УДК 519.872:519.217:664.7

Ю. В. Ігнатова,
к. е. н., доцент кафедри економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ "Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана", м. Київ
С. Д. Волощук,
к. ф.-м. н., доцент кафедри економіко-математичного моделювання,
ДВНЗ "Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана", м. Київ

МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ БОРОШНОМЕЛЬНОГО ПІДПРИЄМСТВА НА ОСНОВІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Y. Ignatova,
PhD, associate professor of economic and mathematical modelling department,
SHEI "Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman"
S. Voloshchuk,
PhD, associate professor of economic and mathematical modelling department,
SHEI "Kyiv National Economic University named after Vadym Hetman"

MODELLING OF A FLOUR MILLING ENTERPRISE ON THE BASIS OF QUEUING SYSTEMS

У статті запропоновано модель управління борошномельним підприємством з використанням апарату систем масового обслуговування. На основі математичної моделі роботи борошномельного підприємства в динаміці отримано прогноз функціонування підприємства на фазі прийому зернових культур та його основні операційні характеристики. Показано, що отримання імовірнісного прогнозу діяльності борошномельного підприємства в стаціонарному режимі не залежить від його початкового стану.

The article proposes a management model of functioning a flour mill enterprise as a queuing system. Based on the mathematical model of queuing systems theory, main operating estimates of functioning a flour mill enterprise are received. It is shown that obtaining of the probability prognosis of a flour mill enterprise in the steady regime is independent of its initial state.

Ключові слова: борошномельне підприємство, системи масового обслуговування, вхідний потік вимог, розв'язки в динаміці, стаціонарний режим.
Key words: flour milling enterprise, queuing systems, the input flow requirements, dynamic solutions, steady state.

ВСТУП

Важливе місце у складі агропромислового комплексу України займає зернопромисловий підкомплекс, до якого належать галузі, що займаються переробкою зернових культур: борошномельно-круп'яна та комбікормова.

Борошномельно-круп'яна галузь грає провідну роль у забезпеченні населення, а також інших галузей харчової промисловості такими соціально-значущими продуктами, як борошно і крупи. Найважливішими чинниками, які впливають на територіальне розміщення підприємств

Передплатний індекс 21847

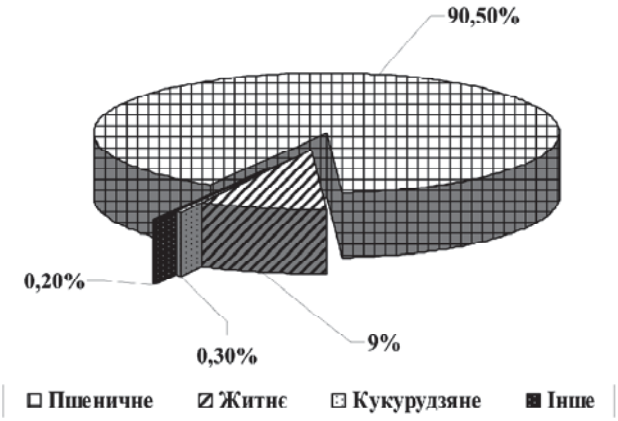

Рис. 1. Структура виробництва борошна в Україні, %

з виробництва даної продукції, є споживачі та сировинні ресурси.

Україна має достатні можливості щодо заготівлі продовольчого зерна для виробництва борошна та круп. Щорічна потреба країни в продовольчому зерні, зокрема для виробництва хліба та хлібобулочних виробів, оцінюється від 5,7 до 7 млн т. Традиційно використовується широкий спектр зернових культур. Головна роль у продовольчому споживанні, звичайно, належить пшениці — 80%. На частку жита і гречки припадає по 7% і 5% відповідно. Використання рису і кукурудзи в середньому складає приблизно 3%. Споживання інших зернових і зернобобових культур на виробництво борошна та круп традиційно незначне і разом складає близько 4%.

