

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СПИРАЛЬНО АРМИРОВАННЫХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

П.П. Лепихин, д-р физ.-мат. наук, В.А. Ромащенко, канд. техн. наук,

С.А. Тарасовская, асп.,

Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко НАН Украины, г. Киев,

В.Ф. Деменко, канд. техн. наук,

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков, Украина

Композитные материалы (КМ) находят все более широкое применение в технике, в частности в двигателестроении. Очень часто конструктивные элементы, выполненные из КМ, подвергаются нестационарным нагрузкам: например, защитные силовые оболочки и другие конструкции, рассчитанные на сохранение своей работоспособности в случае резкого увеличения нагрузок на несущие элементы [1, 2]. Структура и технология создания композитных материалов определяют их качественные различия в реакции на динамическую нагрузку. В приложениях широко используются оболочки вращения, изготовленные из композитных материалов со спиралеобразным армированием под определенным углом к образующей. Такие оболочки, как правило, локально ортотропны, но главные оси анизотропии при этом не совпадают с осями цилиндрической системы координат x, φ, r . Известны исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) подобных конструкций для условий статического нагружения [3], экспериментальные данные по внутреннему взрывному нагружению стеклоэпоксидных оболочек [1, 4], публикация [5], в которой численно исследуется осесимметричная волновая динамика спирально армированных цилиндров на основе приближенной теории тонких оболочек. Динамические задачи теории упругости о влиянии угла спиральной намотки на НДС толстостенных полых цилиндрических тел, насколько известно авторам, не рассматривались.

Ранее авторами была выполнена модификация и апробация двумерного численного метода Уилкинса для исследования осесимметричной динамики толстостенных ортотропных оболочек в цилиндрических координатах [6]. Главные направления анизотропии при этом

совпадали с координатными осями, благодаря чему тождественно обнулялись часть компонент тензоров напряжений и деформаций и окружное перемещение. В этой работе выполнена дальнейшая модификация двумерного алгоритма Уилкинса на случай ортотропных цилиндрических оболочек с произвольным углом армирования.

Дадим математическую формулировку задачи исследования (начало координат условимся всегда располагать в центре симметрии цилиндра). Уравнения движения в цилиндрических координатах с учетом осевой симметрии и произвольного (от 0 до 90°) угла армирования α имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} &= \rho \frac{du_r}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{rx}}{r} &= \rho \frac{du_x}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} &= \rho \frac{du_\varphi}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ - плотность материала,

$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \tau_{rx}, \tau_{r\varphi}, \tau_{x\varphi}$ - компоненты тензора напряжений;

t - время; u_r, u_φ, u_x - компоненты вектора скорости перемещений.

Геометрические соотношения, выражающие тензор скоростей деформаций через вектор скорости перемещений, запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \varepsilon_\varphi &= \frac{u_r}{r}; & \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \gamma_{rx} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}; & \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \\ \dot{\gamma}_{x\varphi} &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2)$$

Физические уравнения с учетом произвольного (от 0 до 90°) угла армирования α запишем в векторной форме:

$$\begin{aligned}d\{\sigma_x; \sigma_\varphi; \sigma_r; \tau_{x\varphi}; \tau_{r\varphi}; \tau_{rx}\} = \\ = C\{\varepsilon_x; \varepsilon_\varphi; \varepsilon_r; \dot{\gamma}_{x\varphi}; \dot{\gamma}_{r\varphi}; \dot{\gamma}_{rx}\} dt,\end{aligned}\quad (3)$$

где квадратная матрица C размерности 6×6 симметрична ($C_{ij} = C_{ji}$) и имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned}C_{12} &= B_{x\varphi} + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi} - 4G_{x\varphi}) \times \\ &\times \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ C_{44} &= G_{x\varphi} \cos^2 2\alpha + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi}) \times \\ &\times \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\ C_{33} &= A_r; \\ \{C_{11}; C_{22}\} &= \{A_x; A_\varphi\} \cos^4 \alpha + \{A_\varphi; A_x\} \times \\ &\times \sin^4 \alpha + \{1; 1\} (0.5B_{x\varphi} + G_{x\varphi}) \sin^2 2\alpha; \\ \{C_{13}; C_{23}; C_{55}; C_{66}\} &= \{B_{rx}; B_{r\varphi}; G_{r\varphi}; G_{rx}\} \times \\ &\times \cos^2 \alpha + \{B_{r\varphi}; B_{rx}; G_{rx}; G_{r\varphi}\} \sin^2 \alpha; \\ \{C_{34}; C_{56}\} &= \{B_{r\varphi} - B_{rx}; G_{r\varphi} - G_{rx}\} \sin \alpha \cos \alpha; \\ \{C_{14}; C_{24}\} &= \\ &= \{A_\varphi; -A_x\} \sin^2 \alpha + \{-A_x; A_\varphi\} \cos^2 \alpha + \\ &+ \{1; -1\} (B_{x\varphi} + 2G_{x\varphi}) \cos 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha, \\ A_x &= E_x (1 - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi}) / D; \\ B_{x\varphi} &= E_\varphi (\nu_{x\varphi} + \nu_{x\varphi} \nu_{r\varphi}) / D; \\ D &= 1 - 2\nu_{x\varphi} \nu_{r\varphi} \nu_{rx} - \nu_{x\varphi} \nu_{\varphi x} - \\ &- \nu_{r\varphi} \nu_{r\varphi} - \nu_{rx} \nu_{rx}.\end{aligned}$$

