УДК 625.7/. 8

Осяєв Ю.М., канд. тех. наук, **Леонтьєв Ю.М.,** канд. тех. наук

ВИКОРИСТАННЯ РОЗПОДІЛУ ДІРІХЛЕ В ЙМОВІРНИХ СТАТИСТИЧНИХ МЕТОДАХ ДОСЛІДЖЕННЯ ВИКОРИСТАННЯ НОВІТНІХ МАТЕРІАЛІВ У ДОРОЖНЬОМУ БУДІВНИЦТВІ

Анотація. У статті розглянуто основні методи обробки статистичних даних за допомогою бета-розподілу, узагальненням якого є розподіл Діріхле.
Ключові слова: оцінка новітніх технологій при будівництві та ремонтах автомобільних доріг,.бета – розподіл,розподіл Діріхле.

Аннотация. В статье рассмотрены основные методы обработки статистических данных с помощью бета-распредения, обобщением которого является распределение Дирихле
Ключевые слова:оценка новых технологий при строительстве и ремонтах автомобильных дорог, бета – распределение, распределение Дирихле.

Abstract. The article discusses the basic methods of statistical data with beta-raspredeniya, which is a generalization of the Dirichlet distribution
Keywords: evaluation of new technologies in the construction and repair of roads, beta - distribution, Dirichlet distribution.

Постановка проблеми. Одним із актуальних напрямів в області проведення прикладних досліджень є обґрунтування можливості застосування відповідного математичного апарату для вирішення техніко – економічних задач з метою підвищення об’єктивності результатів дослідження.

Сутність проблеми. Висока інформаційна невизначеність в період впровадження новітніх технологій при будівництві та ремонтах автомобільних доріг та прогнозування визначення відповідних критеріїв ефективності.

Мета статті. Можливість застосування відповідного математичного апарату, зокрема бета – розподілу, для вирішення техніко – економічних задач з метою підвищення об'єктивності результатів. Особливого значення це набуває при оцінці втілення новітніх технологій при будівництві та ремонтах автомобільних доріг

Виклад основного матеріалу. Одним із актуальних напрямів в області проведення прикладних досліджень є обґрунтування можливості застосування відповідного математичного апарату для вирішення техніко – економічних задач з метою підвищення об'єктивності результатів. Особливого значення набуває застосування адекватного математичного апарату при оцінці новітніх технологій при будівництві та ремонтах автомобільних доріг, оскільки висока інформаційна невизначеність в період впровадження новітніх технологій припускає оцінку ймовірності прогнозування різних техніко – економічних показників.

У теорії ймовірностей і математичній статистиці розподіл Діріхле , позначають часто Dir (α), - це сімейство безупинних багатомірних вірогідних розподілів параметризованих вектором α не від'ємних дійсних чисел. Розподіл Діріхле є узагальненням бета-розподілу на багатовимірний випадок. Тобто, його функція щільності повертає значення імовірності того, що імовірність кожного з *K* взаємовиключних подій дорівнює *x* за умови, що кожна подія спостерігалася α_i-1 разів.

Функція щільності імовірності для розподілу Діріхле порядку *K* є:

$$f(x_1,....x_{k-1};a_1,....a_k)=\frac{1}{B(a)}\Pi_{i=1}^{k}x_i^{a_i-1} \quad (1)$$

де, $x_i \geq 0,\quad a_i \geq 0,\quad \sum_{i=1}^{k} x_i = 1$

Нехай $X=(X_1,\ldots X_k) \sim Dir(\alpha)$ і $a_0=\sum_{i=1}^{k} a_i$,

тоді $$E[X_i \mid a]=\frac{a_i}{a_0} \quad (2)$$

$$Var[X_i \mid a]=\frac{a_i(a_0-a_1)}{a_0^2(a_0+1)} \quad (3)$$

$$C_{ov}\left[X_i X_j \mid a\right] = \frac{-a_i a_j}{a_0^2 (a_0 + 1)}$$

Модою розподілу є вектор х (x_1, ...,x_K)

$$\text{з} \quad x_i = \frac{a_i - 1}{a_0 - k} \qquad a_i > 1 \tag{4}$$

Розподіл Діріхле є сполученим апріорним розподілом до мультиномінального розподілу, а саме:

$$\text{якщо} \quad \beta \mid X = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_k) \mid X \sim Mult(X) \tag{5}$$

де β_i - число входжень i у вибірку з n крапок дискретного розподілу на $\{1, ..., K\}$ визначеного через X,

де $X \mid \beta \sim Dir(a + \beta)$

Цей зв'язок використовується в Байєсівській статистиці для того, щоб оцінити сховані параметри X, дискретного вірогідного розподілу маючи набір з n вибірок. Очевидно, якщо апріорний розподіл позначений як Dir(α), то Dir(α+β) є апостеріорний розподіл після серії спостережень з гістограмою β.

