УДК 539.3

Марчук О.В. д-р техн. наук

ДОСЛІДЖЕННЯ УРАХУВАННЯ НАВАНТАЖЕНЬ ТЕРТЯ ПРИ РОЗРАХУНКУ ДОРОЖНІХ ОДЯГІВ НА МОСТАХ НАПІВАНАЛІТИЧНИМ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Анотація. Побудовано варіант напіваналітичного методу скінченних елементів. Він полягає у застосування у плані конструкції полілінійної апроксимації. Розподіл шуканих функцій за товщиною шляхом розв'язання відповідної системи диференціальних рівнянь. На основі побудованої методики досліджено вплив тертя на напружено-деформований стан дорожнього покриття на мостовому переході. Показано, що розрахунок дорожнього покриття на мостовому переході без урахування тертя не відображає адекватно напружено-деформований стан дорожнього покриття. Урахування тертя приводить до виникнення небезпечних розтягувальних напружень у верхньому шарі. Їх величина більша ніж від'ємні напруження від нормального навантаження. В сумі вони мають суттєве додатнє значення.
Ключові слова: напіваналітичний метод скінченних елементів, дорожнє покриття на мостовому переході, навантаження тертя.

Аннотация. Построен вариант полуаналитического метода конечных элементов. Он заключается в применение в плане конструкции полинейной аппроксимации. Распределение искомых функций за толщиной путем решения соответствующей системы дифференциальных уравнений. На основе построенной методики исследовано влияние трения на напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия на мостовом переходе. Показано, что расчет дорожного покрытия на мостовом переходе без учета трения не отображает адекватно напряженно-деформированное состояние дорожного покрытия. Учет трения приводит к возникновению опасных растягивающих напряжений в верхнем слое. Их величина больше чем

отрицательные напряжения от нормальной нагрузки. В сумме они имеют существенное положительное значение.
Ключевые слова: полуаналитический метод конечных элементов, дорожное покрытие на мостовом переходе, нагрузка трения.

Abstract. The variant of semianalytical method of eventual elements is built. He consists in application in the plan of construction of polineynoy approximation. Distributing of the functions sought after after a thickness by the decision of the proper system of differential equalizations. On the basis of the built method the influence of friction on the tense-deformed state of road coverage on bridge transition is explored. It is shown, that computation of road coverage on bridge transition without consideration of friction does not represent the adequately tense-deformed state of road coverage. Consideration of friction results in the origin of dangerous stretching tensions in an overhead layer. Their size more than negative tensions from the normal loading. In a sum they have the substantial positive value.
Keywords:. semianalytical method of finite elements, road coverage on bridge transition, loading of friction.

Вступ

В останні роки для проведення тих чи інших досліджень набувають популярності різні чисельно-аналітичні схеми розрахунку будівельних споруд [1,2]. В даному повідомленні на основі розробленого автором варіанту напіваналітичного метода скінченних елементів проаналізовано вплив урахування тертя на напружений стан дорожніх одягів на мостових переходах.

Метод дослідження

Введемо наступну апроксимацію шуканих функцій переміщень і напружень в плані скінченного елемента:

$$U_1^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)v_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)v_2^{(k)}(z);$$

$$U_3^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)\, w_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\, w_2^{(k)}(z);$$
$$\sigma_{13}^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)\, \tau_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\, \tau_2^{(k)}(z);$$
$$\sigma_{33}^{(k)}(x,z) = \varphi_1(x)\, \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\, \sigma_2^{(k)}(z); \qquad (1)$$

де $\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$; $\varphi_2(x) = \frac{x}{l}$; l – довжина скінченного елемента; k – номер шару; $v_i^{(k)}(z), w_i^{(k)}(z), \tau_i^{(k)}(z), \sigma_i^{(k)}(z)$ – шукані функції розподілу переміщень і напружень в i -у вузлі.

Компоненти тензора деформацій визначаємо на основі відомих співвідношень Коші .