Выражения для $A_\varphi, A_r, B_{r\varphi}, B_{rx}$ получают путем циклической перестановки индексов x, φ, r ;

E_i, ν_{ij}, G_{ij} ($i, j = x, \varphi, r$; $i \neq j$) – технические характеристики упругости ортотропного материала в главных осях анизотропии при угле армирования $\alpha = 0$, то есть в случае цилиндрически ортотропного тела.

При этом необходимо, чтобы выполнялись равенства [7]:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Система уравнений (1)-(3) замыкается начальными и граничными условиями. Начальные условия полагались нулевыми. Граничные условия – силовыми или кинематическими. Несмотря на наличие всех компонент перемещений, напряжений и деформаций, краевая задача (1)-(3) будет осесимметричной в том смысле, что ни одна из ее переменных не будет зависеть от угловой координаты φ [3].

На основе приведенных уравнений авторами был разработан пакет прикладных программ (ППП) для осесимметричного двумерного динамического численного расчета толстостенных цилиндрических оболочек вращения при произвольном угле армирования, основанный на явной по времени интегро-интерполяционной по пространству конечно-разностной схеме Уилкинса [6]. В работе [8] выполнено довольно тщательное тестирование ППП на ряде задач, имеющих известные аналитические либо численные решения. Там же было доказано, что предложенный ППП обладает достаточно высокой точностью.

Далее с помощью разработанного ППП исследовалась динамика цилиндрической оболочки конечной длины $L = 0.4$ м; внутреннего радиуса $R_1 = 0.1$ м, наружного радиуса $R_2 = 0.116$ м в зависимости от угла армирования α . Торцы цилиндра и внешняя поверхность свободны от нагрузок, внутреннее давление меняется по закону [6]:

$$\sigma_r = -\sigma_0 R_1^3 |l^{-3} H(la^{-1} - t),$$

где $\sigma_0 = 186$ МПа;

$$a = 6310 \text{ м/с};$$

$$l = \sqrt{x^2 + R_1^2};$$

$H(t)$ – функция Хевисайда.

Рассматривалось четыре вида материала [2]:

1. $\rho = 1990 \text{ кг/м}^3$; $E_x = 14000 \text{ МПа}$; $E_\varphi = 57000 \text{ МПа}$; $E_r = 14000 \text{ МПа}$; $\nu_{x\varphi} = 0.068$; $\nu_{r\varphi} = 0.277$; $\nu_{rx} = 0.4$; $G_{rx} = 5000 \text{ МПа}$; $G_{x\varphi} = 5750 \text{ МПа}$; $G_{r\varphi} = 5750 \text{ МПа}$;

2. $\rho = 1880 \text{ кг/м}^3$; $E_x = 14500 \text{ МПа}$; $E_\varphi = 47600 \text{ МПа}$; $E_r = 20700 \text{ МПа}$; $\nu_{x\varphi} = 0.099$; $\nu_{r\varphi} = 0.149$; $\nu_{rx} = 0.325$; $G_{rx} = 4340 \text{ МПа}$; $G_{x\varphi} = 5010 \text{ МПа}$; $G_{r\varphi} = 5310 \text{ МПа}$;

3. $\rho=1870 \text{ кг/м}^3$; $E_x=11000 \text{ МПа}$; $E_\phi=36800 \text{ МПа}$; $E_r=26800 \text{ МПа}$; $\nu_{x\phi}=\nu_{\phi r}=0.105$; $\nu_{rx}=0.431$; $G_{rx}=4140 \text{ МПа}$; $G_{x\phi}=4470 \text{ МПа}$; $G_{\phi r}=5050 \text{ МПа}$;

4. $\rho=1760 \text{ кг/м}^3$; $E_x=10500 \text{ МПа}$; $E_\phi=30900 \text{ МПа}$; $E_r=27400 \text{ МПа}$; $\nu_{x\phi}=\nu_{\phi r}=0.151$; $\nu_{rx}=0.123$; $\nu_{rx}=0.417$; $G_{rx}=3690 \text{ МПа}$; $G_{x\phi}=3360 \text{ МПа}$; $G_{\phi r}=3960 \text{ МПа}$.

