]) було проведено розрахунок загального розмиву підмостового русла на р. Гірський Тікич за відповідно розробленої програмою „Virtual model river 2”. Найвищий рівень весняної повені (висотою 0,3-1,5 м під час звичайної повені та 0,5-2,5 м під час виключно високої повені) спостерігається в другій декаді березня, через 2-3 тижні після його початку.

Для того, щоб розрахувати очікувані деформації русла, що обумовлені зсувом руслових форм, необхідно побудувати модель ділянки річки в зоні впливу мостового переходу за визначеними, в результаті геодезичних вишукувань, відмітками, як правило це відмітки на морфорстворах (рис. 1). Сходинки вихідного гідрографу паводку замінюються графіком зі сходинками, які відповідають розрахунковому кроку  $\Delta t$  програми, що дозволяє проводити розрахунок в умовах, близьких до реальних.

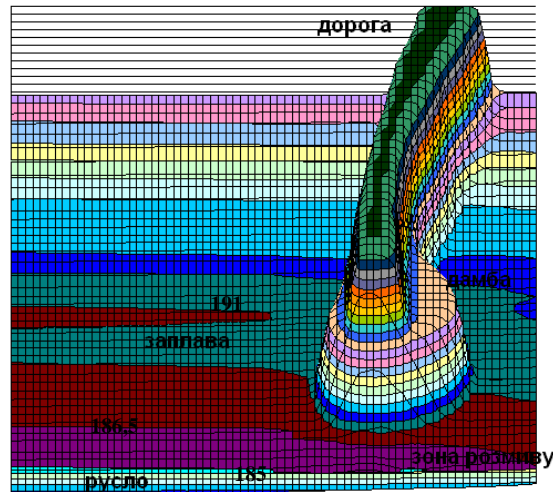


Рисунок 1 – Схема мостового переходу через р. Гірський Тікич на ділянці автомобільної дороги Київ – Одеса, між селами Бузівка і Нестерівка.

Ширина русла річки передбачається змінною, оскільки за рахунок процесу глибинної ерозії та утворенню осередків може виникати розширення русла. На рис. 2 представлено результати розрахунку загального розмиву на двох сходинках паводку, 615-а сходинка паводку розраховувалась за 1% - ю витратою.

Активні деформаційні процеси в річному руслі проходять після 615-ї розрахункової сходинки гідрографа повені. Збільшення витрат води, що протікає по русловій та заплавної ділянках отвору моста, супроводжується зростанням швидкостей течії. Внаслідок чого відбувається посилене винесення частинок ґрунту; тобто – розмив: переважно в руслі і на правій заплаві річки.

Згідно представленим результатам розрахунку загальних деформацій підмостового русла р. Гірський Тікич, як і у більшій кількості випадків у зонах впливу реальних мостових переходів, розмив русла зупиняється лише на спаді повені, оскільки транспортуюча здатність потоку знижується по мірі збільшення розмивних вирв перед та під мостовим переходом. Найглибша відмітка ями розмиву в руслі складає 178 м, осередку – 190 м. Таким чином, можливість встановлення найбільшої глибини безпосередньо біля опори повинна враховуватися для опор, розміщених в руслі річки. Заплави під мостом заросли очеретом та травою і паводковий потік майже не руйнує дерновий покрив. Відповідно руслові зміни на мостовому переході пов'язані з утрудненням водотоку підходами до мосту і тому виражаються, перш за все, в зростанні глибин в руслі.