Повздовжні напруження знаходимо із закону Гука

$$\sigma_{11}^{(k)} = B_{11}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x) v_1^{(k)}(z) + \varphi_{2,1}(x) v_2^{(k)}(z)\right) +$$
$$+ B_{13}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\, \sigma_1^{(k)}(z) + \varphi_2(x)\, \sigma_2^{(k)}(z)\right). \qquad (2)$$

Розв’язувальну систему диференціальних рівнянь рівноваги скінченного елемента отримаємо з варіаційного принципу Рейсснера

$$\delta\ R^{(k)} - \delta\ A_1^{(k)} = 0. \qquad (3)$$

Тут $\delta\ R^{(k)}$ – варіація функціонала Рейсснера; $\delta\ A_1^{(k)}$ – варіація роботи зовнішніх сил.

Варіація функціонала Рейсснера має вигляд

$$\delta\ R^{(k)} = \int_l \int_{a_{k-1}}^{a_k} \{\ (B_{11}^{(k)} U_{1,1}^{(k)} + B_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)})\delta\ U_{1,1}^{(k)} +$$
$$+ \sigma_{33}^{(k)}\delta\ U_{3,3}^{(k)} + (B_{13}^{(k)} U_{1,1}^{(k)} + U_{3,3}^{(k)} - B_{33}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)})\delta\ \sigma_{33}^{(k)} +$$
$$+ \sigma_{13}^{(k)}\delta\ (U_{1,3}^{(k)} + U_{3,1}^{(k)}) + (U_{1,3}^{(k)} + U_{3,1}^{(k)} - \frac{\sigma_{13}^{(k)}}{G_{13}^{(k)}})\delta\ \sigma_{13}^{(k)}\} dzdl. \qquad (4)$$

Підставляючи у вираз (4) апроксимуючу залежність (1), одержуємо

$$\delta\ R^{(k)}=\int_{l}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left\{\left[B_{11}^{(k)}\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(z)\right)+\right.\right.$$

$$\left.+B_{13}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\right]\delta\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)w_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_{2,3}^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left[B_{13}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2.1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+\left(\varphi_1(x)w_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_{2,3}^{(k)}(z)\right)-\right.$$

$$\left.-B_{33}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\right]\delta\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)v_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{2,3}^{(k)}(z)+\right.$$

$$\left.+\varphi_{1,1}(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)w_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$\left(\varphi_1(x)v_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{2,3}^{(k)}(z)+\varphi_{1,1}(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)w_2^{(k)}(z)-\right. \tag{5}$$

$$\left.\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)/G_{13}^{(k)}+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)/G_{13}^{(k)}\right)\delta\left(\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)\right)\Bigg\}dzdl\,.$$

Після варіювання

$$\delta\ R^{(k)}=\int_{l}\int_{a_{k-1}}^{a_k}\left\{\left(\varphi_1(x)v_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_{2,3}^{(k)}(z)+\varphi_{1,1}(x)w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)w_2^{(k)}(z)+\right.\right.$$

$$\left.\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)/G_{13}^{(k)}+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)/G_{13}^{(k)}\right)\delta\left(\varphi_1(x)\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left[B_{13}^{(k)}\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2.1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)+\left(\varphi_1(x)w_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)w_{2,3}^{(k)}(z)\right)-\right.$$

$$\left.-B_{33}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\right]\delta\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$\left[B_{11}^{(k)}\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(z)\right)+\right.$$

$$\left.+B_{13}^{(k)}\left(\varphi_1(x)\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\sigma_2^{(k)}(z)\right)\right]\delta\left(\varphi_{1,1}(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)v_2^{(k)}(z)\right)-$$

$$-\left(\varphi_1(x)\tau_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\tau_{2,3}^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)\,\tau_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\,\tau_2^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_{1,1}(x)\,w_1^{(k)}(z)+\varphi_{2,1}(x)\,w_2^{(k)}(z)\right)-$$

$$-\left(\varphi_1(x)\,\sigma_{1,3}^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\,\sigma_{2,3}^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)\,w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\,w_2^{(k)}(z)\right)\Big\}dzdL+$$

$$+\int_l\Big[\left(\varphi_1(x)\,\tau_3^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\,\tau_3^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(z)\right)+$$

$$+\left(\varphi_1(x)\,\sigma_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\,\sigma_2^{(k)}(z)\right)\delta\left(\varphi_1(x)\,w_1^{(k)}(z)+\varphi_2(x)\,w_2^{(k)}(z)\right)\Big]dL\Big|_{a_{k-1}}^{a_k}. \quad (6)$$

