УДК 625.7/.8

Савенко В. Я., д-р техн. наук, **Славінська О. С.**, д-р техн. наук, **Козарчук І. А.**

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РОЗГАЛУЖЕНОГО ПОТОКУ В ЗОНІ ВПЛИВУ МОСТОВОГО ПЕРЕХОДУ З ГРУПОВИМИ ОТВОРАМИ

Анотація. В статті проаналізовані проблеми математичного моделювання гідродинаміки відкритих потоків. Авторами запропонована двовимірна модель гідродинаміки розгалужених річкових потоків. Досліджується метод розрахунку вторинних течії поперечної циркуляції в зоні розгалуження на основі двовимірної моделі руху рідини. Пропонується використовувати *k–ε* модель для замикання рівнянь переносу двовимірної моделі. Робиться висновок про доцільність використання алгебраїчних співвідношень для турбулентних напружень.

Ключові слова: річковий потік, мостовий перехід, біфуркація, поперечна циркуляція, загальний розмив, математична модель турбулентності.

Аннотация. В статье проанализированы проблемы математического моделирования гидродинамики открытых потоков. В статье предложена двумерная модель гидродинамики разветвленных речных потоков. Исследуется метод расчета вторичных течения поперечной циркуляции в зоне разветвления на основе двумерной модели движения жидкости. Предлагается использовать *k–ε* модель для замыкания уравнений переноса двумерной модели. Делается вывод о целесообразности использования алгебраических соотношений для турбулентных напряжений.

Ключевые слова: речной поток, мостовой переход, бифуркация, поперечная циркуляция, общий размыв, математическая модель турбулентности.

Annotation. The mathematical modeling problems of open streams hydrodynamics are analyzed in the article. A two-dimensional model of branched river flows hydrodynamics is proposed by the authors in the article. The calculation method of the secondary flow transverse circulation in the branching area is researched based on the two-dimensional model of the fluid motion. It is suggested to use the $k - \varepsilon$ model to close transfer equations of the two-dimensional model. The conclusion about the reasonability of using algebraic relations for the turbulent stresses is made.

Keywords: river stream, bridge, bifurcation, transverse circulation, general scour, mathematical model of turbulence.

Постановка проблеми. Річковий потік може розгалужуватися під дією тих чи інших топографічних і геологічних чинників. Наприклад, ділянки біфуркації утворюються в зоні впливу мостових переходів з груповими отворами, при обтіканні течією мостових опор і струменеспрямовуючих дамб тощо. Одним з важливих питань при гідравлічних розрахунках інженерних споруд є питання розділення і з’єднання потоків в зонах впливу мостових переходів з груповими отворами.

Використовуючи математичну модель, можливо визначити гідродинамічне поле швидкостей і тисків водотоку, що, в свою чергу, дозволить правильно розрахувати розподіл витрат і розмив при біфуркації потоку. Однак, незважаючи на значний досвід накопичений в галузі моделювання безнапірних потоків, дослідження ускладнюються тим, що досі не сформульована загальна замкнута система рівнянь турбулентного руху.

Основою для розробки математичної моделі руху річкового потоку в зоні впливу мостового переходу повинні бути рівняння динаміки реальної рідини в «напруженнях», тобто рівняння Нав’є-Стокса. Однак існуючі аналітичні і чисельні методи вирішення цих рівнянь розроблені лише для найпростіших задач, які мають обмежене практичне застосування, – для ламінарного руху рідини [13].

Проте течія в зоні впливу мостового переходу – це випадок турбулентного режиму руху рідини, який характеризується тим, що при заданих граничних умовах швидкості і тиски в потоці є не визначеними, а випадковими функціями координат і часу. Визначеними функціями є тільки математичні очікування. Випадкові функції, які виражають миттєві швидкості і тиски, а також їх математичні очікування (які зазвичай називаються осередненими швидкостями і тисками) неможливо знайти з рівнянь Нав'є-Стокса за сучасних методів вирішення цих рівнянь [4, 6].