В Україні борошно є сировиною для найбільш важливих продуктів харчування, тому виробництво цього товару в країні вважається стратегічним. Офіційно зареєстровані статистикою обсяги виробництва борошна в Україні за останніх 5 років коливалися в межах 3 млн т. Відповідно до діючих стандартів, вітчизняні борошномельні підприємства виробляють борошно наступних видів:

— пшеничне борошно чотирьох сортів (крупчатка, вищий, перший, другий, обойне);

— житнє борошно трьох сортів (сіяне, обдирне, обойне);

— житньо-пшеничне і пшенично-житнє обойне борошно.

Також в Україні виробляється борошно другого сорту з твердої пшениці, кукурудзяне, вівсяне, в незначних обсягах — рисове, ячмінне, гречане, соєве. Причому, найбільшу частку в структурі випуску борошна займає пшеничне борошно — близько 90% [1].

На сьогодні в Україні налічується близько 600 борошномельних підприємств, з них 200 — комбінати хлібопродуктів. Потужності з виробництва борошна знаходяться на рівні понад 11 млн т. За офіційними даними, великі борошномельні підприємства виробляють близько 70% борошна від загального виробництва. У країні також активно працює величезна кількість приватних міні-млинів, сукупна потужність яких, на думку незалежних експертів, дозволяє покрити потреби вітчизняного ринку борошна на 30%.

Виходячи з вищенаведених даних, Україна має значний експортний потенціал у виробництві борошна і здатна зайняти чільне місце серед лідерів. А отже, актуальним є завдання удосконалення управління виробництвом борошномельного підприємства.

У сільському господарстві робота борошномельного підприємства може бути класифікована як багатоканальна система масового обслуговування (СМО) з очікуванням (чергою). Тобто партія зерна, що надійшла в момент, коли всі канали обслуговування зайняті, стає в чергу і

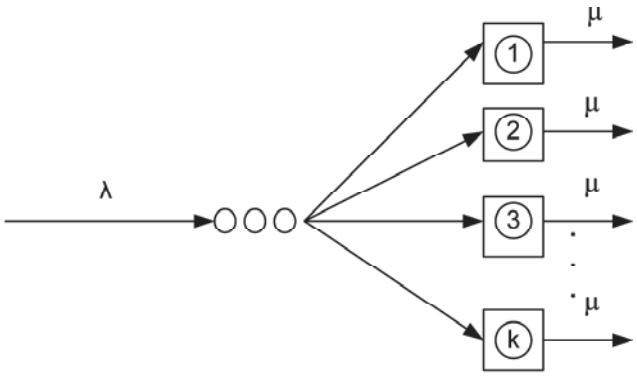

Рис. 2. Схема роботи борошномельного підприємства

чекає, поки не звільниться один з каналів. Борошномельне підприємство є системою з обмеженим очікуванням, при цьому черга може обмежуватися як довжиною, так і часом очікування.

У процесі моделювання роботи борошномельного підприємства, для розрахунку операційних показників його роботи згідно з [2] використовуються наступні характеристики СМО:

— інтенсивність надходження партій зернових в систему;

— інтенсивність обслуговування партій зернових системою.

Наведемо деякі приклади операційних показників роботи борошномельного підприємства:

— ймовірність відмови в обслуговуванні;

— відносна пропускна здатність системи;

— абсолютна пропускна здатність системи;

— середня кількість партій зернових у системі;

— середній час перебування партії зернових у системі;

— середня тривалість перебування партії зернових у черзі;

— середня кількість партій зернових у черзі (довжина черги).

Розгляд борошномельного підприємства в якості СМО на сьогоднішній день є досить популярним і широко використовується в роботах [3], [4], [5], [6]. Цей підхід дозволяє використовувати операційні показники роботи борошномельного підприємства в якості критеріїв, які допомагають аналізувати наслідки зміни стратегії роботи, наприклад при зміні стратегії "мінімальний середній час обслуговування" на стратегію "мінімальна середня кількість партій зернових у черзі". Отримані показники (як результат моделювання) дозволяють більш точно складати прогнози і плани на майбутні періоди роботи підприємства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Отже, представимо борошномельне підприємство як систему масового обслуговування, до якої на обслуговування надходить потік партій зернових, розподілений за законом Пуассона з параметром λ. При цьому інтенсивність обслуговування кожної партії зернових є випадковою величиною, яка має експоненціальний закон розподілу із параметром μ. Схему роботи такої СМО з k обслуговуючими терміналами представлено на рисунку 2.

