

Стефанишин Д. В., д-р.техн. наук, Ходневич Я. В.,

Щодро О. Є., д-р.техн. наук

## КОМБІНОВАНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ СПОКІЙНИХ ТЕЧІЙ В ТУРБУЛЕНТНИХ ВОДНИХ ПОТОКАХ

**Аноатація.** З метою швидкого та ефективного розрахунку кінематичних характеристик турбулентного потоку у відкритих руслах запропоновано і досліджено відповідну математичну модель. Наведено результати розрахунків відривних течій за затоплюваними донними перешкодами.

**Ключові слова:** математична модель, потік, русло, течія.

**Аннотация.** С целью быстрого и эффективного расчета кинематических характеристик турбулентного потока в открытых руслах была предложена и исследована соответствующая математическая модель. Приведены также результаты расчетов отрывных течений за затопленными донными препятствиями.

**Ключевые слова:** математическая модель, поток, русло, течение.

**Annotation.** Algorithm was proposed in order to calculate kinematical characteristics of the turbulent flow in open channels. It works quickly and efficiently. Corresponding mathematical model was also investigated. The results of calculations of separated flows near bottom obstacles were presented.

**Keywords:** mathematical model, flow direction, flow.

**Метою цієї роботи** є створення алгоритму для отримання наближених у різній степені розв'язків тривимірної задачі гідродинаміки нестислої рідини, яка переносить інертні домішки. Можливість отримання наближених розв'язків при цьому дає значну економію часу і дозволяє оперативно проводити аналіз якісної картини течії. Така задача є досить **актуальною**, так як існує багато практичних проблем, які потребують розрахунків кінематики течій при відомому полі тисків. Наприклад, задачі деформації русел, взаємодії

середовищ, роботи вихорових апаратів, тощо. Створений алгоритм допускає підключення або відключення цілих блоків програмного комплексу, наприклад, блок уточнюючих розрахунків за тією чи іншою моделлю турбулентності, які проводяться на основі методу розщеплення. При цьому можуть бути також прийняті різні граничні умови по контуру розрахункової області. Зокрема, легко задаються умови першого або другого роду, а при деякій перебудові обчислювального алгоритму й умови третього роду. Також враховується фактор нестационарності течії і допускається варіювання моделей турбулентності і їх параметрів. Наявність програмної реалізації такого алгоритму дозволяє у практичному аспекті врахувати впливи криволінійних і прямолінійних струмененапрямних дамб, кар'єрів, мостових переходів, польдерів та різних гідротехнічних споруд на русловий потік. Такий широкий спектр застосування алгоритму і програми з'явився внаслідок можливості заміни системи координат з декартової на криволінійну по аналогії з тим як це пропонується в роботі [1]. Прийняття нових, спеціально пристосованих до певних умов моделей турбулентності, наприклад, моделі Гірімаджи [2], робить можливим врахування властивостей вторинних, вихорових і циркуляційних течій. Особливості зовнішніх границь різних областей потоку, зокрема, наявність відривних течій, які обмежують досліджуваний потік або виникають поблизу його границі, враховується не лише задаванням граничних умов, але й первісним задаванням картини течії в цілому.

Математична модель гідродинаміки нестислої рідини ґрунтується на системі рівнянь Рейнольдса [3]:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = \bar{f}_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial (\bar{u}'_i \bar{u}'_j)}{\partial x_j}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2)$$

Система рівнянь (1)-(2) незамкнена, оскільки (1) містить невідомі турбулентні напруги. Для її замикання необхідно застосувати одну з існуючих моделей турбулентності. В нашому випадку застосовується найбільш апробована та гнучка  $k-\varepsilon$  модель турбулентності. Її дія ґрунтується на концепції турбулентної в'язкості. Значення турбулентних напруг, що входять у ліву частину рівнянь (1), розписуються згідно градієнтної гіпотези [4]:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k. \quad (3)$$

$k$ - $\varepsilon$  модель турбулентності містить рівняння переносу для енергії турбулентності та рівняння переносу для швидкості дисипації енергії і записується наступним чином [4]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - C_D \frac{k^{3/2}}{L} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x_j} \right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \left( C_{\varepsilon 1} \frac{P}{\varepsilon} - C_{\varepsilon 2} \right) \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (5)$$