Система рівнянь турбулентного руху, які описують гідродинамічні поля швидкостей і тисків у водотоках, є незамкнутою. Це значить, що її інтегрування викликає значні труднощі, пов'язані з нелінійністю рівнянь руху, а також складністю апроксимації в кінцевих різницях на досить дрібній сітці з великою кількістю вузлів. Тому для вирішення прикладних задач гідродинаміки використовують наближені математичні моделі течій, в яких не враховують тільки головні фактори, а другорядними нехтують [13].

Таким чином, **мета роботи** полягає в розробці математичної моделі розгалуження річкового потоку в зоні впливу мостового переходу з груповими отворами.

Аналіз досліджень і публікацій. В результаті поділу і злиття потоків різко змінюється гідродинамічна структура і транспортуюча здатність потоків, яка обумовлена: помітним викривленням планових струменів; утворенням значних (по відношенню до планових розмірів взаємодіючих потоків) рециркуляційних зон; появою значних швидкостей вторинних течій поперечної циркуляції; відповідно трансформацією епюр розподілу швидкостей як по глибині, так і по ширині потоку; наявністю відривних течій аперіодичного характеру, які призводять до істотного підвищенням пульсаційних складових швидкостей та виникнення розмивів і намивів в руслі.

Дослідження проблем гідродинаміки ґрунтується на використанні рівнянь руху, енергії, нерозривності і переносу рідкого середовища. Ці рівняння виражають фундаментальні закони механіки і встановлюють співвідношення між кінематичними і динамічними характеристиками течії рідини та її фізичними властивостями.

Однак вирішення гідродинамічних задач пов’язане не тільки з подоланням математичних труднощів, а, головним чином, з проблемою турбулентності. Рух рідини в реальних водотоках характеризується безперервною пульсацією швидкостей і тисків.

Тому найбільш перспективним шляхом вирішення даної проблеми є використання диференційних рівнянь осередненого руху, які мають практичне застосування. Ці рівняння отримані Рейнольдсом з рівнянь Нав’є-Стокса на основі прийнятого ним припущення, що дійсний (актуальний) рух, незважаючи його нерегулярний і випадковий характер, все ж описується цими рівняннями.

Система рівнянь Рейнольдса є незамкнутою, внаслідок чого її інтегрування викликає значні труднощі. Тому для вирішення прикладних задач використовують наближені математичні моделі, в яких враховують тільки головні фактори.

Рівняння двовимірної моделі також повинні виражати фундаментальні закони механіки з урахуванням наближень, обумовлених тим, що реальні тривимірні течії розглядаються в двовимірній плановій ідеалізації. Припущення при використанні планової ідеалізації тривимірних течії в руслах можна аналізувати, якщо рівняння двовимірної моделі отримати внаслідок осереднення по глибині загальних рівнянь тривимірного турбулентного руху рідини [17].

Основна частина дослідження. Задачі розрахунку гідродинамічних полів швидкостей і тисків в природних і штучно стиснутих руслах відносяться до задач теорії мілкої води, тобто коли глибина потоку значно менша за горизонтальні планові розміри. Це дозволяє розраховувати розподіл середніх за глибиною швидкостей в плані.

У зв’язку з цим авторами [12, 13, 14, 17] пропонується виведення рівнянь двовимірної моделі гідравліки з рівнянь осередненого тривимірного турбулентного руху в декартових координатах. Рівняння двовимірної моделі при цьому отримуються шляхом інтегрування тривимірних рівнянь Рейнольдса по вертикалі від відмітки дна до вільної поверхні, тобто по глибині потоку.

Під час інтегрування приймаються наступні припущення:

- рух приймається усталеним;
- нехтують складовими, які враховують вклад вторинних течій поперечної циркуляції;
- проекція об'ємної сили на вертикальну вісь z дорівнює X_z = -g, а на горизонтальні осі x та y $X_x = X_y = 0$;
- при оцінці порядку складових нехтують складовими вищого порядку малості порівняно з основними складовими;
- значення тиску на вільній поверхні потоку P_H приймається постійним, тобто не розглядаються бароклінні течії;
- при інтегруванні нелінійних конвективних складових нерівномірність розподілу швидкостей по вертикалі враховується за допомогою коефіцієнта α.