Поставимо завдання побудувати модель функціонування борошномельного підприємства в стаціонарному та динамічну режимах роботи. Для цього використаємо апарат СМО.

Розв'язання задачі.

Стохастична модель роботи борошномельного підприємства в динамці представлена системою лінійних однорідних диференційних рівнянь [2—6]:

$$\begin{cases} P'_{0(0)}(t) = -\lambda P_{0(0)}(t) + \mu P_{0(1)}(t), \\ P'_{0(1)}(t) = -(\lambda+\mu)P_{0(1)}(t) + \lambda P_{0(0)}(t) + 2\mu P_{0(2)}(t), \\ P'_{0(2)}(t) = -(\lambda+2\mu)P_{0(2)}(t) + \lambda P_{0(1)}(t) + 3\mu P_{0(3)}(t), \\ \vdots \\ P'_{0(k)}(t) = -(\lambda+k\mu)P_{0(k)}(t) + \lambda P_{0(k-1)}(t) + k\mu P_{1(k)}(t), \\ P'_{1(k)}(t) = -(\lambda+k\mu)P_{1(k)}(t) + \lambda P_{0(k)}(t) + k\mu P_{2(k)}(t), \\ P'_{2(k)}(t) = -(\lambda+k\mu)P_{2(k)}(t) + \lambda P_{1(k)}(t) + k\mu P_{3(k)}(t), \\ P'_{3(k)}(t) = -(\lambda+k\mu)P_{3(k)}(t) + \lambda P_{2(k)}(t) + k\mu P_{4(k)}(t), \\ \vdots \\ P'_{m-1(k)}(t) = -(\lambda+k\mu)P_{m-1(k)}(t) + \lambda P_{m-2(k)}(t) + k\mu P_{m(k)}(t) \\ P'_{m(k)}(t) = -(\lambda+k\mu)P_{m(k)}(t) + \lambda P_{m-1(k)}(t) + k\mu P_{m+1(k)}(t), \\ \vdots \end{cases} \quad (1),$$

де $P_{m(k)}$ — ймовірність того, що в момент часу t підприємство обслуговує k партій зерна, а m партій очікують на обслуговування, тобто перебувають у черзі.

Розглянемо модель (1) в стаціонарному режимі. Вона матиме вигляд:

$$\begin{cases} \lambda P_{0(0)} = \mu P_{0(1)}, \\ (\lambda+\mu)P_{0(1)} = \lambda P_{0(0)} + 2\mu P_{0(2)}, \\ (\lambda+2\mu)P_{0(2)} = \lambda P_{0(1)} + 3\mu P_{0(3)}, \\ \vdots \\ (\lambda+k\mu)P_{0(k)} = \lambda P_{0(k-1)} + k\mu P_{1(k)}, \\ (\lambda+k\mu)P_{1(k)} = \lambda P_{0(k)} + k\mu P_{2(k)}, \\ (\lambda+k\mu)P_{2(k)} = \lambda P_{1(k)} + k\mu P_{3(k)}, \\ (\lambda+k\mu)P_{3(k)} = \lambda P_{2(k)} + k\mu P_{4(k)}, \\ \vdots \\ (\lambda+k\mu)P_{m-1(k)} = \lambda P_{m-2(k)} + k\mu P_{m(k)}, \\ (\lambda+k\mu)P_{m(k)} = \lambda P_{m-1(k)} + k\mu P_{m+1(k)}, \\ \vdots \end{cases} \quad (2).$$

Визначимо ймовірності $P_{0(k)}(k>0)$ із системи (2), тобто ймовірності станів системи за відсутності черги. Поклавши $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ отримаємо:

$$P_{0(1)} = \rho P_{0(0)},\ P_{0(2)} = \frac{\rho^2}{2}P_{0(0)},\ P_{0(3)} = \frac{\rho^3}{2\cdot 3}P_{0(0)},\ P_{0(4)} = \frac{\rho^4}{2\cdot 3\cdot 4}P_{0(0)},$$

$$P_{0(5)} = \frac{\rho^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}P_{0(0)},\ \ldots,\ P_{0(k)} = \frac{\rho^k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}P_{0(0)};$$