Тут рівняння (1)-(5) містять наступні позначки: де  $\overline{u_i}$  – компоненти вектора осередненої швидкості;  $t$  – час;  $x_i$  – координати точки;  $\overline{f_i}$  – компоненти вектора осередненої масової сили;  $\rho$  – щільність рідини;  $\overline{p}$  – осереднений гідродинамічний тиск;  $\overline{u'_i u'_j}$  – момент кореляції пульсацій швидкостей;  $i$  – номер рівняння,  $j$  – номер члена в рівнянні ( $i, j = \overline{1,3}$ );  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\nu_t = C_\mu k^2 / \varepsilon$  – коефіцієнт турбулентної в'язкості;  $k$  – кінетична енергія турбулентності;  $\varepsilon$  – швидкість дисипації енергії турбулентності;  $L$  – довжина шляху перемішування;  $C_D = 1$ ,  $\sigma_k = 1$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1,3$ ,  $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ ,  $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ ,  $C_\mu = 0,09$  – модельні константи.

З метою проведення практичних розрахунків пропонується **алгоритм**, який полягає у поетапному виконанні обчислень за неявною і явною схемами. На основі розрахунків виконується апроксимація результатів та їх сплайнове згладження. **Алгоритм розрахунків** складається з наступних блоків:

1) розрахунок поля швидкостей за **неявною схемою на грубій сітці** на основі розв'язку системи (1) методом лінеаризації з розв'язком системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом матричної факторизації (**LU** розкладання);

2) визначення повного перепаду тисків по всій області і його поздовжнього розподілу по всій області з використанням інтегральної умови нерозривності та спеціально розробленої **одновимірної моделі** розглядуваної течії, яка враховує змінність витрати у виділеній області по її довжині, обмін масою та кількістю руху на її бокових границях [5];

3) уточнення розподілу тисків у потоці шляхом розв'язку **рівняння**

**Пуассона** методом послідовної верхньої релаксації і згладженням результатів;

4) **сплайнова апроксимація** результатів та одночасне їх згладження і введення згущеної сітки для подальших розрахунків;

5) застосування методу розщеплення для розв'язання **системи рівнянь Рейнольдса, яка замкнена  $k-\varepsilon$  моделлю турбулентності**;

6) коректування поля тисків із задоволенням умови нерозривності (2);

7) уточнення кінематики за явною чисельною схемою Мак-Кормака.

На **першому етапі** цього алгоритму модель турбулентності, яка приймається для замикання моделі, може бути найпростішою (наприклад, по області інтегрування  $\nu_t = Const$ ). Основна мета цього етапу – охопити всю область єдиним розрахунком, й досягнути збіжності алгоритму в цілому.

Послідовність дій при виконанні першого етапу наступна. Систему рівнянь (1) записується наступним чином:

$$\tilde{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial u}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (6)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial v}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

$$\tilde{u} \frac{\partial w}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial w}{\partial y} + \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu_t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (8)$$

де  $u$  – швидкості потоку в напрямку руху основної течії (вздовж досліджуваної області),  $v$  – швидкості в напрямку по ширині області,  $w$  – швидкості потоку в напрямку по висоті області;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – координати вздовж, по ширині та по висоті досліджуваної області;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  - значення масової сили відповідно у напрямках по довжині, по ширині та висоті області;  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  – початкове наближення поля швидкостей.

В системі рівнянь (1) для розв'язку стаціонарних задач відкидається зміна швидкостей у часі. Значення швидкостей  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{w}$  вважаються заздалегідь відомими на всій розрахунковій області, включаючи значення на границях  $\Gamma$  області. Цей крок є реалізацією відомого методу лінеаризації.

Граничні умови записуються так:

$$u|_{\Gamma} = \tilde{u}, \quad v|_{\Gamma} = \tilde{v}, \quad w|_{\Gamma} = \tilde{w}. \quad (9)$$

Система (6)-(8) розв'язується за допомогою **методу скінчених різниць** на розрідженій рівномірній сітці:

$$G_1 = \{(x_i, y_j, z_k) : x_i = i \cdot \Delta x, y_j = j \cdot \Delta y, z_k = k \cdot \Delta z, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}, k = \overline{0, \gamma}\},$$

де  $\Delta x = N/n$ ,  $\Delta y = M/m$ ,  $\Delta z = K/l$  – відстань між вузлами сітки відповідно по координатах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $N$ ,  $M$ ,  $K$  – довжина, ширина та висота досліджуваної області;  $n$ ,  $m$ ,  $\gamma$  – кількість вузлів по довжині, по ширині та по висоті сітки.