Варіація роботи зовнішніх сил має вигляд

$$\delta\; A_1^{(k)}=\int_l\Big[q_{11}^{(k)}\,\delta\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(a_{k-1})+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(a_{k-1})\right)+$$

$$+q_{12}^{(k)}\,\delta\left(\varphi_1(x)v_1^{(k)}(a_k)+\varphi_2(x)v_2^{(k)}(a_k)\right)+$$

$$+q_{11}^{(k)}\,\delta\left(\varphi_1(x)\,w_1^{(k)}(a_{k-1})+\varphi_2(x)\,w_2^{(k)}(a_{k-1})\right)+$$

$$+q_{12}^{(k)}\,\delta\left(\varphi_1(x)\,w_1^{(k)}(a_k)+\varphi_2(x)\,w_2^{(k)}(a_k)\right)\Big]dL. \quad (7)$$

Підставляючи у варіаційне рівняння (3) вираз варіації функціонала Рейсснера (6) і роботи зовнішніх сил (7), одержуємо диференціальні рівняння рівноваги напіваналітичного скінченного елемента шаруватої плити

$$\begin{bmatrix} [k_{00}]_{,3} & [k_{01}] & -[k_{00}]/G_{13}^{(k)} & [0] \\ [k_{01}]B_{13}^{(k)} & [k_{00}]_{,3} & [0] & -[k_{00}]B_{33}^{(k)} \\ -[k_{11}]B_{11}^{(k)} & [0] & [k_{00}]_{,3} & -[k_{10}]B_{13}^{(k)} \\ [0] & [0] & -[k_{10}] & [k_{00}]_{,3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \{v^{(k)}(z)\} \\ \{w^{(k)}(z)\} \\ \{\tau^{(k)}(z)\} \\ \{\sigma^{(k)}(z)\} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Тут $[k_{00}]=\begin{bmatrix} l/3 & l/6 \\ l/6 & l/3 \end{bmatrix}$; $[k_{10}]=\begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$; $[k_{11}]=\begin{bmatrix} 1/l & -1/l \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix}$;

$[k_{01}]=[k_{10}]^T$; $\{v^{(k)}\}^T=\{v_1^{(k)}(z),v_2^{(k)}(z)\}$; $\{w^{(k)}\}^T=\{w_1^{(k)}(z),w_2^{(k)}(z)\}$;

$\{\tau^{(k)}\}^T=\{\tau_1^{(k)}(z),\tau_2^{(k)}(z)\}$; $\{\sigma^{(k)}\}^T=\{\sigma_1^{(k)}(z),\sigma_2^{(k)}(z)\}$.

Далі формуємо розв’язувальну систему диференціальних рівнянь для шару

$$\begin{bmatrix} [K_{00}]_{,3} & [K_{01}] & -[K_{00}]/G_{13}^{(k)} & [0] \\ [K_{01}]B_{13}^{(k)} & [K_{00}]_{,3} & [0] & -[K_{00}]B_{33}^{(k)} \\ -[K_{11}]B_{11}^{(k)} & [0] & [K_{00}]_{,3} & -[K_{10}]B_{13}^{(k)} \\ [0] & [0] & -[K_{10}] & [K_{00}]_{,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{v_{i1}^{(k)}(z)\} \\ \{w_{i2}^{(k)}(z)\} \\ \{\tau_{i3}^{(k)}(z)\} \\ \{\sigma_{i4}^{(k)}(z)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

$$\{v_{i1}^{(k)}(z)\}^T = \{\ldots, v_{i1}^{(k)}(z), \ldots\}; \quad \{w_{i2}^{(k)}(z)\}^T = \{\ldots, w_{i2}^{(k)}(z), \ldots\};$$

$$\{\tau_{i3}^{(k)}(z)\}^T = \{\ldots, \tau_{i3}^{(k)}(z), \ldots\}; \quad \{\sigma_{i4}^{(k)}(z)\}^T = \{\ldots, \sigma_{i4}^{(k)}(z), \ldots\},$$

де $i1, i2, i3, i4$ – номери точек, в яких визначаються відповідні шукані функції з урахуванням торцевих граничних умов.

