

УДК 65.0:681.14:519.9

О. О. Піддубна,  
старший викладач кафедри "Економічна кібернетика", Обласний комунальний вищий  
навчальний заклад "Інститут підприємництва "Стратегія"

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ВИРОБНИЧОГО ПОТЕНЦІАЛУ ПІДПРИЄМСТВА

*За реальними статистичними даними про вкладений капітал і отриманий прибуток побудовано нелінійну динамічну модель. Отримано періодичний розв'язок моделі, який асимптотично прямує до граничного циклу. Ідентифіковано структуру атрактора, що відповідає періодичній динаміці економічних показників досліджуваної системи на режимі, який встановився.*

*Non-linear dynamic model was built using real data on capital and earnings. Asymptotic to the limit cycle periodic model solution was received. Attractor structure that meets economic indicators periodical dynamic on standby was identified.*

*Ключові слова: виробничий потенціал підприємства, нелінійна динамічна модель, періодичний розв'язок, граничний цикл.*

### ВСТУП

Зміни різних економічних показників, як правило, носять циклічний характер. Для пояснення цього явища Самуельсоном була запропонована модель мультиплікатора-акселератора, яка вважається класичною лінійною моделлю економічного зростання. Модифікації цієї моделі розглядалися в роботах Хікса, Харрода, Філіпса, Аллена. Але розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь, наприклад моделі зростання Харрода, в силу лінійності викликає або експоненційно згасаючі, або експоненційно вибухові зміни, що свідчить про структурну нестійкість моделі. Ідеальною можна вважати таку систему, в якій виникає стійкий циклічний рух зі скінченною амплітудою, яку визначає сама система. Можливість існування періодичного асимптотично стійкого руху, зображуваного ізольованою замкнутою траєкторією у фазовому просторі, до якої притягаються всі траєкторії з деякої околиці незалежно від початкових умов, забезпечується тільки в нелінійних дисипативних системах. Для цього Гудвіном було запропоновано ввести у модель гладку нелінійну функцію інвестицій.

### МЕТА РОБОТИ

Виходячи з припущення, що динаміка виробничого потенціалу економічної системи описується динамічною моделлю Гудвіна, побудувати за реальними статистичними даними про вкладений капітал і отриманий прибуток нелінійну модель, розв'язком якої є періодичні залежності капіталовкладень і отриманого прибутку, які за часом асимптотично прямують до граничного циклу, що визначає сталий режим динаміки, та ідентифікувати структуру атрактора, що відповідає періодичній динаміці економічних показників досліджуваної системи.

Метою побудови такої моделі є проведення незалежної оцінки тенденцій розвитку виробничого потенціалу підприємства.

### РЕЗУЛЬТАТИ

За основні змінні покладемо:  $x$  — величина вкладеного капіталу,  $y$  — отриманий прибуток. Взаємозв'язки між елементами соціально-економічних процесів не миттєві, тобто між моментом вкладення капіталу  $t$  і моментом отримання відповідного прибутку існує проміжок часу

Таблиця 1. Вихідні дані про вкладений капітал і прибуток за 20 періодів у тис. грн.

№ з/п	I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вкладений капітал	$X_i$	5957	8226	8793	5389	11260	14330	16890	8703	22440	34790
Прибуток	$Y_i$	13570	18750	20040	12280	15340	19520	23010	11850	28140	43620

Продовження табл. 1.

№ з/п	I	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Вкладений капітал	$X_i$	35910	19080	25330	34980	37230	22920	35964	49950	40010	35065
Прибуток	$Y_i$	45020	23920	48050	66350	92350	43470	67720	70990	89270	58490

$\tau$ , який називають часовим лагом або просто лагом. Фактично вкладеному капіталу  $x(t)$  відповідає прибуток отриманий пізніше  $y(t+\tau)$ . Для того щоб динамічні змінні  $x(t)$  і  $y(t+\tau)$  можна було співвіднести до одного моменту часу і тим самим вивчати динаміку у фазовій площині, зробимо такі припущення:

1) режим динаміки будемо вважати майже сталим (тобто  $t \rightarrow \infty$ ) і тривалість циклу капіталообігу  $\tau \ll t$ ;

2)  $y(t+\tau) = y(t) + y(\xi) = y(t) + O(\tau) \approx y(t)$ .

Далі припустимо існування функціонального зв'язку  $y = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$  з деякою гладкою функцією  $f$ . Дійсно, отриманий прибуток  $y$  залежить від величини вкладеного капіталу, але також і від тенденції його зміни в часі, тобто від  $\frac{dx}{dt}$ . З тієї ж причини, розглядаючи в деякому розумінні зворотний зв'язок, отримуємо, що  $x = g\left(y, \frac{dy}{dt}\right)$  з деякою гладкою функцією  $g$ .