або

$$P_{0(1)} = \rho P_{0(0)},\ P_{0(2)} = \frac{\rho^2}{2!}P_{0(0)},\ P_{0(3)} = \frac{\rho^3}{3!}P_{0(0)},\ P_{0(4)} = \frac{\rho^4}{4!}P_{0(0)},$$

$$P_{0(5)} = \frac{\rho^5}{5!}P_{0(0)},\ \ldots,\ P_{0(k)} = \frac{\rho^k}{k!}P_{0(0)}.$$

Отже, ймовірність обслуговування партій зернових за відсутності черги та за умови стаціонарності процесу визначається формулою:

$$P_{0(k)} = \frac{\rho^k}{k!}P_{0(0)} \quad (3).$$

За наявності черги ймовірності станів $P_{m(k)}$ будуть мати такий вигляд:

$$P_{1(k)} = \frac{\rho^{k+1}}{k\cdot k!}P_{0(0)},\ P_{2(k)} = \frac{\rho^{k+2}}{k^2\cdot k!}P_{0(0)},\ P_{3(k)} = \frac{\rho^{k+3}}{k^3\cdot k!}P_{0(0)},\ P_{4(k)} = \frac{\rho^{k+4}}{k^4\cdot k!}P_{0(0)},$$

$$P_{5(k)} = \frac{\rho^{k+5}}{k^5 \cdot k!} P_{0(0)}, \ldots, P_{m(k)} = \frac{\rho^{k+m}}{k^m \cdot k!} P_{0(0)}.$$

Тобто ймовірність обслуговування k партій зернових, за наявності черги довжиною m та за умови стаціонарності процесу, визначається формулою:

$$P_{m(k)} = \frac{\rho^{k+m}}{k^m \cdot k!} P_{0(0)} \qquad (4).$$

Для визначення $P_{0(0)}$ використаємо той факт, що сума ймовірностей повної групи несумісних подій рівна 1, тобто

$$\sum_{n=0}^{k} P_{0(n)} + \sum_{m=1}^{\infty} P_{m(k)} = 1.$$

Тоді:

$$P_{0(0)} + \rho P_{0(0)} + \frac{\rho^2}{2!} P_{0(0)} + \frac{\rho^3}{3!} P_{0(0)} + \frac{\rho^4}{4!} P_{0(0)} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!} P_{0(0)} + \frac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!} P_{0(0)} +$$

$$+ \frac{\rho^{k+2}}{k^2 \cdot k!} P_{0(0)} + \frac{\rho^{k+3}}{k^3 \cdot k!} P_{0(0)} + \frac{\rho^{k+4}}{k^4 \cdot k!} P_{0(0)} + \cdots + \frac{\rho^{k+m}}{k^m \cdot k!} P_{0(0)} + \cdots = 1,$$

$$P_{0(0)} \left((1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho^k}{k!} (\frac{\rho}{k} + \frac{\rho^2}{k^2} + \frac{\rho^3}{k^3} + \frac{\rho^4}{k^4} + \cdots + \frac{\rho^m}{k^m} + \cdots) \right).$$

Використовуючи формули суми геометричної прогресії та розкладу функції e^{ρ} в ряд можемо стверджувати [7], що при досить великих k і $0 < \rho < 1$

$$1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!} \approx e^{\rho},$$

$$\frac{\rho}{k} + \frac{\rho^2}{k^2} + \frac{\rho^3}{k^3} + \frac{\rho^4}{k^4} + \cdots + \frac{\rho^{m-1}}{k^{m1}} + \cdots = \frac{\frac{\rho}{k}}{1 - \frac{\rho}{k}} = \frac{\rho}{k - \rho}.$$