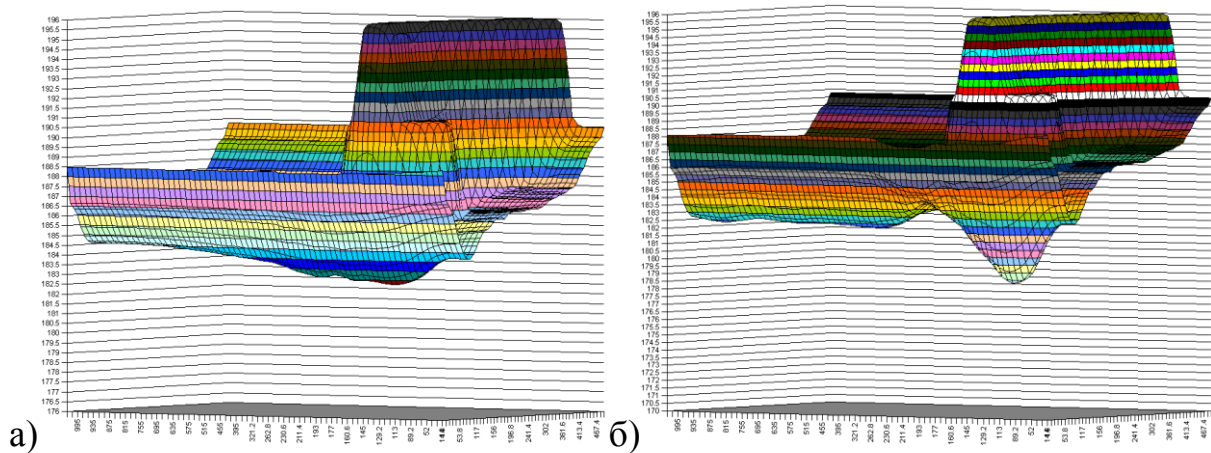


Рисунок 2 – Розрахунок загального розмиву підмостового русла р. Гірський Тікич: а) з витратою  $Q=223,28$  м<sup>3</sup>/с після 185-ї сходинки гідрографа повені; б) з витратою  $Q=578$  м<sup>3</sup>/с після 615-ї сходинки гідрографа повені.

Реальні природні потоки відрізняються різновидами форм та обмеженими розмірами русла. Під їх впливом утворюється складний просторовий розподіл поздовжніх складових швидкостей. Виникає необхідність в дослідженні локальних характеристик та деталей структури потоку - розподілу швидкостей по перетину, пульсаційних рухів турбулентності з врахуванням її складного анізотропного характеру. На рис. 3 представлено розподіл у придонній області

поздовжньої швидкості  $\tilde{V}_1$  в створі мостового переходу Значення  $\tilde{V}_1$  отримані шляхом реалізації дискретних аналогів рівнянь (5) та (41).