Різницевий аналог системи диференціальних рівнянь (6)-(8) записується у формі наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} & u_{i+1,j,k} \left( \frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) - u_{i-1,j,k} \left( \frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + u_{i,j+1,k} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \\ & - u_{i,j-1,k} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + u_{i,j,k+1} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} - \frac{1}{\Delta z^2} \right) - u_{i,j,k-1} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \\ & + u_{i,j,k} \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \frac{X_{i,j,k}}{v_t} - \frac{p_{i+1,j,k} - p_{i-1,j,k}}{2\Delta x v_t \rho}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & v_{i+1,j,k} \left( \frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) - v_{i-1,j,k} \left( \frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + v_{i,j+1,k} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \\ & - v_{i,j-1,k} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + v_{i,j,k+1} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} - \frac{1}{\Delta z^2} \right) - v_{i,j,k-1} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \\ & + v_{i,j,k} \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \frac{Y_{i,j,k}}{v_t} - \frac{p_{i,j+1,k} - p_{i,j-1,k}}{2\Delta y v_t \rho}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & w_{i+1,j,k} \left( \frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} - \frac{1}{\Delta x^2} \right) - w_{i-1,j,k} \left( \frac{\tilde{u}_{i,j,k}}{2\Delta x} + \frac{1}{\Delta x^2} \right) + w_{i,j+1,k} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} - \frac{1}{\Delta y^2} \right) - \\ & - w_{i,j-1,k} \left( \frac{\tilde{v}_{i,j,k}}{2\Delta y} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + w_{i,j,k+1} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} - \frac{1}{\Delta z^2} \right) - w_{i,j,k-1} \left( \frac{\tilde{w}_{i,j,k}}{2\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \right) + \\ & + w_{i,j,k} \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} + \frac{2}{\Delta z^2} \right) = \frac{Z_{i,j,k}}{v_t} - \frac{p_{i,j,k+1} - p_{i,j,k-1}}{2\Delta z v_t \rho}. \end{aligned} \quad (12)$$

Граничні умови (9) для компоненти поля швидкостей  $u$  записуються наступним чином (для  $v$  та  $w$  граничні умови будуються аналогічно):

$$u_{0,j,k} = \tilde{u}_{0,j,k}, \quad u_{n,j,k} = \tilde{u}_{n,j,k},$$

$$u_{i,0,k} = \tilde{u}_{i,0,k}, \quad u_{i,m,k} = \tilde{u}_{i,m,k},$$

$$u_{i,j,0} = \tilde{u}_{i,j,0}, \quad u_{i,j,\gamma} = \tilde{u}_{i,j,\gamma},$$

де  $i = \overline{0, n}$ ,  $j = \overline{0, m}$ ,  $k = \overline{0, \gamma}$ .

Враховуючи особливості системи лінійних рівнянь (10)-(12), а саме те, що семидіагональна розріджена матриця коефіцієнтів при невідомих є досить

великою, то для її розв'язання використовується більш економний метод **LU-розкладання**. Застосування цього методу з врахуванням розрідженості системи рівнянь дозволяє у порівнянні із традиційними методами значно зменшити час обчислення розв'язку та зменшити вимоги до об'єму пам'яті комп'ютера [6].

На **другому етапі** алгоритму визначається повний перепад тисків на всій області шляхом задоволення інтегральній умові нерозривності по всій області:

$$\left| \iint_{(S_i)} U(y, z) dydz - \iint_{(S_{i-1})} U(y, z) dydz \right| \leq \varepsilon |Q_i - Q_{i-1}| \quad , \quad (13)$$

де  $U(y, z)$  - поле швидкості в поперечному перерізі  $S_i$  розрахункової області;  $\varepsilon$  - це константа, яка забезпечує рівень точності при наближеному обчисленні поля тиску;  $i$  – номер поперечного перерізу розрахункової області.

Нехай  $Q_i = \iint_{(S_i)} U(y, z) dydz$  - витрата води в поперечному перерізі  $S_i$ . Тоді для умови, що витрати по довжині області не змінюються, (13) записується у вигляді:

$$\left| \iint_{(S_i)} U(y, z) dydz - \iint_{(S_{i-1})} U(y, z) dydz \right| \leq \varepsilon \iint_{(S_0)} U(y, z) dydz. \quad (14)$$

Розподіл тисків по довжині області повинен також відповідати умовам (13), (14).