Таким чином після інтегрування загальні рівняння руху двовимірної моделі матимуть вигляд:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + \alpha_h\left(\frac{\partial U_x^2}{\partial x} + \frac{\partial U_x U_y}{\partial y}\right) = -g\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\langle \bar{V}_x'^2\rangle - \langle \bar{V}_z'^2\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial y}\langle \bar{V}_x'\bar{V}_y'\rangle + \frac{1}{\rho h}\left(\tau_{x_H} - \tau_{x_{z_0}}\right); \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} + \alpha_h\left(\frac{\partial U_x U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y^2}{\partial y}\right) = -g\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\langle \bar{V}_y'^2\rangle - \langle \bar{V}_z'^2\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial x}\langle \bar{V}_x'\bar{V}_y'\rangle + \frac{1}{\rho h}\left(\tau_{y_H} - \tau_{y_{z_0}}\right); \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U_x h}{\partial x} + \frac{\partial U_y h}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

При русі річкового потоку виникають вторинні течії поперечної циркуляції двох видів [4, 9, 13, 14, 16]: вторинні течії першого виду, обумовлені відцентровими силами на повороті русла, і вторинні течії другого виду, що виникають як у скривленому, так і в прямолінійному потоці, обумовлені нерівномірністю розподілу турбулентних напружень по живому перерізу русла, а саме нестійкістю основного осередненого руху потоку. Перший вид циркуляцій виникає не тільки на ділянках природних заокруглень потоку, а й у штучно стиснутих руслах, біля голови струмененапрямних дамб, а другий – при різнорідній шорсткості і при різких змінах форми русла в поперечному перерізі. Роль вторинних течій у формуванні русла, перенесенні наносів в природних і штучно стиснутих руслах досить суттєва, що підтверджується теоретичними і експериментальними дослідженнями [1, 2, 3, 5, 7, 19, 20]. Ці течії також здійснюють поперечне перенесення імпульсу в плані і при інтенсивній поперечній циркуляції, яка відбувається в зоні впливу мостових переходів та інших гідротехнічних об’єктів, цей ефект необхідно враховувати при вирішенні рівнянь двовимірної моделі [13].

Внаслідок викривлення потоку, що відділяється, в ньому розвивається поперечна циркуляція, що відхиляє поверхневі струмені від входу у відвідне русло і направляє донні струмені у відвід.

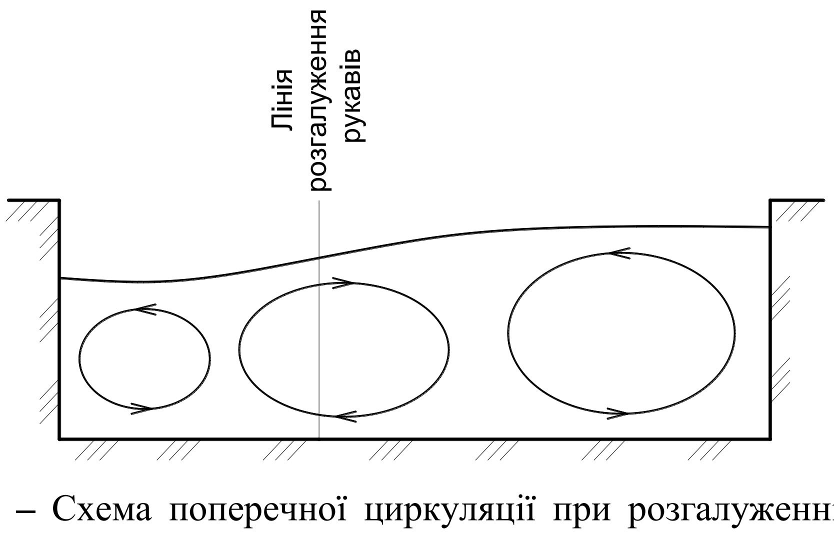

Рисунок 1 – Схема поперечної циркуляції при розгалуженні відкритого потоку

На рис. 1 зображений тип поперечної циркуляції, властивий річкам, які мають тенденцію до розпадання на рукави. При цьому типі потік розпадається на дві чи навіть три частини з утворенням стрижневих ліній у місцях низхідного руху струменів. Тут відбувається розмив наносів і, як наслідок, поглиблення дна. І, навпаки, в місцях з'єднання обох частин потоку, де мають місце висхідні течії води, відбувається часткове відкладення донних наносів [18].