Вектор шуканих функцій може бути представлений таким чином:

$$\begin{bmatrix} \{v_{i1}^{(k)}\} \\ \{w_{i2}^{(k)}\} \\ \{\tau_{i3}^{(k)}\} \\ \{\sigma_{i4}^{(k)}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{i1}^{(k)}(1), \ldots, \mu_{i1}^{(k)}(j), \ldots, \mu_{i1}^{(k)}(J) \\ \mu_{i2}^{(k)}(1), \ldots, \mu_{i2}^{(k)}(j), \ldots, \mu_{i2}^{(k)}(J) \\ \mu_{i3}^{(k)}(1), \ldots, \mu_{i3}^{(k)}(j), \ldots, \mu_{i3}^{(k)}(J) \\ \mu_{i4}^{(k)}(1), \ldots, \mu_{i4}^{(k)}(j), \ldots, \mu_{i4}^{(k)}(J) \end{bmatrix} \left[C^{(k)}\right]. \qquad (10)$$

Тут $\left[C^{(k)}\right]^T = \left[C_1^{(k)} e^{z\beta_1^{(k)}}, \ldots, C_j^{(k)} e^{z\beta_j^{(k)}}, \ldots, C_J^{(k)} e^{z\beta_J^{(k)}}\right]$; $\beta_j^{(k)}$ – корені характеристичного рівняння розв’язувальної системи диференціальних рівнянь, які можуть бути комплексними; $\mu_{i1}^{(k)}(j), \mu_{i2}^{(k)}(j), \mu_{i3}^{(k)}(j), \mu_{i4}^{(k)}(j)$ – її власні вектори; $C_j^{(k)}$ – постійні інтегрування, визначувані з умов контакту шарів і умов на лицьових поверхнях в кожному вузлі сітки розбиття конструкції на кінцеві елементи; J – загальна кількість шуканих функцій в шарі.

Розрахунок дорожнього одягу моста

Дослідимо вплив урахування тертя при розрахунку дорожнього одягу мостового переходу. Тришаровий дорожній одяг має наступні фізико-механічні характеристики: $E^{(1)} = 3000$ Мпа; $E^{(2)} = 2000$ Мпа; $E^{(3)} = 12000$ Мпа; $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = \nu^{(3)} = 0{,}3$; $h^{(1)} = h^{(2)} = h^{(3)} = 0{,}04$ м. Мост моделюється жорсткою основою. Контакт дорожнього одягу з мостом є жорсткий. Величина штампу $d = 0{,}36$ м. Коефіцієнт тертя $k = 0{,}5$. В таблиці 1 приведені нормальні напруження $\sigma_{11}^{(1)}$ від центра штампа по напрямку руху. Відстань між точками 0.06м. В першому рядку розташовані напруження від одиничного рівномірно-розподіленого нормального навантаження, в другому — від одиничного дотичного навантаження, в третьому їх алгебраїчна сума з урахуванням коефіцієнту тертя ($k = 0{,}5$) .

Таблиця 1 — Нормальні напруження на границі верхнього шару

Точки під штампом			Границя штампу	Точки за штампом			
-0,3700	-0,4114	-0,4688	-0,2072	0,0581	0,0075	-0,0279	-0,0215
0,0000	0,3085	0,8358	1,1930	0,8947	0,4432	0,2443	0,1460
-0,3700	-0,2572	-0,0509	0,3893	0,5055	0,2291	0,0943	0,0515

Висновки

Як видно з таблиці розрахунок дорожнього покриття на мостовому переході без урахування тертя втрачає всякий сенс**.** Саме тертя приводить до виникнення небезпечних розтягувальних напружень у верхньому шарі. При руху автомобільного потоку вони постійно змінюють знак, що за наявності мікро тріщин неминуче приведе до його руйнування. Якості дорожнього покриття на мостовому переході треба приділяти особливу увагу. Не жаліти кошти на матеріали, які б збільшували його тріщиностійкість.

Література

1. Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г. Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел – К.: НИИ СМ, 1993. – 376 с.

2. Marchuk A.V., Piskunov V.G. Calculation of layered structures by semianalytic method of finite elements // Mechanics of Composite Materials. – 1997. – 33, N6.– P. 781–785.