Численные результаты показали, что наибольшую частоту колебаний по всем формам имеет оболочка из материала 1, наименьшую – из материала 4. При этом динамика материала 2 близка к 1, а 3 – к 4. Поскольку материалы 1 и 4, как показал анализ, имеют наибольшие отличия по жесткости (частотам), приведем демонстрационные данные именно для этих материалов. Параметр β обозначает угол закручивания одного из торцов цилиндра относительно другого в градусах, w_x – осевое перемещение внутренней точки правого торца $x=L/2$. Кривым 1 соответствует $\alpha=0$; 2 – 22.5° ; 3 – 45° ; 4 – 67.5° ; 5 – 90° . Рис. 1 соответствует материалу 1, рис. 2 – материалу 4, на всех рисунках приводятся графики изменения определенных физических величин во времени: а – σ_ϕ на внутренней поверхности в центральном сечении цилиндра ($x=0$); б – осевого перемещения w_x на торце; в – угол закручивания β .

Из рисунков явно видно, что при промежуточных углах намотки ($0 < \alpha < 90^\circ$) появляются крутильные колебания конструкции, тождественно отсутствующие при осевом ($\alpha=0$) либо окружном ($\alpha=90^\circ$) армировании. Цилиндр начинает совершать колебания в радиальном, осевом и окружном направлениях одновременно. При $\alpha=67.5^\circ$ происходит качественное изменение гармонического характера колебаний σ_ϕ (см. появление «седла» на рис. 2, а) в случае материала 4. Для материала 1 этот эффект выражен более слабо. Характер колебаний σ_x для всех рассмотренных материалов существенно зависит от α и сильно отличается от гармонического. Окружные напряжения минимальны и при этом осевые напряжения максимальны одновременно примерно при одном и том же угле намотки, причем для материала 1 этот угол близок к 45° , а для материала 4 – к 67.5° .

Минимальная интенсивность напряжений в конструкции реализуется при $\alpha \approx 90^\circ$ для материала 1 и при $\alpha \approx 45^\circ$

для материала 4. То есть не всегда распределение колебаний (движений) на большее количество форм (степеней свободы) при неизменной нагрузке (начальной энергии) может приводить к снижению напряженности (интенсивности напряжений) конструкции (при $\alpha=90^\circ$ крутильные формы колебаний цилиндра отсутствуют вовсе).

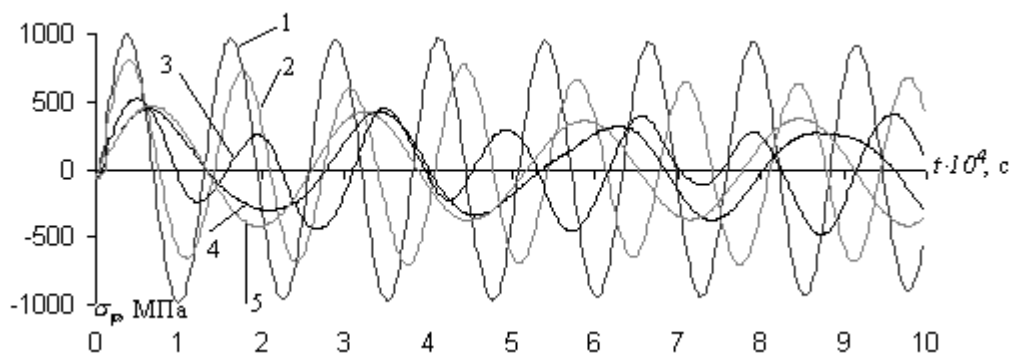
Колебания w_x существенно зависят как от α , так и от вида материала: для материала 1, например, при $\alpha=45^\circ$ колебания w_x близки к гармоническим, чего нельзя сказать о материале 4. Максимальные крутильные колебания β наблюдаются при $\alpha=22.5^\circ$ для всех рассмотренных материалов.