При розрахунку поперечної циркуляції в природних і штучно стиснутих руслах необхідно брати до уваги, що кривизна потоку в плані непостійна і змінює свій знак. Тобто буде відбуватися накладення поперечної циркуляції, яка «надходить» з вище розташованої ділянки, на поперечну циркуляцію, яка виникає на ділянці, що розглядається. В роботі [17] запропоновано математичний опис механізму поперечної циркуляції, який враховує «передісторію» осередненого руху в руслі, в тому числі і поперечну циркуляцію вище за течією.

Для визначення вкладу поперечної циркуляції [12, 13] при інтегруванні по глибині нелінійних складових рівнянь Рейнольдса виду $\frac{\partial}{\partial i}\overline{V_i V_j}$ в локальній поперечній швидкості виділяють складові вторинних течії поперечної циркуляції u_y та u_z, тобто $\overline{V_y}$ і $\overline{V_z}$ представлені у вигляді:

$$\overline{V_y} = U_y + u_y; \quad \overline{V_z} = u_z \tag{4}$$

При інтегруванні по глибині з виконанням умов:

$$\langle u_y \rangle \equiv 0; \quad u_z\big|_{z=H} = u_z\big|_{z=z_0} = 0 \tag{5}$$

складові виду $\frac{\partial}{\partial z}\overline{V_i V_z}$ $(i = x, y)$ перетворюються на нуль.

Отже, рівняння двовимірної моделі з урахуванням впливу поперечної циркуляції:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} + \alpha_h\left(\frac{\partial U_x^2}{\partial x} + \frac{\partial U_x U_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\langle \bar{V}_x u_y\rangle =$$
$$= -g\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\langle \bar{V}_x'^2\rangle - \langle \bar{V}_z'^2\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial y}\langle \bar{V}_x'\bar{V}_y'\rangle + \frac{1}{\rho h}\left(\tau_{x_H} - \tau_{x_{z_0}}\right); \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_y}{\partial t} + \alpha_h\left(\frac{\partial U_x U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_y^2}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\langle \bar{V}_x u_y\rangle + \frac{\partial}{\partial y}\langle u_y^2\rangle =$$
$$= -g\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\langle \bar{V}_y'^2\rangle - \langle \bar{V}_z'^2\rangle\right) - \frac{\partial}{\partial x}\langle \bar{V}_x'\bar{V}_y'\rangle + \frac{1}{\rho h}\left(\tau_{y_H} - \tau_{y_{z_0}}\right); \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U_x h}{\partial x} + \frac{\partial U_y h}{\partial y} = 0. \quad (8)$$

де $\frac{\partial}{\partial y}\langle \bar{V}_x u_y\rangle, \frac{\partial}{\partial x}\langle \bar{V}_x u_y\rangle, \frac{\partial}{\partial y}\langle u_y^2\rangle$ – складові, які враховують вплив поперечної циркуляції.

$\langle \bar{V}_x u_y\rangle$ характеризує конвективне перенесення імпульсу вторинними течіями, може бути представлений у вигляді:

$$\langle \bar{V}_x u_y\rangle = \frac{U_x}{h}\int_{z_0}^{H} u_y dz \quad \text{і} \quad \langle u_y^2\rangle = \int_{z_0}^{H} u_y^2 dz \quad (9)$$

При цьому також повинна виконуватися умова (5).

Система рівнянь двовимірної моделі (1)-(3) незамкнута, тобто в рівняннях руху присутні дотичні і нормальні турбулентні напруження. Наявність в рівняннях цих напружень призводить до необхідності апроксимації членів турбулентного перенесення за допомогою певної моделі турбулентності. Виділяється два основних методи описання моделей турбулентності: інтегральні і диференційні. Для відповідності моделі турбулентності рівнянням двовимірної моделі для замикання цієї системи необхідно використовувати моделі, які займають проміжне положення між вищеназваними двома моделями [13].