Алгоритм зворотної одновимірної задачі наближеного обчислення тисків [5] передбачає початкове задавання швидкостей у досліджуваній області, а також закономірностей проникнення мас води у цю область та виходу мас води з неї на основі апріорної інформації. Модель дає змогу досить точно підрахувати перепади тисків вздовж області. Ця модель крім описаної зворотної задачі включає також і пряму, яка дозволяє при заданому законі зміни мас, перепадах тисків і початкових умовах обчислити середні швидкості по перерізах та витрати потоку.

Змінність маси для розрахункової області, через границі якої дозволений масообмін (як турбулентного так і конвективного характеру), дозволяє аналізувати баланс сил на поверхні такої області, в тому числі і на поверхні елементарних комірок. При цьому виявляється можливим опис властивостей таких зон потоку, де трапляються різкі зміни характеристик течії, наприклад біля стінок, в зонах різкого повороту та деформацій течії.

На **третьому етапі** алгоритму коректується поле тисків шляхом розв'язання рівняння Пуассона, яке виводиться із рівняння нерозривності потоку (2). Розв'язок рівняння Пуассона обчислюється за допомогою методу послідовної верхньої релаксації згідно наступної ітераційної схеми [3]:

$$p_{ijk}^{\tau+1} = \frac{\lambda}{2(\Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta x^2 \Delta z^2)} (\Delta y^2 \Delta z^2 (p_{i+1,jk}^{\tau} + p_{i-1,jk}^{\tau+1}) + \Delta x^2 \Delta z^2 (p_{i,j+1,k}^{\tau} + p_{i,j-1,k}^{\tau+1}) + \Delta x^2 \Delta y^2 (p_{ij,k+1}^{\tau} + p_{ij,k-1}^{\tau+1}) - \Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2 F_{ijk}) + (1-\lambda)p_{ijk}^{\tau}, \quad (15)$$

де  $\tau$  – номер ітерації,  $\tau = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\lambda$  – коефіцієнт релаксації, оптимальне значення якого в нашому випадку знаходиться в межах від 1,5 до 1,8.

На **четвертому етапі** алгоритму реалізується сплайнове згладження результатів. Для того щоб уникнути великих затрат машинних ресурсів та підвищити точність обчислень спочатку здійснюється розв'язання задачі розрахунку турбулентного водного потоку за неявною схемою на грубій розрахунковій сітці, потім виконується згущення розрахункової сітки за допомогою апроксимації **кубічними сплайнами** знайдених розподілів швидкостей  $u$ ,  $v$ ,  $w$  та поля тиску  $p$ . В результаті отримується досліджуване поле швидкостей та поле тиску **на згущеній сітці**. Далі кінематичні характеристики течії уточнюються за явною схемою розщеплення Мак-Кормака. В результаті отримується поле швидкостей та тиску на відносно густій розрахунковій сітці просторової області.

Такий підхід дозволяє отримати повнішу картину динаміки в'язкої нестислої рідини в умовах турбулентної течії та вимагає незначних затрат машинного часу.

На **п'ятому етапі** алгоритму застосовується явна чисельна схема розщеплення Мак-Кормака, яка досить повно описана, наприклад, в роботі [3].

На **шостому етапі** знову використовується рівняння Пуассона за його різницевою схемою (15). На **заключному етапі** алгоритму здійснюється уточнюючий розрахунок за схемою Мак-Кормака.

При обчисленні характеристик **двохфазних течій** (з наносами) врахування твердої фази ведеться в **три етапи**. У першому наближенні задається поле змінної густини єдиного континуума – водо-піщаної суміші. Далі задається орієнтовно закон зміни маси всього потоку по довжині і неявним та явним методами, аналогічно до освітленого потоку, перераховуються

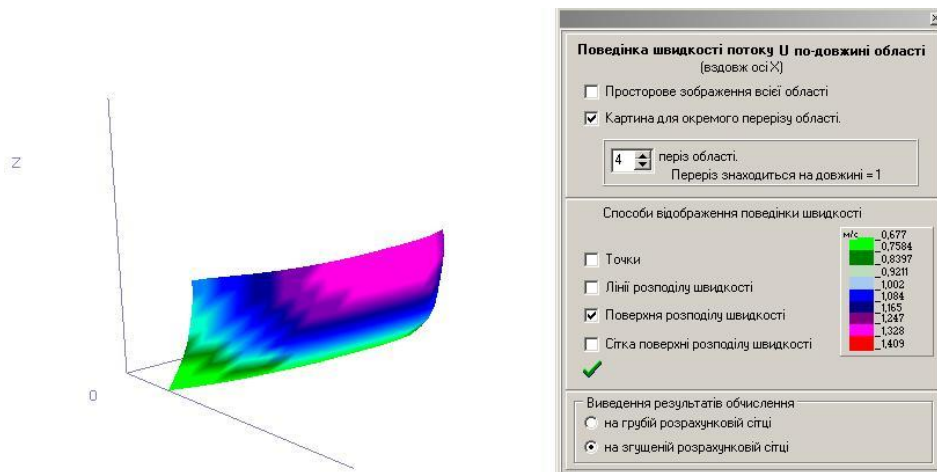
швидкості двохфазної течії.