Выводы

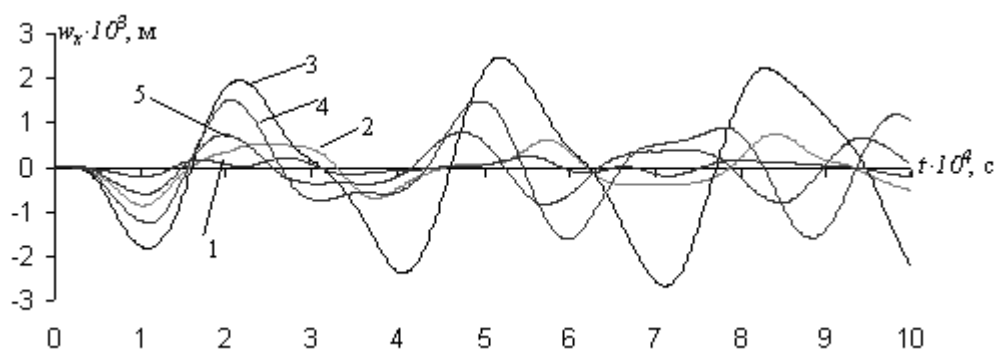
– Модифицирован численный алгоритм Уилкинса решения нестационарных двумерных краевых задач на случай толстостенных композитных спирально армированных цилиндрических оболочек при осесимметричном нагружении.

– На базе развитого метода исследована осесимметричная динамика анизотропной оболочки в зависимости от угла армирования для некоторых определенных четырех видов КМ, обнаружен ряд физических эффектов, связанных с появлением крутильных форм колебаний и не имеющих места в телах с цилиндрической ортотропией.

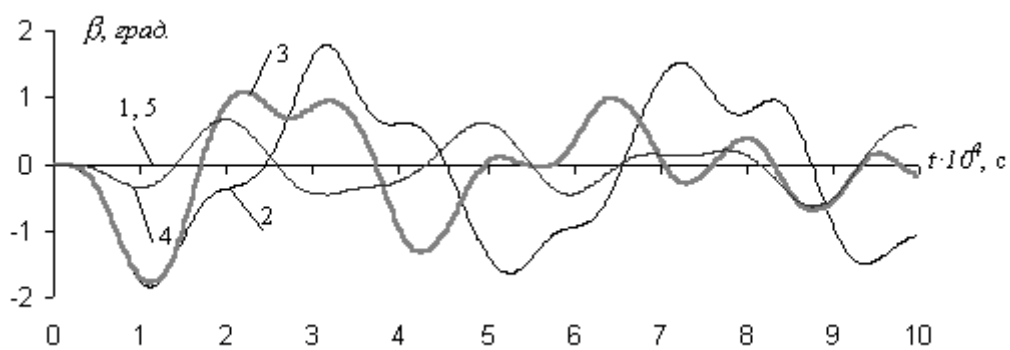
– Динамика спирально армированных цилиндрических композитных оболочек сложным образом зависит от угла намотки волокон; экстремумы напряжений и перемещений при этом наблюдаются как при промежуточных ($0 < \alpha < 90^\circ$) углах армирования, так и при предельных (0 или 90°); их величина и месторасположение по α существенно зависят от материала. Поэтому можно сделать вывод о том, что динамическую прочность спирально армированных оболочек вращения даже с точки зрения консервативных инженерных расчетов весьма проблематично (если не невозможно) описывать с помощью упрощенных приближенных моделей типа цилиндрической ортотропии.