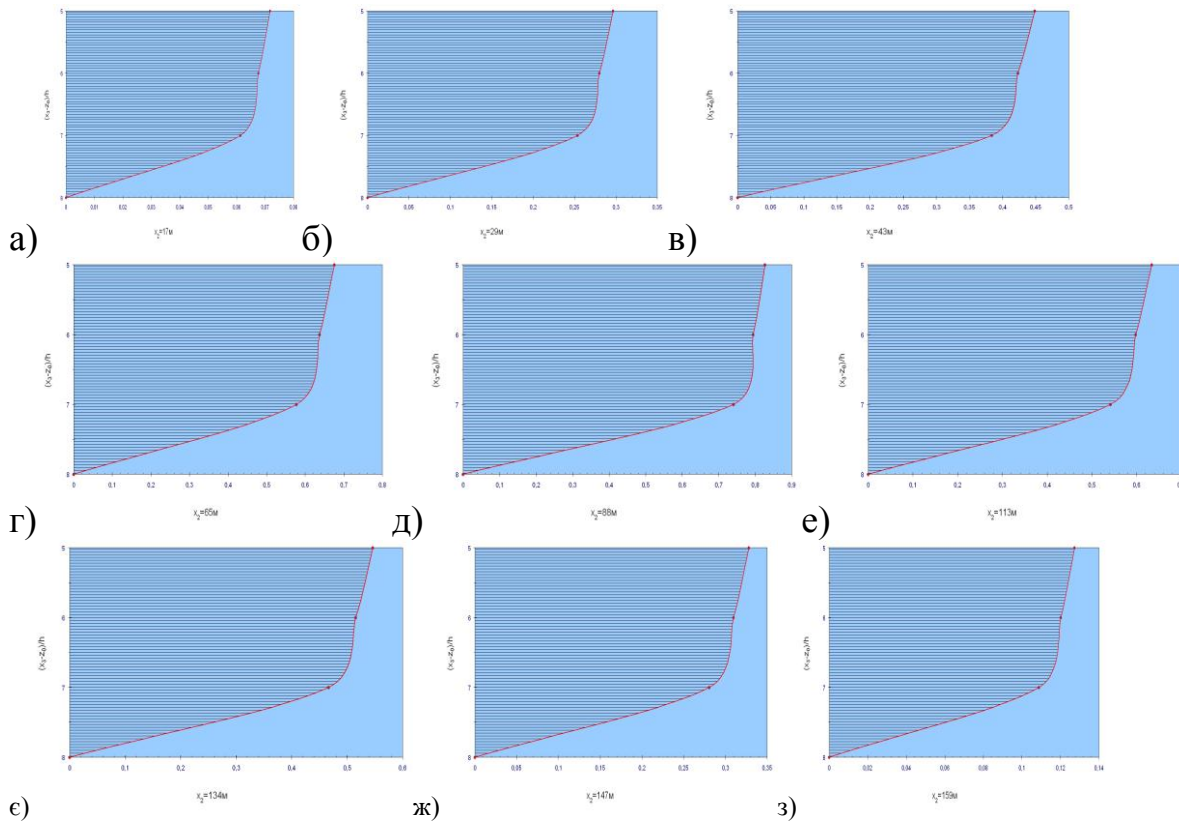


Рисунок 3 – Епюри розподілу поздовжньої швидкості  $\tilde{V}_1$  (м/с) у придонній області після 615-ї сходинки гідрографа повені р. Гірський Тікич: а - в – на заплаві; г - е – в руслі; ж, з – на заплаві з насипом підходу.

На основі розв'язку рівнянь (17-18) та (47-48) отримано розподіл у придонному шарі кінетичної енергії турбулентності  $K_{Lt}$  та швидкості її дисипації  $\varepsilon_{Lt}$ . Розподіл мутності  $\bar{S}$  у річковому потоці отримано з розв'язку рівнянь (4), (43). Величини  $K_{Lt}$ ,  $\varepsilon_{Lt}$  та  $\bar{S}$  приймають максимальні значення в зоні розвитку розмиву під мостовим переходом (рис. 4 а, б, в). Також на рис. 4 (г, д, є) представлено розраховані характеристики для твердої фази неоднорідного річкового потоку: швидкості поздовжня і вертикальна  $\tilde{W}_1, \tilde{W}_3$ , додаткові ефективні напруження  $(\overline{W_3^{n2}})_{imp}$  за рахунок контактної взаємодії частинок наносів з дном. У зоні розвитку розмивної вирви швидкості приймають найбільше значення  $\tilde{W}_1, \tilde{W}_3$ ,  $(\overline{W_3^{n2}})_{imp}$  - приймає додатне значення, а навколо ями розмиву у руслі – від'ємне. Значення напружень обумовлене інерційністю твердих частинок по відношенню до рідких об'ємів, які

захоплюють їх у процесі пульсаційного та усередненого руху. Цей член описує взаємне перетворення енергії усередненого та пульсаційного руху. Вираз для  $(\overline{W_3^{n^2}})_{imp}$  дозволяє зробити важливий висновок, що у зависенесному потоці, на відміну від однорідного спостерігається додаткова генерація турбулентної енергії за рахунок обтікання твердих частинок несної рідиною.