Ідентифікація функцій  $f$  і  $g$  для певної досліджуваної економічної системи є завданням даної статті. Як показано у ряді робіт [1, 2], достатньо широкий клас завдань охоплюється, коли функції  $f$  і  $g$  представляються в адитивній формі, а саме:

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = H(x) + \sigma\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ і } g\left(y, \frac{dy}{dt}\right) = \varphi(y) + \theta\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Конкретизуємо ситуацію ще більш, вважаючи, що

$$\sigma\left(\frac{dx}{dt}\right) = \sigma_{\text{cp}}\left(\frac{dx}{dt}\right) \text{ і } \theta\left(\frac{dy}{dt}\right) = \theta_{\text{cp}}\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Тоді остаточно приходимо до такої динамічної системи:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot (H(x) - y), \\ \frac{dy}{dt} = \beta \cdot (x - \varphi(y)), \end{cases} \quad (1)$$

з початковими умовами

$$\begin{cases} H(\xi) = y_0, \\ \varphi(y_0) = \xi, \end{cases}$$

ляді:

$$\begin{cases} H(x) = y + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{dx}{dt}, \\ \varphi(y) = x - \frac{1}{\beta} \cdot \frac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Отже, якщо  $\frac{dx}{dt} = 0$ , тоді  $H(x)$  збігається з отриманим прибутком. Якщо  $\frac{dy}{dt} = 0$ , тоді  $\varphi(y)$  збігається з вкладеним капіталом. Тобто функції-характеристики  $H(x)$  і  $\varphi(y)$  описують стан економічної системи, в якому зміни вкладеного капіталу і прибутку відсутні. Вигляд функцій-характеристик визначається за статистичними даними економетричними методами.

Виключаємо з системи (1)  $y(t)$  і приходимо до рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \chi(\dot{x}) + x = 0. \quad (2)$$

Як відомо [1], рівняння виду (2), в якому функція  $\chi(\dot{x})$  за виглядом і властивостями схожа на кубічну параболу, є рівнянням Релея, і для нього існує стійкий граничний цикл. У нашому випадку  $\chi(\dot{x})$  ідентифікується функцією  $H(x)$ , а тому функцію  $H(x)$  наближаємо поліномом 3-го степеня, а саме

$$H(x) = y_0 - \mu^2 b(x - \xi, a, b),$$

де

$$h(x, a, b) = x(x - a)(x - b), \quad 0 < b < a.$$

Будемо вважати  $\varphi(y) = k \cdot \sqrt{y}$ .

Отже, функція  $H(x)$  залежить від параметрів  $\mu$ ,  $a$ ,  $b$ , які знаходимо виходячи з конкретної статистики за умови мінімізації середньоквадратичного відхилення фактичних значень функції від розрахункових

$$D = \sum_{i=1}^n (H(x_i, a, b, \mu) - y_i)^2 \rightarrow \min,$$

де  $n$  — кількість спостережень;

$x_i$  — вкладений капітал у період  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ ;

$y_i$  — прибуток у період  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ .

Визначимо функції  $H(x)$  і  $\varphi(y)$  за даними про вкладений капітал і отриманий прибуток певного підприємства. У таблиці 1 наведені дані про вкладений капітал і прибуток за 20 періодів

**Таблиця 2. Нормовані вихідні дані**

<i>I</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i$	0,119	0,165	0,176	0,108	0,225	0,287	0,338	0,174	0,449	0,696
$y_i$	0,147	0,203	0,217	0,133	0,166	0,211	0,249	0,128	0,305	0,472

Продовження табл. 2.

<i>I</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$x_i$	0,719	0,382	0,507	0,700	0,745	0,459	0,720	1,000	0,801	0,702
$y_i$	0,487	0,259	0,520	0,718	1,000	0,471	0,733	0,769	0,967	0,633

у грошових одиницях (тис. грн.).

Система (1) в загальному випадку може бути жорсткою, тобто її Якобіан може бути слабообумовленою матрицею, тому переходимо до відносних величин (таблиця 2):

$$x_i = \frac{X_i}{\max\{X_i\}}, y_i = \frac{Y_i}{\{\max Y_i\}}, i = \overline{1, 20}.$$

Покладемо  $y_0 = 1$  і  $\xi = 0,769$ . Мінімальне значення  $D$  відповідає

$$\mu = 0,126, a = 2,488, b = 0,043.$$

Таким чином, функція  $H(x)$  матиме наступний вигляд

$$H(x) = 1 - (0,126)^2(x - 0,769)(x - 0,812)(x - 3,257) \quad (3).$$

Для того щоб переконатися в надійності отриманої функції і правомірності її використання для практичної мети, було проведено статистичну оцінку надійності показників зв'язку. Перевірка підтвердила наявність зв'язку між вкладеним капіталом і прибутком у вигляді (3).