а

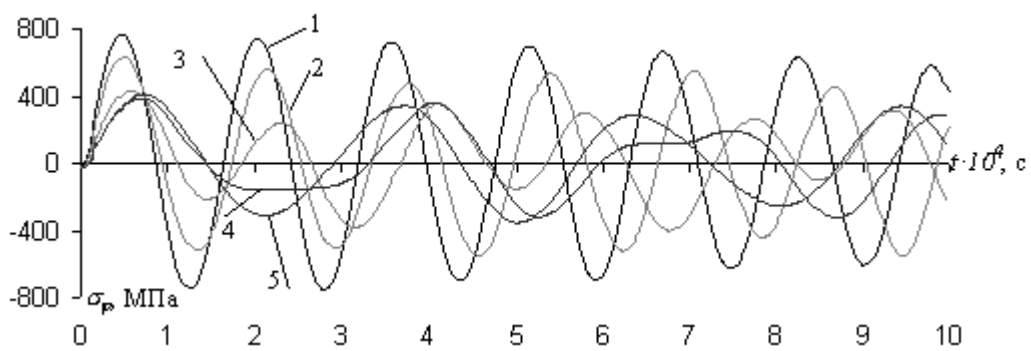


б



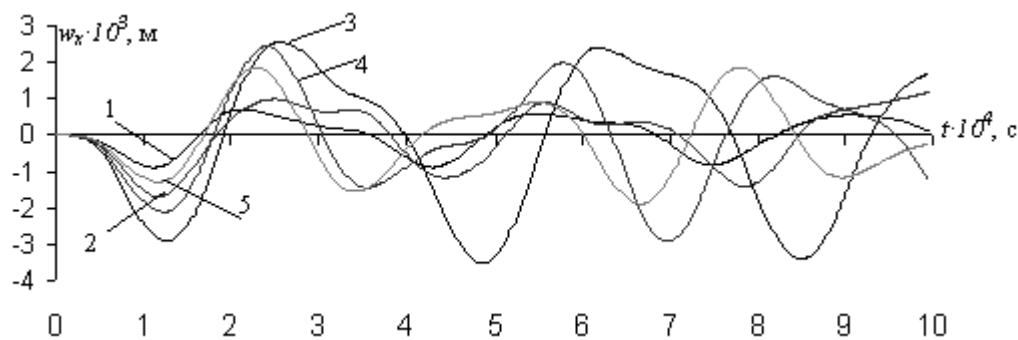
в

Рис. 1. Влияние α на динамическое НДС цилиндрической оболочки из материала 1

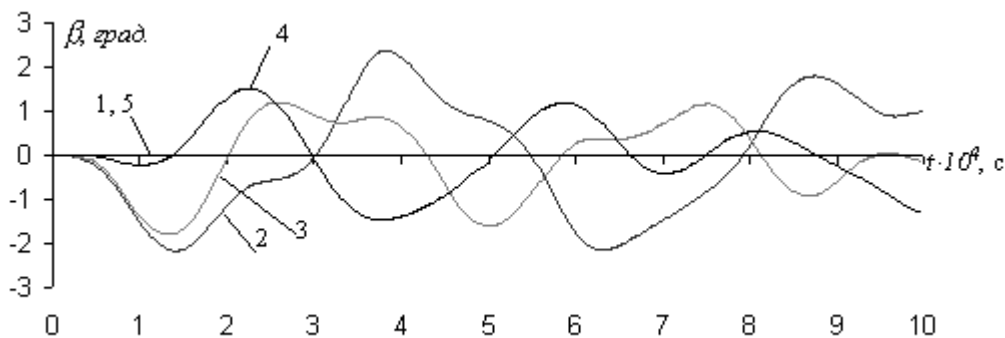


а

Рис. 2. Влияние α на динамическое НДС цилиндрической оболочки из материала 4



б



в

Окончание рис. 2

Литература

1. Федоренко А.Г., Сырунин М.А., Иванов А.Г. Динамическая прочность оболочек из ориентированных волокнистых композитов при взрывном нагружении (обзор) // Прикл. механика и техн. физика.– 1993.– № 1.– С. 126-133.
2. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник.- Л.: Машиностроение, 1980.- 247 с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел.– К.: Наук. думка, 1991.– 216 с.
4. Рыжанский В.А., Русак В.Н., Иванов А.Г. Оценка взрывостойкости цилиндрических композитных оболочек // Физика горения и взрыва.- 1999.- Т. 35, № 1.- С. 115-121.
5. Навал И.К., Сабодаш П.Ф. Осесимметричные волны в ортотропной цилиндрической оболочке // Механика композитных материалов.– 1981.- № 5.- С. 924-928.
6. Пределы применимости метода Уилкинса для исследования динамического напряженно-деформированного состояния анизотропных упругих осесимметричных оболочек / П.П. Лепихин, В.А. Ромащенко, С.А. Тарасовская, В.Г. Корбач // Проблемы прочности.– 2003.– № 1.– С. 76-86.
7. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.- М.: Наука, 1977.- 416 с.
8. Лепихин П.П., Ромащенко В.А., Тарасовская С.А. Модификация метода Уилкинса для исследования динамики осесимметричных ортотропных толсто-стенных оболочек // Конструкционная прочность материалов и ресурс оборудования АЭС: Тез. докл. Междунар. конф. (20-22 мая 2003 г.).– К.: Институт проблем прочности им. Г.С.Писаренко НАН Украины, 2003.– С. 67.

Поступила в редакцию 01.06.03

Рецензенты: д-р техн. наук, профессор А.И. Долматов, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков; д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Н.К. Кучер, ИПП НАН Украины, г. Киев.