Згідно з даними численних досліджень [11, 13, 21, 22] для обчислення осереднених по глибині величин доцільно використовувати модифіковану *k–ε* модель турбулентності. Використовуючи підхід, запропонований А. Растоджі та В. Роді [22], зміну осередненої за глибиною кінетичної енергії турбулентності і швидкості її дисипації можна описати наступними рівняннями перенесення [15]:

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial \tilde{k}}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \tilde{k}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_k}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_k}\frac{\partial \tilde{k}}{\partial y}\right) + P_{2d} - \tilde{\varepsilon}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} + \bar{U}_x \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} + \bar{U}_y \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y}\right) + c_{\varepsilon_1}\frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{k}}P_{2d} - c_{\varepsilon_2}\frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}}. \tag{11}$$

Запропонована *k–ε* модель ґрунтується на понятті коефіцієнта турбулентної в’язкості v_t. Складність аналізу турбулентності призвела до дослідження з простішою схемою руху, а саме до прийняття коефіцієнта турбулентної в’язкості скалярною величиною, тобто ізотропною. Введення поняття однорідної й ізотропної турбулентності, як окремого випадку турбулентних течій, спростило математичний аналіз рівнянь турбулентного руху. Але модель однорідної й ізотропної турбулентності не може описати реальні турбулентні течії, зокрема внутрішні течії. Згідно з рядом незалежних експериментальних досліджень турбулентного потоку було встановлено, що турбулентна в’язкість є анізотропною характеристикою [10], а саме: уздовж вторинної течії вона менша, ніж в напрямку основної течії, приблизно на 30-40 %.

Анізотропна природа турбулентної в’язкості більш повно розкрита в моделях рейнольдсових напружень, де відсутнє обмеження, що накладається прийняттям гіпотези Буссінеска про зв’язок турбулентних напружень з середньою швидкістю деформації. Але моделі рейнольдсових напружень в модельній формі містять найбільшу кількість рівнянь і констант, що незручно використовувати як засіб вирішення інженерних задач. Проте ці рівняння є основою, з якої були отримані алгебраїчні вирази для перенесення компонентів турбулентних напружень.

Алгебраїчні вирази широко апробовані при використанні модельних апроксимацій, які дозволяють виключити похідну за часом і спростити дифузійний та дисипативний члени і член кореляції пульсацій тиску зі швидкостями деформацій. Такий підхід спрощення до алгебраїчної форми дає можливість не вирішувати диференційні рівняння для рейнольдсових напружень, а використовувати їх в якості коригуючих співвідношень, що дозволяють зняти деякі обмеження, властиві простішим моделям. При використанні алгебраїчних співвідношень зберігаються фундаментальні властивості рівнянь для рейнольдсових напружень і, відповідно, коефіцієнт турбулентної в’язкості розглядається як неізотропна величина, чому сприяє також наявність зміни гідравлічних опорів на стінках у розрахунковій області. Тобто скалярний коефіцієнт в’язкості замінюється турбулентної в'язкістю, в якій враховується анізотропія турбулентності [14].

Внаслідок того, що впливом архімедових сил в даній задачі можна знехтувати, алгебраїчні співвідношення, які описують перенесення турбулентних напружень величини $\overline{V_x'V_y'}$, $\overline{V_x'V_x'}$, $\overline{V_y'V_y'}$, для випадку двовимірної ідеалізації можна привести до вигляду:

$$\langle\overline{V_x'V_y'}\rangle = \tilde{k}\left[\frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{xy}}{\tilde{\varepsilon}}\right)}{c_1 + \frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}} - 1}\right],$$

$$\langle\overline{V_x'V_x'}\rangle = \tilde{k}\left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{xx}}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{2}{3}\frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}}\right)}{c_1 + \frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}} - 1}\right],$$

$$\langle \overline{V_y'V_y'} \rangle = \tilde{k}\left[\frac{2}{3} + \frac{(1-\gamma)\left(\frac{P_{yy}}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{2}{3}\frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}}\right)}{c_1 + \frac{P_{2d}}{\tilde{\varepsilon}} - 1}\right]. \tag{12}$$

де $\tilde{k}$ – турбулентна кінетична енергія;

$\tilde{\varepsilon}$ – дисипація кінетичної енергії;

γ – параметр релаксації;

P_i – члени генерації турбулентності;

c_i – емпіричні константи.