Для статистичної оцінки точності рівняння зв'язку використовувалася середня помилка апроксимації:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\varepsilon_i - \bar{y}}{y_i} \right)^2,$$

де  $y_i$  — фактичне значення прибутку (таблиця 2);

$\varepsilon$  — значення, розраховане за формулою (3);

$\bar{y}$  — середнє значення прибутку.

Чим менше теоретична лінія регресії (розрахована за рівнянням) відхиляється від фактичної (емпіричної), тим менше середня помилка апроксимації. В нашому випадку середня помилка апроксимації складає менше 5%, отже, можна зробити висновок, що досліджуване

**Таблиця 3.**

<i>x</i>	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3
$H(x)$	1,03	1,01	1,00	1,0	1,00	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03	1,035	1,031	1,02
$(\varphi(y))$	0,0	0,10	0,42	0,95	1,69	2,64	3,80	5,17	6,76	8,56	10,56	12,78	15,219

рівняння зв'язку (3) досить точно описує досліджувані залежності.

Для функції  $\varphi(y) = k \cdot \sqrt{y}$  визначимо коефіцієнт  $k$ :

$$k = \frac{\xi}{\sqrt{H(\xi)}}.$$

Графіки функцій  $H(x) = 1 - (0,126)^2(x - 0,769)(x - 0,812)(x - 3,257)$  і  $\varphi(y) = 0,769 \cdot \sqrt{y}$ , побудовані за таблицею 3 представлені на

рисунок 1.

Підставимо вирази для  $H(x)$  і  $\varphi(y)$  у (1) і отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha \cdot (1 - (0,126)^2(x - 0,769)(x - 0,812)(x - 3,257) - y), \\ \frac{dy}{dt} = \beta \cdot (x - 0,769\sqrt{y}), \end{cases} \quad (4)$$

де  $\alpha = 1, \beta = 1$ .

Систему (4) розв'язуємо чисельно у пакеті MathCad. Для цього використовуємо адаптивний метод Ейлера зі змінним кроком, який є абсолютно стійким [4]. Отримаємо аналітичні функції для чисельного покрокового знаходження значень змінних  $x_m$  і  $y_m$ , а також для змінної часу  $t_m$

$$\begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{m-1} + \sigma \cdot \frac{G(x_{m-1}, y_{m-1})\varepsilon}{\sqrt{G(x_{m-1}, y_{m-1})^2 + F(x_{m-1}, y_{m-1})^2}} \\ y_{m-1} + \sigma \cdot \frac{F(x_{m-1}, y_{m-1})\varepsilon}{\sqrt{G(x_{m-1}, y_{m-1})^2 + F(x_{m-1}, y_{m-1})^2}} \end{pmatrix},$$

$$t_m = t_{m-1} + \sigma \cdot \frac{\varepsilon}{\sqrt{G(x_{m-1}, y_{m-1})^2 + F(x_{m-1}, y_{m-1})^2}},$$

де  $G(x, y) = \alpha \cdot (H(x) - y), F(x, y) = \beta \cdot (x - \varphi(y))$ .

Апроксимація розв'язку наведена на рисунку 2.

Розгортка — залежність змінних  $x$  і  $y$  від часу наведена нижче на рисунку 3.

## ВИСНОВКИ

1. Виходячи з припущення, що динаміка виробничого потенціалу економічної системи описується динамічною моделлю типу моделі Гудвіна за реальними статистичними даними про вкладений капітал і отриманий прибуток, побудували характеристики моделі  $H(x)$  і  $(y)$ .

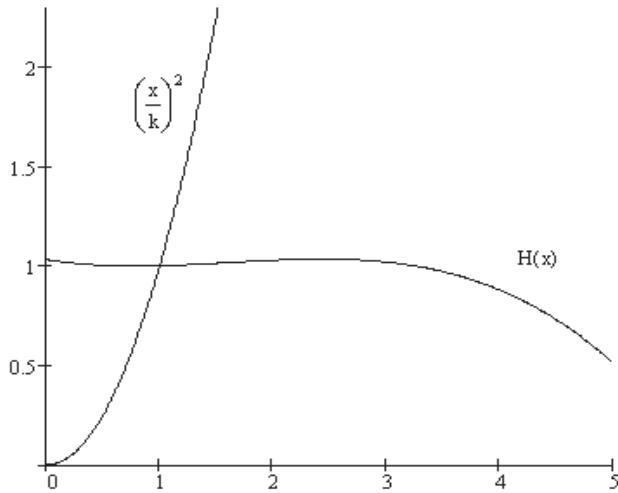


Рис. 1. Графік характеристик  $H(x)$  і  $\phi(y)$

2. Впевнилися, що отримані функції характеристик є адекватними і достатньо точно описують досліджуване явище.