Найчастіше при вивченні розподілу техніко – економічних параметрів використовується нормальний закон. Проте даний підхід не завжди є досить обґрунтованим і, як наслідок, може дати лише приблизні оцінки. Крім того, такі дослідження припускають наявність великого масиву вихідних даних, що не завжди можливо при обмеженому колі досліджуваних об'єктів. У ряді робіт зазначено, що як типовий розподіл певних параметрів у часі може бути прийнятий бета – розподіл (розподіл Діріхле) [1,3].

Таким чином при прогнозуванні конкретних техніко – економічних параметрів з обґрунтуванням алгоритму визначення кількісних значень його статистичних характеристик. Відомо, що випадкова величина має бета - розподіл з параметрами (a, β) $(a > 0, \beta < 0)$, якщо

$$f(t) = \frac{\Gamma(a + \beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} t^{a-1} (1 - t)^{\beta - 1}, \tag{7}$$

де $t \in [0.1]$; $0,\ t \notin [0.1]$

При використанні нормованої величини досліджуваного параметра t (в інтервалі змін [0;1]) щільність ймовірності прогнозованого параметру має вигляд:

$$f(t) = ct^{a-1}(1-t)^{\beta-1}, \tag{8}$$

де a, β – статистичні параметри розподілу,

с – константа

Величину константи можна визначити за допомогою

$$c = \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}, \tag{9}$$

де Г(n) = (n-1), (10)

позначимо $$\frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a+\beta)} = B(a,\beta) \tag{11}$$

Тоді

$$f(t) = \frac{1}{B(a,\beta)} t^{a-1}(1-t)^{\beta-1}, \tag{12}$$

та $\int_0^1 f(t)dt = 1$

Математичне очікування і дисперсія випадкові величини в цьому випадку дорівнюють

$$M(t) = \frac{a}{a+\beta} \tag{13}$$

$$D(t) = \frac{a\beta}{(a+\beta)^2(a+\beta+1)} \tag{14}$$

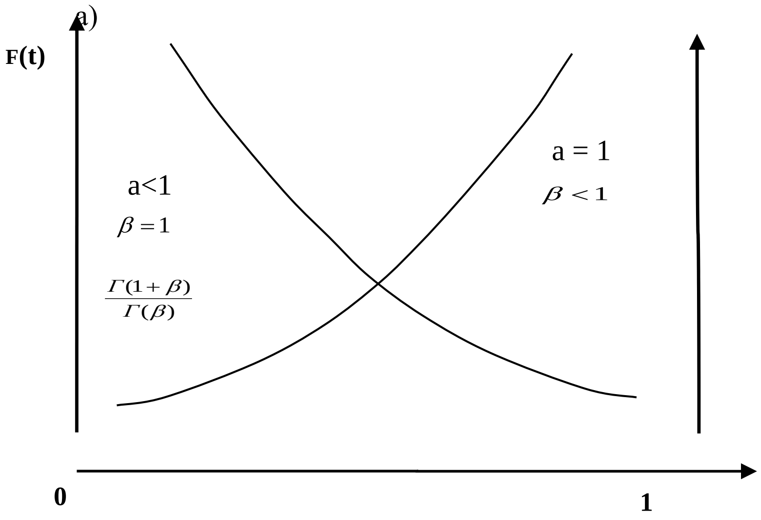
На рис. 1 наведені приклади кривих функції щільності бета – розподілу при різних значеннях її статистичних параметрів:

Розглянемо зміну досліджуваного параметра на інтервалі [a,b] тобто $a \le X \le b$. В цьому випадку :