Тоді $P_{0(0)} \cdot (e^{\rho} + \frac{\rho^k}{k!} \cdot \frac{\rho}{k - \rho}) = 1$, а звідси:

$$\begin{cases} P_{0(0)} = \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ P_{0(1)} = \rho \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ P_{0(2)} = \dfrac{\rho^2}{2!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ P_{0(3)} = \dfrac{\rho^3}{3!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ \vdots \\ P_{0(k)} = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ P_{1(k)} = \dfrac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ P_{2(k)} = \dfrac{\rho^{k+2}}{k^2 \cdot k!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ P_{3(k)} = \dfrac{\rho^{k+3}}{k^3 \cdot k!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}, \\ \vdots \\ P_{m(k)} = \dfrac{\rho^{k+m}}{k^m \cdot k!} \cdot \dfrac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}}. \\ \vdots \end{cases} \qquad (5).$$

Отже, розв'язуючи систему (2) методом вираження і підстановки члена $P_{0(0)}$, легко отримати математичне сподівання (середню кількість оброблених партій зернових):

$$M = \sum_{n=0}^{k} n P_{0(n)} + \sum_{m=1}^{\infty} m P_{m(k)} = \frac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho} + \rho^{k+1}} \left(\sum_{n=0}^{k} n \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^k}{k!} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \frac{\rho^m}{k^m} \right) \quad (6).$$

Розв'яжемо систему (2) використовуючи метод імовірнісних твірних функцій. Для цього введемо імовірнісну твірну функцію $A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i \cdot P_{i(k)}$.

Вибравши з системи (2) тільки ті стани, в яких присутня черга, отримаємо:

$$\begin{cases} (\lambda + k\mu) P_{0(k)} = \lambda P_{0(k-1)} + k\mu P_{1(k)}, \\ (\lambda + k\mu) P_{1(k)} = \lambda P_{0(k)} + k\mu P_{2(k)}, \\ (\lambda + k\mu) P_{2(k)} = \lambda P_{1(k)} + k\mu P_{3(k)}, \\ (\lambda + k\mu) P_{3(k)} = \lambda P_{2(k)} + k\mu P_{4(k)}, \\ \vdots \\ (\lambda + k\mu) P_{m-1(k)} = \lambda P_{m-2(k)} + k\mu P_{m(k)}, \\ (\lambda + k\mu) P_{m(k)} = \lambda P_{m-1(k)} + k\mu P_{m+1(k)}, \\ \vdots \end{cases} \qquad (7).$$

Тоді помноживши рівності системи (7) на $x^0, x^1, x^2, \ldots$ відповідно, а потім додавши їх, отримаємо [4]:

$$(\lambda + k\mu) P_{0(k)} + (\lambda + k\mu) \sum_{i=1}^{\infty} x^i \cdot P_{i(k)} = \lambda P_{0(k-1)} + .$$

$$+ \lambda x \sum_{i=1}^{\infty} x^i \cdot P_{i(k)} + \frac{k\mu}{x} \sum_{i=1}^{\infty} x^i \cdot P_{i(k)} + \lambda x P_{0(k)};$$

$$(\lambda + k\mu) P_{0(k)} + (\lambda + k\mu) A(x) = \lambda P_{0(k-1)} + \lambda x A(x) + \frac{k\mu}{x} A(x) + \lambda x P_{0(k)};$$

$$\left(\lambda(1 - x) + k\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) A(x) = \lambda(x - 1) P_{0(k)} + \lambda P_{0(k-1)} - k\mu P_{0(k)}.$$

Оскільки $P_{0(k)} = \frac{\rho^k}{k!} P_{0(0)}$, $P_{0(k-1)} = \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} P_{0(0)}$, $\lambda = \rho\mu$, то

$$\lambda P_{0(k-1)} - k\mu P_{0(k)} = \lambda \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} P_{0(0)} - k\mu \frac{\rho^k}{k!} P_{0(0)} = P_{0(0)} \left(\lambda \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} - k\mu \frac{\rho^k}{k!} \right) = 0.$$

Отже:

$$\left(\lambda(1 - x) + k\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right) A(x) = \lambda(x - 1) P_{0(k)}.$$

Звідси, маємо:

$$A(x) = \frac{\lambda(x - 1) P_{0(k)}}{\lambda(1 - x) + k\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right)}.$$