3. Побудували нелінійну модель, розв'язком якої є періодичні залежності капіталовкладень і отриманого прибутку, які за часом асимптотично прямують до граничного циклу, що визначає сталий режим динаміки.

Таким чином, ідентифіковано структуру атратора, що відповідає періодичній динаміці економічних показників досліджуваної системи на режимі, який встановився.

Література:

1. Д. Эрроумсмит, К. Плейс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1986, 240 с.
2. Занг В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории: Пер. с англ. — М.: Мир, 1999.
3. Піддубна О.О. Аналіз однієї задачі опти-

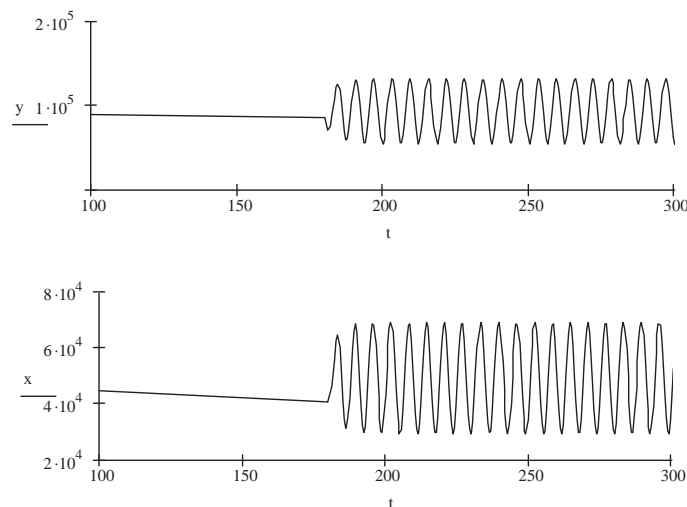


Рис. 3. Залежність змінних від часу, отримана за допомогою чисельних методів

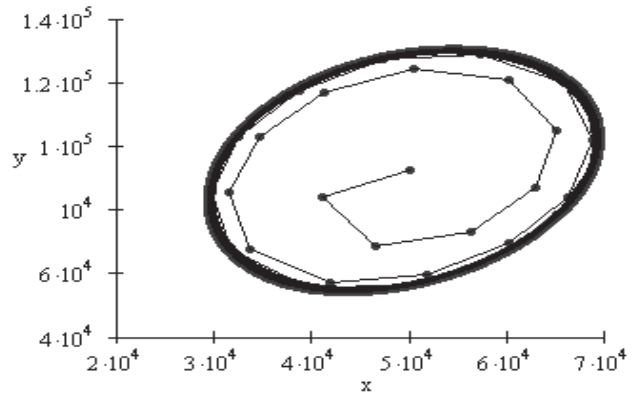


Рис. 2. Апроксимація розв'язку системи (1)

мального виходу на граничний цикл / В.В.Гоцуленко, О.О. Піддубна // Матеріали роботи Міжнародної конференції "Контроль і управління в складних системах" (КУСС-2008) // Науковий збірник.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука 1989.

Стаття надійшла до редакції 27.07.2009 р.

НАУКОВО-ПРАКТИЧНИЙ ЖУРНАЛ

# ІНВЕСТИЦІЇ ПРАКТИКА ТА ДОСВІД

ЖУРНАЛ ВИХОДИТЬ 24 РАЗИ НА РІК

Через редакцію передплата проводиться з будь-якого місяця!

Передплатний індекс: 23892

Свідчення КВ № 12178-1062 ПР від 11. 01. 2007 року

[www.investplan.com.ua](http://www.investplan.com.ua)

Журнал включено до переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук з

## ЕКОНОМІКИ

ЗАСНОВНИКИ:

- Рада по вивченню продуктивних сил України Національної академії наук України.
- ТОВ "ДКС Центр"

вул. Дорогожицька, 18, к. 29  
 (044) 458 10 73, 537 14 33, 223 26 28  
 e-mail: dks@kiev.rel.com  
 economy\_2008@ukr.net