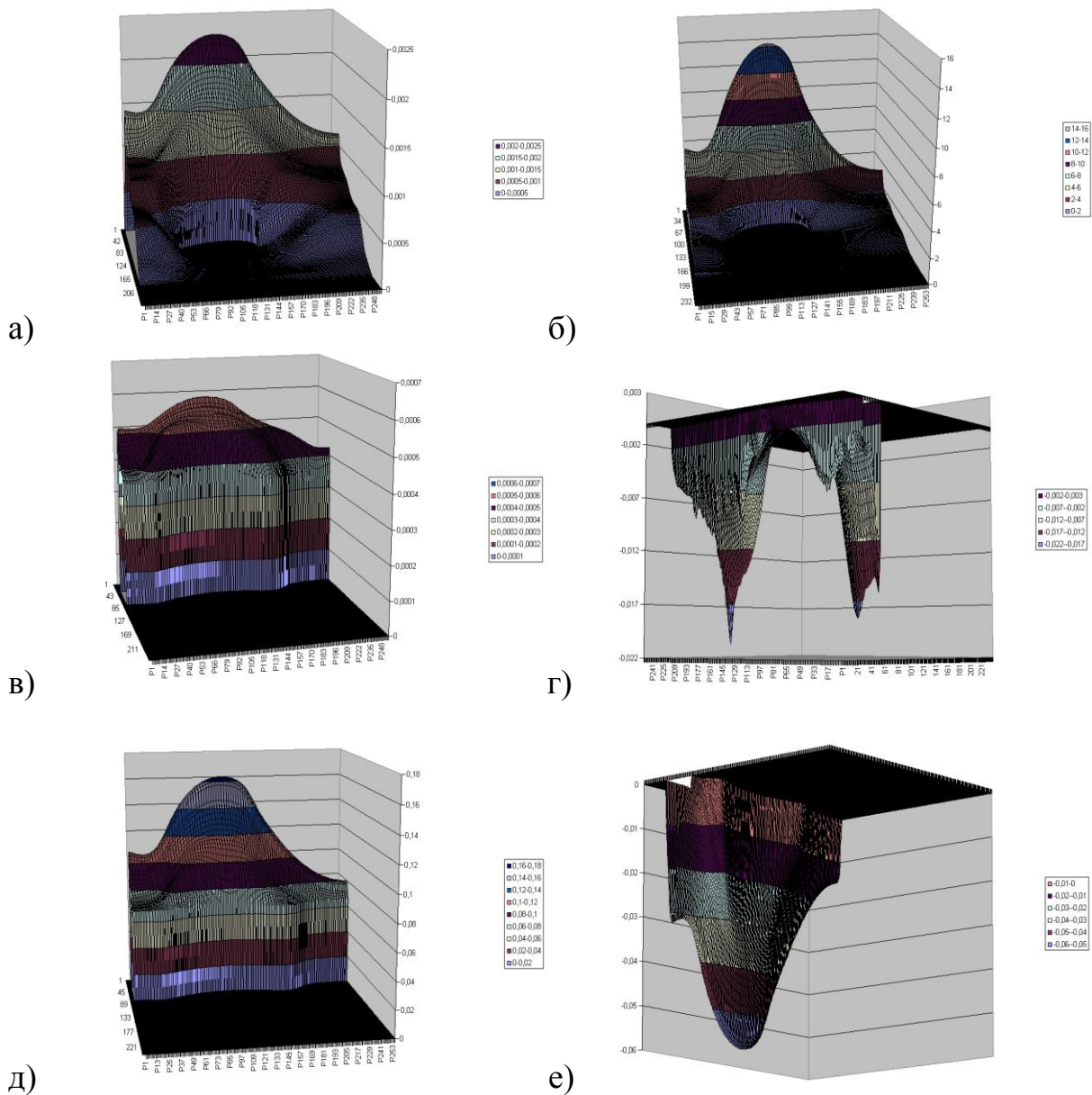


Рисунок 4 – Графіки розподілу гідродинамічних характеристик р. Гірський Тікич у придонному шарі після 615-ї сходинки гідрографа повені: а) кінетичної енергії турбулентності  $K_L$  ( $\text{кг/м}^3 \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$ ); б) швидкості дисипації кінетичної енергії турбулентних пульсацій  $\varepsilon_L$  ( $\text{м}^2/\text{с}^3$ ); в) придонної мутності  $\bar{S}$  ( $\text{м}^3/\text{м}^3$ ); г) додаткових ефективних напружень  $(\overline{W_3^{n^2}})_{imp}$  ( $\text{м}^2/\text{с}^2$ ) за рахунок контактної взаємодії частинок наносів з дном; д) поздовжньої швидкості  $\tilde{W}_1$  ( $\text{м/с}$ ) частинок наносів; е) вертикальної швидкості  $\tilde{W}_3$  ( $\text{м/с}$ ) частинок наносів.

**Висновки.** Запропонований у роботі підхід дозволяє проаналізувати зазначене явище взаємної керованості потоку та русла і заплави в цілому. Таким чином, автором розроблено якісно нові методи прогнозу деформацій в зоні впливу мостових переходів на основі теорії неоднорідних потоків, які враховують особливості протікання турбулентних потоків в цих зонах.

## ЛІТЕРАТУРА

1. *Гришанин К.В.* Динамика руслових потоків. – 2-е изд.Л.:Гидрометеоиздат, 1979. – 312 с.
2. *Романовский В.В.* Исследование начальной скорости влечения частиц наносов. – «Труды ГГИ», 1974, вып. 210, с. 130-150.
3. *Россинский К.И., Дебольский В.К.* Речные наносы. М.: Наука, 1980. 218 с.
4. *Van Rijn L.C.* Sediment transport. Pt 1:Bed load transport//J. Hydr. Ene-1984.- Vol.IIО.Nr 10.-P.1431-1456.
5. *Van Rijn L.C.* Sediment transport. Pt II: suspended load transport//J Hydr Eng.-1984.- Vol.IIО.Nr 11.-P.1613-1641.
6. *Караушев А.В.* Теория и методы расчета речных наносов. - Л.: Гидрометеоиздат, 1977. - 272с.