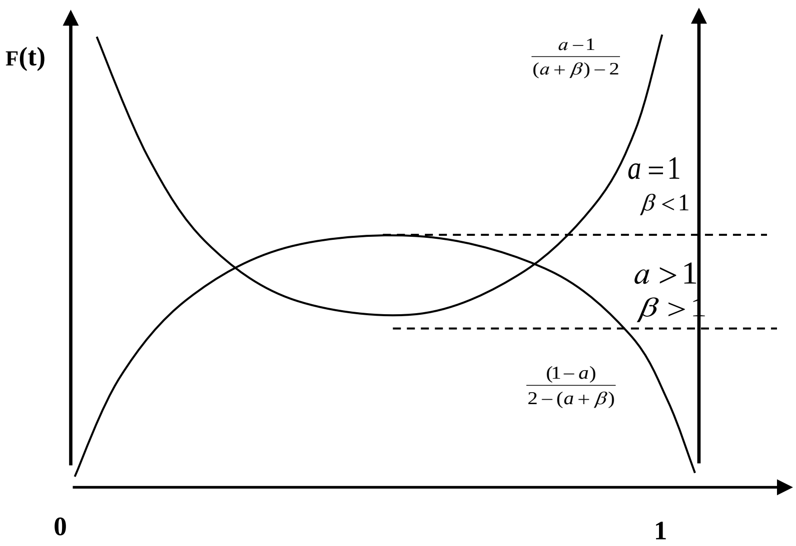
$$t = \frac{x-a}{b-a}, \qquad x = a + (b-a)\cdot t$$

$$f(x) = \frac{1}{(b-)^{a+\beta-1}\cdot B(a;\beta)}(x+a)^{a-1}(b-x)^{\beta-1} = c(x-a)^{a-1}(b-x)^{\beta-1}, \tag{15}$$

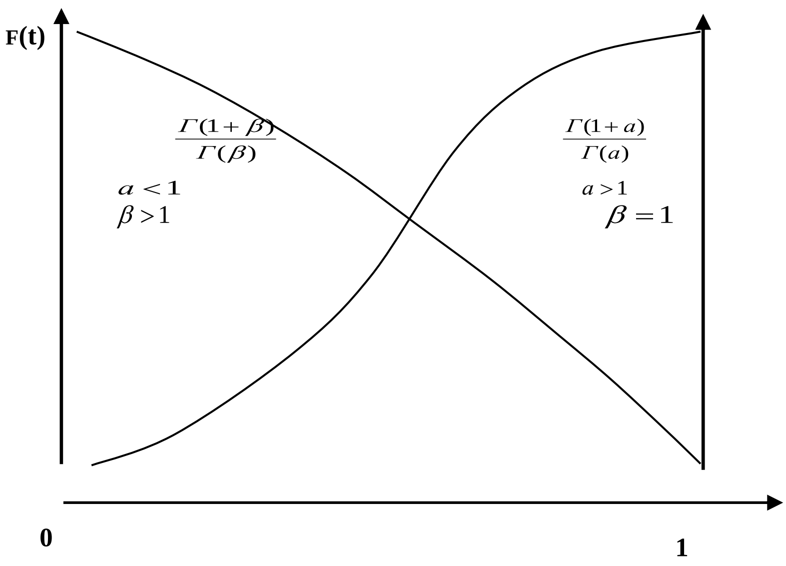
а)


F(t)
a<1
$\beta = 1$
$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)}$
a = 1
$\beta < 1$
0
1

б)


F(t)
$\frac{a-1}{(a+\beta)-2}$
$a = 1$
$\beta < 1$
$a > 1$
$\beta > 1$
$\frac{(1-a)}{2-(a+\beta)}$
0
1

в)


F(t)
$\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)}$
$a < 1$
$\beta > 1$
$\frac{\Gamma(1+a)}{\Gamma(a)}$
$a > 1$
$\beta = 1$
0
1

г)