Виконавши нескладні арифметичні дії та враховуючи, що $\lambda = \rho\mu$, отримаємо:

$$A(x) = \frac{\rho \cdot x \cdot P_{0(k)}}{k - \rho \cdot x},$$

або

$$A(x) = \frac{\rho \cdot x}{k - \rho \cdot x} \cdot \frac{\rho^k}{k!} P_{0(0)} = \frac{\rho^{k+1} \cdot x}{(k - \rho \cdot x) k!} P_{0(0)}.$$

Поклавши $x = 1$, отримаємо:

$$A(1) = \frac{\rho \cdot P_{0(k)}}{k - \rho} = \frac{\rho}{k - \rho} \cdot \frac{\rho^k}{k!} \cdot P_{0(0)} = \frac{\rho^{k+1}}{(k - \rho) \cdot k!} \cdot P_{0(0)}.$$

Запишемо умову нормування [4], для всіх несумісних станів системи:

$$A(1) + e^{\rho} \cdot P_{0(0)} = 1.$$

Використовуючи знайдене вище $A(1)$, отримаємо рівняння:

$$\frac{\rho^{k+1}}{(k-\rho)\cdot k!}\cdot P_{0(0)}+e^{\rho}\cdot P_{0(0)}=1,$$

з якого визначимо $P_{0(0)}$:

$$P_{0(0)}=\frac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1}} \qquad (8).$$

Для побудови сподіваної кількості оброблених партій зерна обчислимо похідну $A'(x)$ та її значення $A'(1)$.

$$A'(x)=\frac{\rho^{k+1}\cdot(k-\rho\cdot x)\cdot k!+\rho^{k+1}\cdot x\cdot k!\cdot\rho}{((k-\rho\cdot x)\cdot k!)^2}\cdot$$

$$P_{0(0)}=\frac{k!\cdot\rho^{k+1}\cdot k-k!\cdot\rho^{k+2}\cdot x+\rho^{k+2}\cdot x\cdot k!\cdot}{((k-\rho\cdot x)\cdot k!)^2}\cdot$$

$$\cdot P_{0(0)}=\frac{k!\cdot k\cdot\rho^{k+1}}{((k-\rho\cdot x)\cdot k!)^2}\cdot P_{0(0)}=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho\cdot x)^2\cdot k!}\cdot P_{0(0)};$$

$$A'(x)=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho\cdot x)^2\cdot k!}\cdot\frac{k!(k-\rho)}{(k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1})}=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho\cdot x)^2}\cdot\frac{(k-\rho)}{(k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1})}.$$

$$A'(1)=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho)(k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1})}.$$

Отже, розв'язавши систему (2) за методом імовірнісних твірних функцій, отримаємо математичне сподівання кількості оброблених партій зерна:

$$M=A'(1)+\sum_{m=1}^{k}mP_{0(m)}=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho)(k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1})}+$$

$$+\left(1P_{0(1)}+2P_{0(2)}+\ldots+kP_{0(k)}\right)=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho)(k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1})}+$$

$$+P_{0(0)}\left(1\cdot\frac{\rho^1}{1!}+2\cdot\frac{\rho^2}{2!}+3\cdot\frac{\rho^3}{3!}+4\cdot\frac{\rho^4}{4!}+\cdots+k\cdot\frac{\rho^k}{k!}\right)=$$

$$=\frac{k\cdot\rho^{k+1}}{(k-\rho)(k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1})}+\frac{k!(k-\rho)}{k!(k-\rho)e^{\rho}+\rho^{k+1}}\left(1\cdot\frac{\rho^1}{1!}+\right.$$

$$\left.+2\cdot\frac{\rho^2}{2!}+3\cdot\frac{\rho^3}{3!}+4\cdot\frac{\rho^4}{4!}+\cdots+k\cdot\frac{\rho^k}{k!}\right) \qquad (9).$$

Розглянемо систему (1) в динаміці. Для цього представимо її у матрично-векторній формі $\frac{d\vec{P}(t)}{dt}=A\cdot\vec{P}(t)$,

Таблиця 1. Розв'язки системи в стаціонарному режимі

Стан системи	Імовірність
$P_{0(0)}$	0,6065
$P_{0(1)}$	0,3032
$P_{0(2)}$	0,0758
$P_{0(3)}$	0,0126
$P_{0(4)}$	0,0016
$P_{1(4)}$	0,0002
$P_{2(4)}$	0,0001