7. *Лятхер В.М., Гурин И.Н.* Гидравлические характеристики потоков над поверхностью, покрытой травянистой растительностью // Водные ресурсы, 1978, №3. С. 159 – 168.
8. *Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.* Турбулентные течения газозвеси. – К.: Наук. думка, 1987. - 240 с.
9. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978.- 336 с.
10. *Кріль С.І.* До питання про реологічне моделювання суспензій. – Прикладна гідромеханіка, 2003, том 5 (77), №2. С. 20-26.
11. *Гришин Н.Н.* Механика придонных наносов. – м.: Наука, 1982. – 160 с.
12. *Андерсон Д. Таннехилл Дж. Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. - М.: "Мир", 1990. - Т. 1,2. - 725с.
13. *Белов И.А.* Модели турбулентности.: Учебное пособие. 2-е изд., перераб. и доп. - Л.: ЛМИ, 1986. - 100 с.
14. *Савенко В.Я., Славинская Е.С.* Моделирование процессов развития внутренних течений с учетом анизотропии открытых турбулентных потоков. – К.:НТУ, 2004. – 176 с.
15. *Никитин И.К.* Сложные турбулентные течения и процессы теплопереноса. – К.:Наук. Думка, 1980. – 240 с.
16. *Кріль С.І.* Напорные взвесенесущие потоки. – К.: Наук. думка, 1990. - 160 с.
17. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969. - 742с.
18. *Мирицхулава Ц.Е.* Размыв русел и методика оценки их устойчивости. – М.: Изд-во «Колос», 1967. – 179 с.
19. *Славінська О.С.* Моделювання гідродинамічних процесів у відкритих зависенесучих потоках/ Олена Славінська // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. – Рівне, 2007. – Ч.2. – Вип. 4(40). – С. 141 – 153.
20. *Славінська О.С.* Дослідження розвитку загальних руслових деформацій в зоні впливу мостового переходу / Олена Славінська // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. К.: НТУ, 2008. – Вип. 75. – С. 286 – 295.