Для визначення поздовжніх перепадів тиску з врахуванням змінності витрати використовується одновимірна задача, яка тепер враховує осідання й змулення часток (змінність витрати континуума по довжині області). На етапі підключення повної системи  $k$ - $\varepsilon$  моделі враховується зміна коефіцієнта турбулентної в'язкості, який залежить від концентрації наносів. Закон зміни маси коректується в ході ітераційних наближень.

Для задач регулювання русел та захисту берегів від розмиву [7] порядок практичних розрахунків повинен враховувати необхідність початкового розрахунку досить довгої ділянки річки в цілому в рамках одновимірної задачі з подальшим уточненням кінематики потоку й глибин в рамках планової задачі [8]. Далі підключається алгоритм описаної задачі для розрахунків течій в окремих зонах, наприклад, за крупними донними грядками [7]. Слід зазначити, що розроблений алгоритм є стійким, збіжним та забезпечує якість апроксимації не нижче другого порядку точності. В областях досить простої геометричної форми розрахунок виконується швидко.

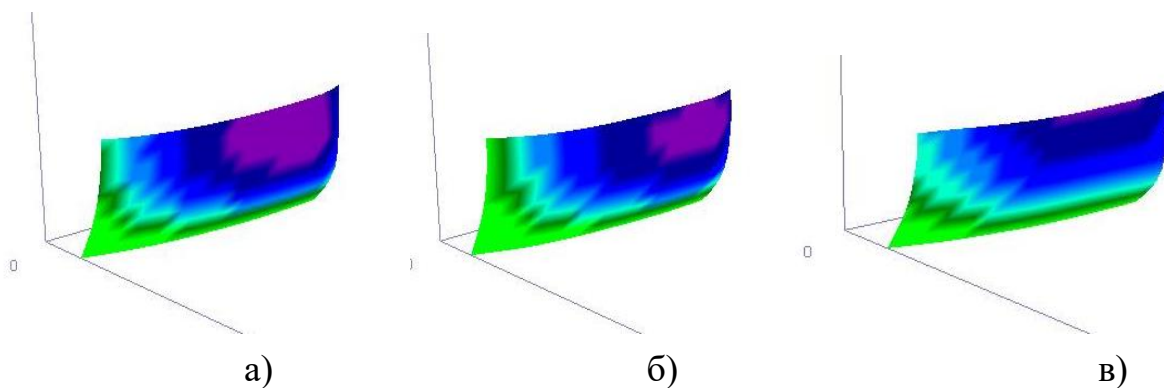
Приклади результатів розрахунків за розробленою моделлю представлено на рис. 1 - рис. 3. В цьому випадку обчислення швидкості течії здійснюється у тривимірній локальній області руслового потоку за донним косо розташованим уступом для умов досліду, які описані [5, 9]. Досліджувалась течія за донним уступом, що розташований за схемою, яка описана в роботі [9]. Донний уступ розташований під гострим кутом  $\alpha = 45^\circ$  відносно транзитного потоку. Його висота у відношенні до глибини потоку перед ним складає  $\delta = 0,33$ . Бокова перешкода використовувалась як один із засобів управління кінематичною структурою турбулентної течії за уступом. Спосіб її встановлення і параметри описані в [9]. Наведені рисунки дають представлення про кінематику потоку у просторових гвинтоподібних течіях, які виникають у різних випадках, але свідчать про локальну подібність структури потоку в них, а також про характер зміни поступальних швидкостей вздовж таких течій. Саме на відстані 5 – 6 висот уступу ці швидкості залишаються досить високими, а далі плавно спадають.