Стан системи	Імовірність
$P_{3(4)}$	0
$P_{4(4)}$	0
$P_{5(4)}$	0
$P_{6(4)}$	0
$P_{7(4)}$	0
$P_{8(4)}$	0

де $\vec{P}(t)=\begin{pmatrix}P_{0(0)}(t)\\P_{0(1)}(t)\\P_{0(2)}(t)\\\vdots\\P_{0(k)}(t)\\P_{1(k)}(t)\\P_{2(k)}(t)\\\vdots\\P_{m(k)}(t)\\\vdots\end{pmatrix}$ — вектор ймовірностей станів підприємства в момент часу t,

A — матриця коефіцієнтів системи (1) при невідомих ймовірностях.

Вектор ймовірностей $\vec{P}(t)$ будемо шукати у вигляді [4]

$\vec{P}(t)=T\cdot\vec{y}(t)$,

де T — матриця, стовпцями якої є власні вектори матриці A, а $\vec{y}(t)$ — невідома вектор-функція відповідної розмірності. Тоді

$$T\frac{d\vec{y}(t)}{dt}=AT\cdot\vec{y}(t),$$

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt}=D\cdot\vec{y}(t) \qquad (10),$$

$D=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\beta_1&0&\ldots&0\\0&\beta_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\ldots&\beta_n\end{pmatrix}$ — діагональна матри-

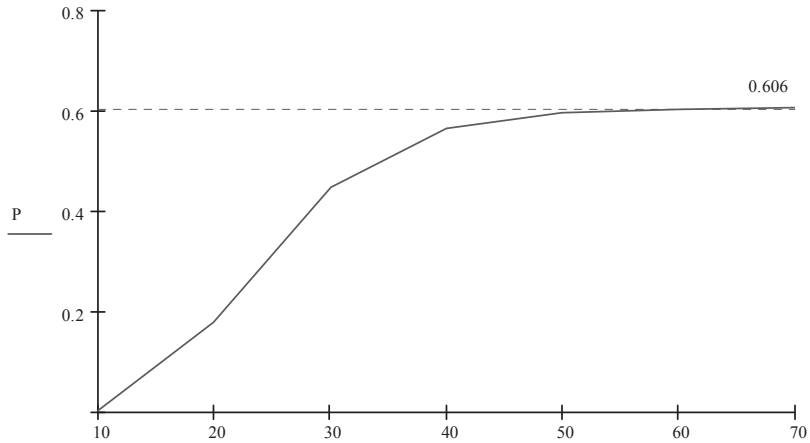

Рис. 3. Динаміка змін $P_{0(0)}$

ця, елементами якої є характеристичні корені β_n матриці A.

Розв'язуючи рівняння (10), отримаємо:

$$\vec{y}(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}=(y_1(0), y_2(0)\ldots, y_n(0))\begin{pmatrix} e^{\beta_1 t} \\ e^{\beta_2 t} \\ \vdots \\ e^{\beta_n t} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1(0)e^{\beta_1 t} \\ y_2(0)e^{\beta_2 t} \\ \\ y_n(0)e^{\beta_n t} \end{pmatrix} \quad (11),$$

де $y_i(0), i=\overline{1,n}$ є координатами вектора $\vec{y}(0)=T^{-1}\vec{P}(0)$, а $\vec{P}(0)=(1\ 0\ \ldots\ 0)^T$ — вектор початкових ймовірностей станів підприємства.

Визначивши за формулою (11) вектор $\vec{y}(t)$, отримаємо розв'язки системи (1):

$$\vec{P}(t)=T\cdot\vec{y}(t) \quad (12).$$

Отже, розв'язавши систему (1), ми отримаємо математичне сподівання (середню кількість партій зернових, оброблених борошномельним підприємством):

$$M=\sum_{m=0}^{+\infty} mP_{m(k)}.$$

Чисельний експеримент.

Застосуємо отримані вище результати на практиці. Встановимо наступні початкові умови: нехай інтенсивність надходження зернових складає 5 партій/год. Інтенсивність обслуговування складає 10 партій/год, по 2 тонни в кожній партії. Тоді, $\lambda=\frac{5}{60}$, $\mu=\frac{10}{60}$. Нехай $k=4$, $m=8$.