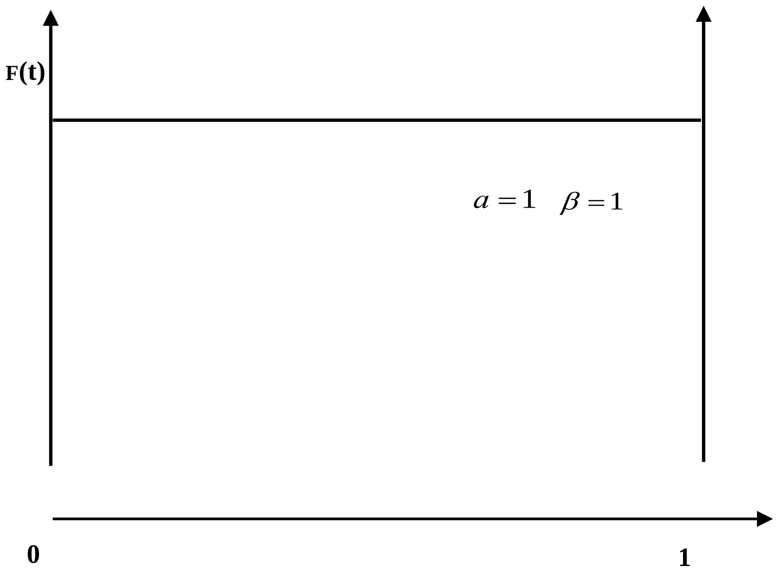


Рисунок 1 – Щільність бета-розподілу

Тобто визначення константи бета-розподілу визначається як

$$c = \frac{1}{(b-a)^{a+\beta-1} B(a;\beta)}, \tag{16}$$

$$M(x) = a + (b-a)$$

$$M(t) = a + (b-a)\frac{a}{a+\beta} = \frac{a\beta + ba}{a+\beta} \tag{17}$$

Дисперсія випадкової величини складає:

$$D(x) = (b-a)^2 \qquad D(t) = \frac{2\beta(b-a)^2}{(a+\beta)^2(a+\beta+1)} \tag{18}$$

З огляду на те,що $M(x) = \bar{x}_b$ і $D(x) = \sigma_b^2$ (де $\bar{x}_b$ і σ_b^2 - відповідно оцінка параметра: його дисперсія, які можуть бути знайдені за даними вибіркової сукупності). Оцінки статистичних параметрів a і β можуть бути отримані при рішенні системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{a\beta + b\varphi}{\varphi + \beta} = \bar{x}_b \\ \dfrac{a\beta(b-a)^2}{(a+\beta)^2(a+\beta+1)} = \sigma_b^2 \end{cases} \tag{19}$$

Крім того, припустивши за емпіричними даними вид кривої щільності бета – розподілу і задаючи відповідні значення параметрів a і β (рис.1), можна визначити величину константи розподілу по формулі (16) і здійснити перевірку відповідності емпіричного розподілу теоретичному припущенні за допомогою відомих критеріїв математичної статистики.

Таким чином , при вивченні розподілу техніко – економічних параметрів досліджуваних новітніх технологій можна досліджувати бета – розподіл із щільністю імовірності, обумовленої з залежності (15), де a - мінімальна оцінка параметра, а b - максимальна оцінка параметра.

Висновки

1. Розподіл Діріхле може бути прийнятий у якості типового розподілу при дослідженні техніко-економічних параметрів новітніх технологій в часі при будівництві та ремонтах автомобільних доріг, що дозволяє одержати функцію щільності імовірності досліджуваного параметра під час відсутності значного масиву вихідних даних і об’єктивно визначити його оцінки.

2. Визначення конкретних статистичних характеристик розподілу, що вивчаються, може бути проведене на основі визначеного у статті розрахунку, а також за допомогою аналізу форми розподілу емпіричних даних і подальшого аналізу за допомогою статистичних критеріїв відповідності емпіричного і теоретичного розподілів.

3. Розглянутий метод дослідження розширює можливості застосування ймовірних методів оцінки техніко-економічних процесів і показників, що веде до підвищення об’єктивності і обґрунтованості отриманих результатів.

Література

1. Годенко Д.И. Статистические методы в экономических системах. – М.: Статистика, 1970. – С. 320.

2. Грушко И.М., Сиденко В.М. Основы научных исследований. 3-е изд. – Х.: Вища школа. Изд-во при Харьк.ун-те,1983. – 224 с.

3. Ковалев Д.,Плетникова И. Количественная оценка уровня єкономической безопасности предприятия // Экономика Украины. 2001. - №4 – С.35-40.

4. Hovanov N., Kornikov V., Seregin I. Multicriteria estimation under uncertainty // Proceedings of the International Conference Signals, Data, Systems. Heiderabad (India). December 12-14, 1994. Vol. 1. Heiderabad: AMSE Press, 1994. - P. 83–91.

Osiaiev Iu.M.,Bryk Douglas. The use of the dirichlet distribution in probability statistic methods of research // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: Науково-технічний збірник. Вип. 87. - К.: НТУ, 2013. – С.67-70.