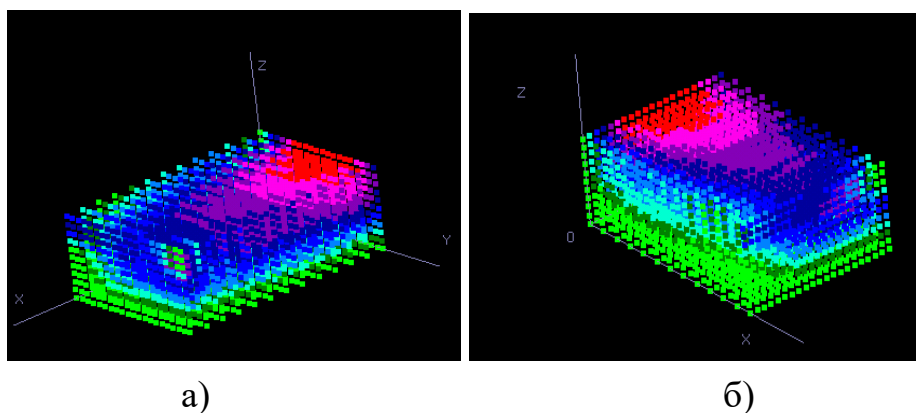
**Рисунок 1** – Розподіл швидкостей  $U$  в четвертому поперечному перерізі області течії за донним уступом ( $i=4$ ) при заданому полі тисків і при інтенсифікації течії боковою перешкодою з параметрами  $\frac{x_{\Pi}}{B} = 3,5$ ,  $\frac{y_{\Pi}}{B} = 0,15$  [9], відносна висота уступу  $\delta = 0,33$ ,

кут його розташування  $\alpha = 45^{\circ}$



**Рисунок 2** – Розподіл швидкостей  $U$  у сьомому (а), дев'ятому (б), одинадцятому (в) поперечних перерізах області ( $i = 7$ ,  $i = 9$ ,  $i = 11$ ) при заданому полі тисків і

умовах, які аналогічні для рис. 1



**Рисунок 3** – Тривимірна картина течії за косо розташованою напівзагатою довжиною  $l_{\Pi}$  в руслі шириною  $B$  при  $\alpha = 45^{\circ}$  та відносній висоті  $\delta = 0,33$ , а) при  $\frac{l_{\Pi}}{B} = 0,2$ , б)  $\frac{l_{\Pi}}{B} = 0,4$

## Література

1. Шеренков И.А. Прикладные плановые задачи гидравлики свободных потоков / И.А. Шеренков. – М.: Энергия, 1978. – 240 с.
2. Харьков Н.С. Численное моделирование турбулентных закрученных течений в цилиндрических и конических каналах/ Н. С. Харьков // Труды МАИ 4-я Ежегодная Международная конференция «Авиация и Космонавтика - 2005» – Москва, 2005. – Том 2. – С. 264-265.
3. Савенко В. Я. Математические модели и методы расчет квазитрехмерных безнапорных потоков. - К.: Техніка, 1995 – 188 с.
4. Белов И.Ф. Модели турбулентности / И.Ф. Белов. – Л.: ЛМИ. 1982. – 88 с.
5. Щодро О. Є. Дослідження динаміки потоку зі змінною масою за донними уступами та річковими грядами / О. Є. Щодро, Я. В. Ходневич, М. М. Мокляк // Збірник наукових праць „Вісник Національного університету водного господарства та природокористування”. Випуск 1(45). Рівне, Національний університет водного господарства та природокористування, 2009 р., С. 74 – 82.
6. Глушакова Т. Н. Методы решения систем с разреженными матрицами / И.А. Блатов, Т.Н. Глушакова – Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 2000. – 36 с.
7. Щодро А.Е. Новая концепция местного размыва у берегов и речных гидротехнических сооружений / А.Е. Щодро // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Збірник наукових праць УДАВГ. - Випуск-4(40) Ч.2 Рівне, 2007. - С. 198 – 205.
8. Методика розрахунку розмивів дна та берегів передгірських ділянок річок та місцевих розмивів біля річкових гідротехнічних споруд. МРР 218-02070915-231-2003. Державна служба автомобільних доріг України (УКРавтодор) Національний транспортний університет України.
9. Щодро А. Е. Кинематика потока и водообмен за косорасположенными донными уступами гидротехнических сооружений / А. Е. Щодро // Гидравлика и гидротехника: Респ. межвед. научно–техн. сборник. – К. : Техніка, 1978. – Вып. 26. – С. 59–64.

## Рецензенти

В.Я. Савенко, д-р техн. наук, НТУ (Київ),

О.С. Славінська, д-р техн. наук, НТУ (Київ)

## Reviewers

V.Ya. Savenko, Dr.Tech.Sci., NTU (Kyiv)

O.S. Slavinska, Dr.Tech.Sci., NTU (Kyiv)