Використовуючи (5), імовірність простою підприємства $P_{0(0)}=0{,}624$, а середня кількість партій зерна, оброблених борошномельним підприємством, $M=0{,}513$ (див. (6)).

Аналогічно за формулами (8), (9) отримаємо такі ж результати: $P_{0(0)}=0{,}624$, $M=0{,}513$.

Проте, якщо розв'язати систему (2) стандартним алгебраїчним методом, замінивши останній рядок системи (2) на умову нормування та використовуючи метод оберненої матриці, отримаємо: $P_{0(0)}=0{,}606$, $M=0{,}506$.

Використавши (5), розв'язки системи в стаціонарному режимі подамо в таблиці 1.

Перехід роботи системи в стаціонарний режим відбувається за 70 хв і демонструється на рис. 3.

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто стохастичну модель роботи борошномельного підприємства на основі системи масового обслуговування з k каналами. Розглянуто стаціонарний та динамічний режими роботи підприємства. Для стаціонарного випадку роботи сподівану кількість оброблених підприємством партій зернових знайдено двома методами: методом підстановок та методом імовірнісних твірних функцій. Для динамічного випадку модель функціонування борошномельного підприємства представлено у вигляді матричної системи диференціальних рівнянь, яка була розв'язана методом діагоналізації матриці коефіцієнтів. На прикладі показано, що середня пропускна здатність борошномельного підприємства з часом стабілізується, тобто підприємство переходить у стаціонарний режим роботи. Отримані результати можна використовувати для оцінки середнього завантаження борошномельних підприємств та планування їх виробничих потужностей.

Література:

1. Україна. Борошномельно-круп'яна галузь (2007 р.)// [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://www.ukrexport.gov.ua/ukr/prom/ukr/157.html

2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процесов / А.Д. Вентцель. — Изд. 2-е доп. — М.: Физматлит, 1996. — 400 с.

3. Жлуктечко В.І. Стохастичні процеси та моделі в економіці, соціології, екології: навч. посібник / В.І. Жлуктечко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. — К.: КНЕУ, 2002. — 226 с.

4. Жлуктечко В.І. Стохастичні моделі в економіці: монографія / В.І. Жлуктенко, А.В. Бєгун. — К.: КНЕУ, 2005. — 352 с.

5. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т.Л. Саати. — М.: Советское радио, 1965. — 510 с.

6. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок, перевод с англ. И.И. Грушко, ред. В.И. Непман. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.

7. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. — Изд. 4-е. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.

References:

1. Ukraine. Flour and cereal sector (2007), available at: http://www.ukrexport.gov.ua/ukr/prom/ukr/157.html (Accessed 8 Apr 2015).

2. Ventcel', A.D. (1996), Kurs teorii sluchajnyh procesov [Course in the theory of stochastic processes], 2nd ed, Fizmatlit, Moscow, Russia, p. 400.

3. Zhluktechko, V.I. Nakonechnyj, S.I. and Savina, S.S. (2002), Stokhastychni protsesy ta modeli v ekonomitsi, sotsiolohii, ekolohii: navch. posibnyk [Stochastic processes and models in economics, sociology, ecology: tutorial], KNEU, Kyiv, Ukraine, p. 226.

4. Zhluktechko, V.I. and Biehun, A.V. (2005), Stokhastychni modeli v ekonomitsi: monohrafiia [Stochastic models in economics: monograph], KNEU, Kyiv, Ukraine, p. 352.

5. Saati, T.L. (1965), Jelementy teorii massovogo obsluzhivanija i ee prilozhenija [Elements of queuing theory and its applications], Sovetskoe radio, Moscow, Russia, p. 510.

6. Klejnrok, L. (1979), Teorija massovogo obsluzhivanija [Queueing theory], Mashinostroenie, Moscow, Russia, p. 432.

7. Gradshtejn, I.S. and Ryzhik, I.M. (1963), Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij [Table of integrals, sums, series and products], 4th ed, Fizmatgiz, Moscow, Russia, p. 1100.

Стаття надійшла до редакції 10.04.2015 р.