ВИСНОВКИ

Для широкого кола практичних задач доцільним є застосування двовимірної моделі руху розгалуженого річкового потоку, що враховує головні фактори, які впливають на формування поля швидкостей і тисків потоку. При розрахунку природних і штучно стиснутих русел необхідно також враховувати вплив вторинних течій поперечної циркуляції, оскільки вони відіграють важливу роль у формуванні русла і транспортуванні наносів.

Для замикання двовимірних рівнянь руху турбулентного потоку доцільно використовувати *k*–*ε* модель, яка є досить популярною завдяки своїй універсальності і відносній простоті. За допомогою цієї моделі було розраховано велику кількість різноманітних течій, в тому числі течії з рециркуляційними зонами. Алгебраїчні співвідношення для рейнольдсових напружень дозволяють спростити модель, не вирішуючи диференційні рівняння для цих напружень, і в той же час вони дають змогу врахувати анізотропний стан турбулентного потоку при розгалуженні в зонах впливу мостових переходів з груповими отворами.

ЛІТЕРАТУРА

1. Андреев О. В. Регулирование рек затапливаемыми сооружениями: Сообщение №11. – М.: Трансжелдориздат, 1950. – 20 с.

2. Болдаков Е. В. Переходы через водотоки. – М.: Транспорт, 1965. – 422 с.

3. Караушев А. В. Речная гидравлика. – Л.: Гидрометеоиздат, 1969. – 416 с.

4. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973. – 280 с.

5. Курганович А. А., Товбич О. В. Поперечная циркуляция и деформация русла у струенаправляющих дамб мостовых переходов // Гидротехн.стр-во., 1990. - №5. – С. 45-46.

6. Ламли Дж. Модели второго порядка для турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, 1984. – С. 7-34.

7. Латышенков А.М. Струенаправляющие дамбы. – М.: ВНИИВОДГЕО, 1956. – 196 с.

8. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.

9. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. – М.: ИЛ, 1951. – 576 с.

10. Риминг И. Л., Фаннелоп Т. К. Закон стенки для трехмерных течений, учитывающий влияние скоса и шероховатости. // Трехмерные турбулентные пограничные слои. – М.: Мир, 1985. – С. 316-330.

11. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений. – М.: Мир, 1984. – С. 227-322.

12. Рутковская И. А. Двумерная математическая модель и метод расчета течения жидкости в узлах разветвления открытых потоков. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – К.: 2000.

13. Савенко В. Я. Математичні моделі і методи розрахунку квазітрьохмірних безнапірних потоків. – К.: Техніка, 1995. – 188 с. Мова рос.

14. Савенко В. Я, Славинская Е. С. Моделирование процессов развития внутренних течений с учетом анизотропии открытых турбулентных потоков. – К.: НТУ, 2004. – 176 с.

15. Савенко В. Я., Славінська О. С., Козарчук І. А. Математичне моделювання течії в зонах розгалуження річкового потоку // Современные компьютерно-инновационные технологии проектирования, строительства, эксплуатации автомобильных дорог и аэродромов. – Х.: ХНАДУ, 2012. – С. 275-284.

16. Фидман Б. А. Гидродинамика речных течений // Динамика и термика речных потоков. – М.: Наука, 1972. – С. 5-15.

17. Шеренков И. А. Прикладные плановые задачи гидравлики спокойных потоков. – М. Энергия, 1978. – 240 с.

18. Щукин И. С. Общая геоморфология. Том 1. – М.: Издательство Московского университета, 1960. – 616 с.

19. Fisher H. B. Longitudional dispersion and turbulent mixing in open channel flow // Ann.Rev.Fluid Mech., 1973 – Vol.5. – P. 59-78.

20. Fukuoka S., Sayre W. W. Longitudional dispersion in sinuous channels // J.Hydr.Div.Proc.ASCE, 1973. – Nr, HY1. – P. 195-217.

21. Li Fu-tian, Ni Hao-ging. Application and development of turbulence model for engineering practice // Journal of hydraulic engineering, 2001. – N5. – P. 22-31.

22. Rastogi A. K., Rodi W. Predictions of heat and mass transfer in open channels // J.Hydr.Div., ASCE, 1978. – №HY3. – P. 397-420.